This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Stanford University Libraries
3 6105 027 647 176

LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STA
· STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UN
UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIB
NFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSI
ERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARI
ARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFO
LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STA
· STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UN
UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIB
NFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERS
ERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRAR
ARIES
ERSITY LIBRARIES

LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · ST
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNI
ES STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFOR
ORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERS
SITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIE
UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBR
LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · ST
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNI
ES STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFOR
ORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVER
LIBRARI ANFORD UNIVERSITY LIBR

MATHESIS

THIS ITEM HAS BEEN MICROFILMED BY
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
REFORMATTING SECTION 1993. CONSULT
SUL CATALOG FOR LOCATION.

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Liége, Correspondant de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut picture mathesis!
PH. BRETON.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME VI. — ANNÉE 1896.

(TOME XVI DE LA COLLECTION.)

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
47, RUE DES CHAMPS, 47

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & FILS
IMPRIMEURS-LIBRAIRES
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1896

ABRÉVIATIONS.

B. B. Bulletins de l'Académie royale de Belgique.

C. R. Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.

N. A. M. Nouvelles Annales de Mathématiques (depuis 1842).

C. G. Q. Correspondance physique et mathématique fondée en 1825, par GABRIEL et QUETELET, continuée par QUETELET.

N. C. M. Nouvelle Correspondance Mathématique (1874-1880).

J. M. E. (ou J. M. S). Journal de Mathématiques élémentaires (ou Journal de Mathématiques spéciales), fondé en 1877 par BOURGET, continué par G. DE LONGCHAMPS.

I. M. Intermédiaire des Mathématiciens fondé en 1894, par MM. LAISANT et LEMOINE.

A. F. Association française pour l'avancement des sciences.

Crelle, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par CRELLE en 1826, continué successivement par BORCHARDT, KRONECKER et WEIERSTRASS, par KRONECKER et par FUCHS (en allemand surtout).

Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par LIOUVILLE en 1836, continué d'abord par RESAL, puis par JORDAN.

(2), III, 327-333 signifie : Deuxième série, tome troisième, pages 327 à 333.

STANFORD LIBRARY
OCT 21 1960
MATHEMATICS
QA 3
M484
v.16-17

MATHESIS

SUR LES VALEURS PRINCIPALES DES RADICAUX;

par M. De Tilly (*).

On a vu, dans les éléments, que la racine m^{me} principale d'une quantité positive a est sa racine arithmétique, positive. On peut compléter cette notion par ces deux autres règles : la racine m^{me} principale de $-a$ s'obtient, si m est impair, en prenant avec le signe — la racine m^{me} arithmétique de a. La racine m^{me} principale de $-a$ s'obtient, si m est simplement pair, en multipliant la racine m^{me} arithmétique de a par $+\sqrt{-1}$.

Les racines indiquées dans ces trois règles sont considérées comme principales, parce qu'elles sont plus simples que toutes les autres : celle de la première règle est la seule qui soit réelle et positive; celle de la seconde, la seule qui soit réelle; celle de la troisième est l'une des deux seules qui soient imaginaires simples, et elle a le signe $+$, tandis que l'autre a le signe $-$.

Dans les trois cas, les autres racines de a ou de $-a$ s'obtiennent en multipliant la racine principale par les racines m^{mes} de l'unité, autres que $+1$.

Ce qui caractérise les racines des quantités réelles $+a$ et $-a$, c'est leur parfaite continuité. Si a varie continûment de $+\infty$ à $-\infty$, chaque racine de a varie aussi d'une manière continue, 0 étant la limite de séparation entre deux séries distinctes de valeurs.

Il n'en est pas de même pour la racine m^{me} de $a+b\sqrt{-1}$, laquelle peut s'exprimer par

$$\sqrt[m]{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{m}\right).$$

Quelque combinaison que l'on adopte, aucune de ses m valeurs ne peut

---

(*) Résumé et complément de l'article publié dans le tome précédent, pp. 177-183, 217-223.

constituer une fonction continue, lorsque a et b varient eux-mêmes continûment de $+\infty$ à $-\infty$.

Nous signalerons deux combinaisons principales, dont l'une réalise le maximum de simplicité, l'autre le maximum de continuité, ces deux conditions ne pouvant pas être réunies.

1. Le maximum de simplicité s'obtient en laissant k constant, pour toutes les valeurs de a et de b, dans une même racine algébrique. Alors on choisira pour racine principale celle qui correspond à $k = 0$, et les autres s'obtiendront en multipliant celle-ci par les $m - 1$ racines de l'unité différentes de $+1$.

Le choix de la racine principale est déterminé ici, non seulement par la simplicité de la valeur 0, mais en outre par le fait que cette racine jouit, comme les racines principales des quantités réelles, de la propriété

$$\sqrt[pq]{\quad} = \sqrt[p]{\sqrt[q]{\quad}} = \sqrt[q]{\sqrt[p]{\quad}},$$

ce qui n'est vrai pour aucune autre racine du 1°, ni pour aucune racine non comprise dans le 1°.

2. Le maximum de continuité s'obtient en faisant varier k, pour une même racine algébrique, conformément au tableau suivant :

	VALEURS DE k.		
	$a>0, b>0.$	$a>0, b<0.$	$a<0,$
m impair	0	$m-1$	$\frac{1}{2}(m-1)$
m simplement pair	0	$m-1$	$\frac{1}{2}(m-2)$
m doublement pair	0	$m-1$	0

On trouve ainsi la racine principale ; les autres s'obtiennent comme au 1°. Le choix de la racine principale est déterminé ici par le fait qu'elle est toujours d'accord, sans ambiguïté, avec les trois règles préliminaires, au moment où b s'annule, ce qui n'est vrai pour aucune autre racine du 2°, ni pour aucune racine non comprise dans le 2° (il y a des exceptions, dans ce dernier cas, pour m doublement pair, parce qu'alors la règle relative aux racines de $-a$ n'existe pas).

Si l'on considère le cas où $m = 2$, et si l'on reprend la formule des traités élémentaires pour ce cas :

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm \sqrt{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}},$$

où l'on doit prendre le signe —, au second membre, quand b est négatif, on voit qu'elle est en désaccord avec notre 2° quand $a < 0$ et $b < 0$, et en désaccord avec notre 1° dans ce même cas et en outre quand $a > 0$, $b < 0$.

Ces trois solutions, pour $\sqrt{a + b\sqrt{-1}}$, sont les trois seules qui ne renferment, dans toute l'étendue possible des valeurs de a et de b, qu'une seule discontinuité. Quelle que soit la solution que l'on adopte, il n'y a jamais *erreur formelle*, puisque le choix d'une racine *principale* a quelque chose d'arbitraire.

SUR LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE.

Lettre à M. le Professeur Mansion.

Mon cher Collègue,

Tout en vous remerciant de votre appréciation bienveillante de mon *Cours de Méthodologie mathématique*(*), je désire répondre brièvement aux objections que vous opposez au paragraphe que je consacre à la Métagéométrie. Je crois ne pouvoir mieux faire, pour mettre vos lecteurs à même de porter un jugement sur les points où nous sommes en désaccord, que de rappeler succinctement mes idées sur la géométrie non euclidienne.

Les géomètres euclidiens acceptent, au moins pour la plupart, les notions de droite et de plan comme des notions premières qu'on ne peut ramener à d'autres plus simples, et ils admettent sans démonstration le postulat de la parallèle unique ou tout autre qui lui soit équivalent.

On ne saurait conclure de là que la géométrie euclidienne manque de rigueur ou de certitude ; car il est évident, et tout le monde admet, qu'il faut prendre comme points de départ certaines choses qu'on ne peut pas définir et certaines propositions qu'il est impossible de démontrer. On n'a, en définitive, d'autre criterium pour juger de la rigueur des propositions qui font l'objet des mathématiques, que ce sentiment clair de la vérité que les définitions et les démonstrations éveillent en nous,

---

(*) Voir : *Mathesis*, décembre 1895, p. 269 à 272.

et sous ce rapport la certitude des propositions de la géométrie euclidienne est complète dès que les points de départ sont admis.

Mais il y a lieu de se demander si les notions de droite et de plan ne peuvent être ramenées à d'autres plus simples, et si certains axiomes ne doivent pas être rejetés.

En ce qui concerne le premier point, Monsieur le général De Tilly, dont vous avez adopté les idées, a cru pouvoir ramener les notions de droite et de plan à la notion de distance, en se fondant sur certaines formules algébriques(*). Il s'appuie pour cela sur les relations analytiques qui existent, dans un système de points distribués d'une manière quelconque dans l'espace, entre les distances de ces points considérés deux à deux.

Mais pour être autorisé à faire usage de semblables équations, il faut concevoir la possibilité d'exprimer les distances en nombres et on ne voit pas comment cela se pourrait quand on écarte la notion de ligne droite.

Pour le géomètre euclidien, les distances sont des longueurs qu'il peut additionner en les portant à la suite les unes des autres, sans interruption, sur une droite indéfinie. Il peut aussi subdiviser les distances et par conséquent les mesurer et les représenter par des nombres; mais cela est impossible quand on ne connaît pas la ligne suivant laquelle les distances augmentent.

Aussi M. De Tilly veut-il, après avoir défini analytiquement la ligne droite, démontrer que c'est sur cette ligne que les distances s'ajoutent, et pour faire cette démonstration il a recours à une intégration; mais son intégration est une addition de distances élémentaires, et cette opération ne peut avoir aucune signification quand on ne sait pas comment il faut placer les éléments les uns à la suite des autres pour les additionner; ce qui est ici le cas, puisque la manière d'additionner les distances est précisément ce que l'on cherche. La notion de distance est donc plus complexe que la notion de ligne droite et ne devient claire que quand celle-ci est admise.

Il suit de là que M. De Tilly fait usage d'équations dans lesquelles les

---

(*) De Tilly, *Essai de Géométrie analytique générale*, extrait du tome XLVII des Mém. cour. et autres de l'Acad. roy. de Belgique, 1892 (ou supplément à *Mathesis*, 1893).

symboles qui représentent les distances n'ont aucune signification précise ; dès lors ces équations elles-mêmes sont vides de sens.

L'axiome de la distance sur lequel M. De Tilly a voulu fonder la géométrie est donc très vague. Suivant une expression empruntée à un ouvrage de haute valeur (*) il flotte dans l'air, et tel qu'il est présenté il est impossible d'en tirer aucune conclusion.

En ce qui concerne les postulats, on admet en géométrie euclidienne le postulat de la parallèle unique et celui de la possibilité d'une augmentation indéfinie de la distance. Si l'on rejette le premier, on trouve le système de géométrie de Lobatchewski ; si l'on rejette le second, le système de Riemann ; et selon vous, si l'on demande au mathématicien laquelle des trois géométries idéales, toutes les trois absolument rigoureuses, est réalisée dans la nature, il doit répondre : Je n'en sais rien (**). Quant à moi, je crois plutôt qu'il devrait dire : La question est mal posée. Elle se comprendrait si la nature s'était plu à tracer sur des systèmes matériels des figures géométriques, offrant des lignes susceptibles d'être indéfiniment prolongées, que nous considérerions comme droites, et s'il nous fallait vérifier à quel système de géométrie appartiendraient ces droites ; mais il ne s'agit évidemment pas de cela. A ce point de vue, on doit dire qu'aucun des trois systèmes de géométrie n'est réalisé dans la nature.

Ce que l'on peut se demander, c'est quel est celui des trois systèmes *également possibles analytiquement*, auquel correspondent des figures réelles. A cette question il faudrait répondre : C'est le système euclidien, ce qui pourrait encore s'exprimer en disant que l'espace dans lequel nous vivons est euclidien.

En effet, quiconque a étudié la géométrie élémentaire se fait une idée très nette, très précise, de toutes les figures qu'on envisage dans cette science et comprend qu'il serait possible qu'elles fussent réalisées. Nous voyons clairement, à la lumière de notre intelligence, quelle en serait la forme si elles étaient exécutées matériellement.

(*) *Theorie der Transformationsgruppen*, dritter und letzter Abschnitt, unter Mitwirkung von Prof. Dr. Friedrich Engel, bearbeitet von Sophus Lie. Leipzig, Teubner, 1893, p. 526.

(**) *Principes fondamentaux de la géométrie non euclidienne de Riemann*, par P. Mansion; appendice III, sur la portée philosophique de la Métagéométrie.

On peut aussi se faire une idée très claire des plans lobatchewskiens avec leurs droites sécantes ou non sécantes et avec leurs triangles dont la somme des angles est moindre que deux droits; car on sait que cette planimétrie revient à la théorie des surfaces pseudosphériques et de leurs lignes géodésiques. Ces figures peuvent donc aussi être considérées comme ayant une existence réelle. Mais on ne l'a appris que par les travaux de M. Beltrami. Cela est si vrai qu'avant la belle découverte de cet illustre géomètre, la géométrie de Lobatchewski a porté le nom de géométrie imaginaire, tandis que nous savons aujourd'hui qu'il s'agit de figures réelles qu'on pourrait construire à l'aide des principes de la géométrie euclidienne.

Des considérations analogues s'appliquent aux plans riemanniens avec leurs droites qui se coupent en deux points opposés et leurs triangles dont la somme des angles surpasse deux droits; ce sont aussi des figures réelles de la géométrie euclidienne, puisqu'elles ne sont autre chose que des sphères avec leurs grands cercles et leurs triangles sphériques.

Les figures non euclidiennes à deux dimensions ont donc une existence réelle; mais aussi elles appartiennent à la géométrie euclidienne et on y considère improprement comme des droites et des plans, des lignes et des surfaces qui, en réalité, sont courbes.

Les choses se passent autrement quand il s'agit de figures non euclidiennes à trois ou à un plus grand nombre de dimensions. On se trouve alors en présence de théories, importantes sans doute, surtout au point de vue de l'analyse, mais où l'on emploie, par extension, une terminologie qu'il n'est pas permis de prendre à la lettre. M. Beltrami n'a pas réussi à trouver l'interprétation de la stéréométrie non euclidienne et, sans affirmer qu'il serait impossible de la trouver, il a fait voir cependant qu'il est très peu probable qu'on la trouve.

L'expérience ne donne pas, dites-vous, aux notions de la ligne droite et du plan la précision nécessaire pour qu'on puisse établir la théorie des parallèles sans postulat. Cela est incontestable; mais il est non moins certain qu'on ne saurait établir sans postulat aucun système de géométrie. La question est de choisir ceux qui se présentent à nous avec une entière évidence. Or, l'admission d'une stéréométrie non euclidienne donne prise à des objections qui me semblent irréfutables.

J'ai fait allusion, dans mon *Cours de Méthodologie mathématique*, à ces difficultés que je rappellerai ici sous une forme un peu plus générale :

En géométrie euclidienne, les plans qu'il est possible de concevoir dans l'espace se coupent deux à deux suivant des droites, à moins qu'ils ne soient parallèles. En géométrie non euclidienne, ces plans devraient être des surfaces sphériques ou pseudosphériques se coupant deux à deux suivant des lignes géodésiques, parfois rejetées à l'infini. Dans le système de RIEMANN on se heurterait donc à cette impossibilité de sphères se coupant toutes, deux à deux, suivant des grands cercles ; et dans le système de LOBATCHEWSKI on aurait des surfaces pseudosphériques se coupant toutes, deux à deux, suivant des lignes géodésiques, ce qui est aussi contradictoire, puisque si l'on considère deux surfaces pseudosphériques ayant même axe de révolution, elles se coupent suivant un parallèle et non suivant une ligne géodésique.

Vous me répondez que ce n'est pas ainsi que les choses doivent être entendues et que les géomètres non euclidiens prennent cette phrase : *Le plan riemannien est une sphère euclidienne*, dans un autre sens que les euclidiens ; mais alors je demande que vous me disiez comment il faut l'entendre et que vous m'indiquiez un moyen de concevoir, *à priori*, les droites et les plans non euclidiens aussi nettement que les euclidiens comprennent, sans démonstration, ce que c'est qu'une droite et un plan ; car on ne saurait nier que cette conception leur est familière ; c'est ainsi que les artistes qui construisent des miroirs plans pour les instruments d'astronomie connaissent parfaitement les procédés qu'ils doivent mettre en pratique pour réussir. Ils n'ignorent pas qu'ils ne peuvent atteindre à la perfection ; mais la crainte qu'ils ne puissent fatalement produire que des plans non euclidiens serait chimérique. Avant de révoquer en doute la géométrie euclidienne et d'accorder aux deux autres systèmes de géométrie la même valeur, j'attendrai donc que vous m'indiquiez un moyen de me représenter, *à priori*, des droites qui se coupent en deux points opposés, aussi nettement que je me représente la droite, le plan et toutes les figures euclidiennes qui s'en déduisent, y compris certaines figures de la géométrie non euclidienne.

Subsidiairement, je vous ferai remarquer que quand vous dites : « Nos sensations sont d'accord aussi bien avec une géométrie non « euclidienne de paramètre très grand qu'avec la géométrie eucli- « dienne », vous semblez reconnaître que c'est bien avec la géométrie euclidienne que nos sensations sont d'accord ; car cela revient à dire que pour mettre nos sensations d'accord avec la géométrie rieman-

nienne, par exemple, nous devrions regarder le plan riemannien comme une sphère d'un rayon si grand que nous pourrions commettre l'erreur de la confondre avec un plan ; ou encore, que neus ne saurions nous figurer un système de plans riemanniens qu'à la condition de les faire ressembler tellement à un système de plans euclidiens, que la différence deviendrait insensible pour nous.

En résumé, voici mes conclusions :

1° Aucun des trois systèmes de géométrie n'est réalisé dans la nature, ceci étant entendu dans le sens expliqué plus haut.

2° Les figures euclidiennes à deux et à trois dimensions sont des figures idéales, mais réelles ; c'est-à-dire qu'on peut les concevoir réalisées dans des systèmes matériels.

3° Les figures non euclidiennes à deux dimensions sont aussi des figures réelles ; on peut les construire en se fondant sur les principes de la géométrie euclidienne.

4° L'impossibilité des figures non euclidiennes à trois dimensions est, sinon rigoureusement démontrée, au moins à peu près certaine ; et si l'on découvrait qu'il existe de telles figures, on ne pourrait les comprendre, les dessiner, les construire, qu'en se fondant sur les principes de la géométrie euclidienne, qui resterait toujours ainsi la vraie géométrie.

Il n'est pas probable que l'un de nous parvienne à convaincre l'autre, puisque nous nous sommes l'un et l'autre fait une conviction après une étude attentive de la question. Mais si je désirais exposer ici ma manière de voir, c'est que j'attache une certaine importance à mes conclusions, parce que j'estime qu'il serait dangereux de laisser croire que les principes sur lesquels doit nécessairement reposer tout enseignement élémentaire de la géométrie sont d'une vérité douteuse. Il convient de dire franchement que l'on s'appuie sur certains postulats ou vérités expérimentales ; mais ce n'en sont pas moins des vérités, qu'on ne doit pas présenter avec des commentaires qui seraient de nature à les obscurcir.

Agréez, je vous prie, l'expression des sentiments de haute estime de

Votre dévoué collègue,

DAUGE.

NOTE. Nous espérons publier, en 1896, en supplément à *Mathesis*, un exposé des premiers principes de la géométrie non euclidienne, où,

explicitement, nous ne recourrons pas plus à la notion de distance que ne le fait Euclide ou Legendre.

Voici, dès à présent, notre réponse à la question posée plus haut (p. 11) par M. Dauge. *La droite et le plan des géomètres non euclidiens ce sont la droite et le plan tels qu'ils sont définis par Euclide ou Legendre.* Un fil tendu nous donne l'*image* de la droite ; la surface d'une eau tranquille nous donne l'*image* d'un plan.

Les géomètres non euclidiens partent des mêmes définitions, axiomes et postulats que les géomètres euclidiens, *à part un postulat* (*le* 5^me^ ou *le* 6^me^ *postulat d'Euclide*) *que les euclidiens admettent* EN PLUS. Ils l'admettent d'ailleurs sans aucune nécessité logique, puisque, avec un postulat de moins, l'on peut faire deux systèmes complets de géométrie, autres que la géométrie euclidienne : la géométrie lobatchefskienne, si l'on rejette le 5^me^ postulat d'Euclide, la géométrie riemannienne, si l'on rejette le 6^me^(*). Dans ses nombreux écrits, par exemple, dans sa *Pangéométrie*, Lobatchefsky a donné un exposé du premier aussi bien dans l'espace que dans le plan ; M. De Tilly les a fait connaître tous deux dans son *Essai* de 1878, aussi pour le plan et pour l'espace. Le premier système a été appelé *imaginaire* un instant, probablement parce que la géométrie physique ou *réelle* semble être très approximativement la géométrie euclidienne.

Ce sont les géomètres euclidiens qui attribuent aux géomètres non euclidiens les notions suivantes, inexactes et conduisant bien vite à l'absurde comme le montre très bien M. Dauge : « le plan, en géométrie « lobatchefskienne, est identique à une pseudosphère euclidienne ; en « géométrie riemannienne, à une sphère euclidienne ». Le plan non euclidien contient des droites dans tous les sens ; il n'a pas de ligne singulière, comme la pseudosphère, ni de centre unique, comme la sphère. Il n'est donc identique ni à l'une ni à l'autre. Mais les figures rectilignes tracées dans le plan non euclidien (comme d'ailleurs celles du plan euclidien) ont beaucoup de propriétés communes avec les figures formées par des géodésiques sur la pseudosphère ou la sphère. (P. M.).

(*) On ne peut pas les rejeter tous les deux : Quand on rejette le 6^me^ postulat, le 5^me^ est un théorème que l'on peut démontrer comme conséquence des propositions antérieures ; par suite, inversement, le rejet du 5^me^ implique l'admission du 6^me^.

SUR LES TRIANGLES ÉQUILATÉRAUX INSCRITS A UNE CONIQUE,

par M. E.-N. Barisien.

1. Soit ABC un triangle équilatéral inscrit à l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0. \tag{1}$$

Prenons l'équation du cercle circonscrit sous la forme

$$x^2 + y^2 - 2Ax - 2By + C = 0. \tag{2}$$

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées des points A, B, C, et (x_0, y_0) celles du quatrième point P où se coupent les deux courbes. On trouve facilement, après avoir éliminé x ou y entre (1) et (2) :

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = \frac{4Aa^2}{c^2}, \quad y_0 + y_1 + y_2 + y_3 = -\frac{4Bb^2}{c^2}. \tag{3}$$

Le triangle étant équilatéral, le centre ω (A, B) de la circonférence circonscrite coïncide avec le centre de gravité, de sorte que

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3A, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 3B. \tag{4}$$

De (3) et (4) on conclut

$$x_0 = \frac{A(a^2 + 3b^2)}{c^2}, \quad y_0 = -\frac{B(b^2 + 3a^2)}{c^2}, \tag{5}$$

$$A = \frac{c^2x_0}{a^2 + 3b^2}, \quad B = -\frac{c^2y_0}{b^2 + 3a^2}. \tag{6}$$

Le rayon R de la circonférence ABC est donné par

$$R^2 = (x_0 - A)^2 + (y_0 - B)^2 = \frac{16b^4x_0^2}{(a^2 + 3b^2)^2} + \frac{16a^4y_0^2}{(3a^2 + b^2)^2}.$$

On voit qu'à chaque point P de l'ellipse correspond un triangle équilatéral ABC.

2. *Le centre du triangle ABC parcourt l'ellipse*

$$b^2(a^2 + 3b^2)^2X^2 + a^2(3a^2 + b^2)^2Y^2 = a^2b^2c^4. \tag{8}$$

3. *La seconde extrémité du diamètre issu du sommet ABC parcourt l'ellipse*

$$\frac{b^2X^2(a^2 + 3b^2)^2}{(a^2 - 3b^2)^2} + \frac{a^2Y^2(3a^2 + b^2)^2}{(3a^2 - b^2)^2} = c^2b^2.$$

car les coordonnées de ce point sont

$$x = 2A - x_0 = \frac{x_0(a^2 - 5b^2)}{a^2 + 3b^2}, \quad y = \frac{y_0(b^2 - 5a^2)}{3a^2 + b^2}.$$

Si $a = b\sqrt{5}$, le lieu se réduit au petit axe de l'ellipse.

4. Cherchons le maximum ou le minimum du triangle ABC. En posant $x_0 = a\cos\varphi$, $y_0 = b\sin\varphi$, on obtient

$$R^2 = 16a^2b^2\left[\frac{b^2\cos^2\varphi}{(a^2 + 3b^2)^2} + \frac{a^2\sin^2\varphi}{(3a^2 + b^2)^2}\right].$$

Le maximum et le minimum de R, et par suite ceux de AB, correspondent respectivement à $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = 0$ et ont pour expressions

$$\frac{4a^2b}{3a^2 + b^2}, \quad \frac{4ab^2}{a^2 + 3b^2}.$$

5. *Le lieu des centres des triangles équilatéraux inscrits à une hyperbole équilatère est l'hyperbole elle-même.*

Cela résulte de ce que la courbe passe par l'orthocentre d'un triangle inscrit, et aussi de l'équation (8) où l'on fait $a^2 = -b^2$.

On trouve aussi, dans ce cas

$$A = -x_0, \quad B = -y_0;$$

ce qui donne ce théorème connu :

Si P, P′ *sont les extrémités d'un diamètre d'une hyperbole équilatère, le cercle de centre* P *et de rayon* PP′ *rencontre l'hyperbole en trois autres points* A, B, C *qui sont les sommets d'un triangle équilatéral* (*).

SUR LA PODAIRE DE L'ELLIPSE;

par M. Jeřabek.

1. Soient E et F les foyers, O le centre et S le cercle principal d'une ellipse ε.

On sait que la circonférence S est la podaire de chacun des foyers.

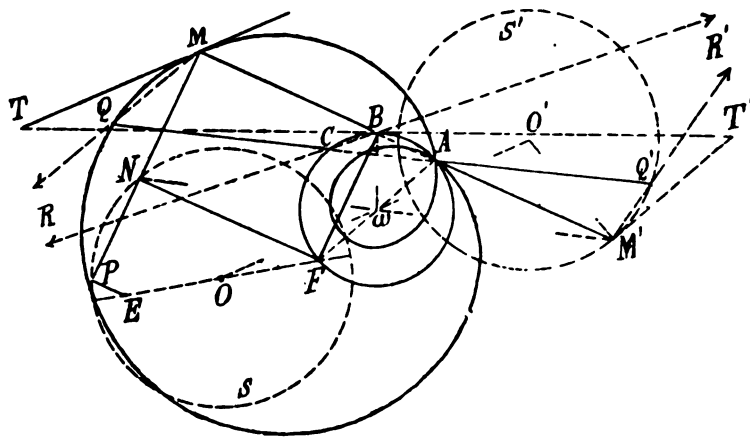
(*) Questions 1507 et 1641 (N. A. M., 1885, 382 et 1892, 46*). Voir aussi un Mémoire de M. H. Brocard sur la trisection de l'angle (Alger, 1874).

Pour les triangles équilatéraux circonscrits, voir N. A. M., quest. 541, 1894, 45*.

Donc si l'on mène les droites parallèles EP, FN qui coupent S en P et N, la droite PN sera tangente à ε.

Considérons maintenant la podaire d'un point quelconque A. Projetons A en M sur NP, et F en B sur AM; M est un point de la podaire de A, et le point B appartient à la circonférence (ω) décrite sur AF comme diamètre. Prolongeons MA de AM' = MB = NF. Le point M' a pour lieu géométrique la circonférence S' symétrique de S par rapport au milieu ω de FA. On en conclut cette génération de la podaire qui rappelle celle de la cissoïde :

Par un point fixe A *d'une circonférence* (ω), *on mène une sécante quelconque qui coupe cette courbe et une seconde circonférence donnée* S' *aux*



points B *et* M', *et l'on porte sur* AB *une longueur* AM = M'B. *Le point* M *décrit une podaire de conique.*

Lorsqu'on substitue à ε une parabole, les cercles S et S' sont remplacés par des droites, et l'on retrouve la podaire de la parabole comme cissoïde générale.

3. La tangente à la podaire se déduit facilement de ce qui précède. En effet, si l'on mène par A une seconde sécante qui coupe les cercles (ω) et S' en C et Q', et qu'on porte sur AC la longueur AQ = Q'C, Q est encore un point de la podaire. Or les deux droites MQ, M'Q' sont des transversales réciproques du triangle ABC; elles rencontrent donc le

côté BC en deux points isotomiques R, R'. Passons à la limite : Les tangentes en M à la podaire et la tangente en M' au cercle O' rencontreront la tangente en B au cercle (ω) en deux points T, T' symétriques par rapport à B.

BIBLIOGRAPHIE.

Exercices méthodiques de Calcul Intégral, par Ed. Brahy, docteur en sciences physiques et mathématiques, etc. Bruxelles, Hayez, éditeur, 1895. (Vol. in-8 de 301 p.). Prix : 5 frs.

Ce livre est le complément nécessaire d'un autre ouvrage du même auteur, publié, il y a déjà un assez grand nombre d'années, sous le titre : *Exercices méthodiques de calcul différentiel.*

Tout le monde reconnaît que dans l'enseignement des sciences il convient de faire marcher de front la théorie et les applications, aussi bien dans les parties élevées des mathématiques que dans les parties élémentaires. Si cette pratique est nécessaire dans le calcul différentiel, elle devient surtout indispensable dans le calcul intégral. En effet, la recherche de l'intégrale d'une différentielle donnée est loin de se faire d'après des règles sûres et précises comme la différentiation ; elle ne consiste guère qu'en des tâtonnements que *l'habitude* surtout enseigne à diriger convenablement. Par un grand nombre d'exemples, M. Brahy met en relief les idées principales que l'on peut suivre pour arriver au but. Ainsi, lorsqu'il s'agit de l'intégration immédiate, il s'attache à faire remarquer que s'il est rare qu'une expression différentielle rentre immédiatement dans l'un des types simples dont il donne le tableau ; on peut souvent y démêler l'une de ces formes en faisant porter l'intégration non pas sur x, mais sur une fonction de x, en introduisant, s'il le faut, des facteurs constants qui complètent un type intégrable.

L'Auteur traite un grand nombre de questions avec tout le développement qu'elles comportent : ce sont les exemples ; puis, pour permettre aux élèves d'essayer leurs forces, il en propose d'autres dont la solution seule est indiquée : ce sont les exercices. Il en est ainsi dans chacun des XVIII chapitres dont se compose l'ouvrage. Chacun d'eux commence par un exposé succinct de la théorie qu'il s'agit d'appliquer ; viennent ensuite les exemples, puis les exercices.

Les six premiers chapitres sont consacrés à l'intégration immédiate, à l'intégration par substitution, par parties, par décomposition ; à l'intégration des fractions rationnelles et des expressions irrationnelles, surtout celles du second degré, qui se rencontrent le plus fréquemment ; aux intégrales définies, etc. Les quatre suivants se rapportent aux quadratures, aux cubatures, etc. On y emploie parfois les coordonnées rectangulaires, d'autrefois les coordonnées polaires, qui abrègent souvent les calculs. Tous ces exemples ou exercices sont bien choisis et quelques-uns d'entre eux sont très curieux.

Les chapitres qui suivent sont relatifs à l'intégration des fonctions de plusieurs variables indépendantes; à l'intégration des équations différentielles du premier ordre; à l'intégration des équations différentielles linéaires d'un ordre supérieur au premier à coefficients constants ou à coefficients variables; enfin à l'intégration par séries et l'intégration des équations aux dérivées partielles.

Cette collection d'exercices forme une mine très riche à exploiter et ceux qui l'épuiseront pourront se flatter de savoir intégrer

Pour terminer nous rappellerons (comme nous l'apprend l'éditeur) ce que disait du manuscrit de l'ouvrage, un critique des plus rigoureux, Eugène Catalan, dont la science déplore la mort récente : « Le livre est fort bien fait et pourra rendre de grands services. » (J. M.)

Annuaire pour l'an 1896, publié par le Bureau des longitudes, Paris, Gauthier-Villars et fils, 1896 (in-18 de IV-894 pages avec 2 cartes magnétiques). Prix : 1 fr. 50.

L'Annuaire pour 1896 renferme une foule de renseignements pratiques réunis dans ce petit volume pour la commodité des travailleurs, On y trouve également des articles dus aux savants les plus illustres sur les Monnaies, la Statistique, la Géographie, la Minéralogie, etc., enfin les Notions suivantes : *Les Forces à distance et les ondulations*, par M. A. CORNU. — *Les Travaux de Fresnel en Optique*, par M. A. CORNU. — *Sur la construction des nouvelles Cartes magnétiques du Globe*, entreprises sous la direction du Bureau des Longitudes, par M. DE BERNARDIÈRES. *Sur une troisième ascension à l'observatoire du sommet du mont Blanc et les travaux exécutés pendant l'été de 1895 dans le massif de cette montagne*, par M. J. JANSSEN. — *Notice sur la vie et les travaux de contre-amiral Fleuriais*, par M. DE BERNARDIÈRES. — *Allocutions prononcées aux funérailles de M. E. Brunner*, par MM. J. JANSSEN et F. TISSERAND.

NOTES EXTRAITES DE LA CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE.

(*Suite*, voir (2), V pages 138 et 195).

7. *Problème de géométrie solide.* Dans le tome II, pp. 211-215, Hachette publie une notice historique sur le problème suivant :

Connaissant, dans une pyramide triangulaire DABC, *la base* ABC *et les angles* BDC $= \alpha$, CDA $= \beta$, ADB $= \gamma$, *construire le sommet* D ; autrement dit, *couper un trièdre donné* D *par un plan de manière que la section* ABC *soit semblable à un triangle donné.*

Nous allons résumer cette notice.

Dans le tome II des *Savants étrangers*, Académie de Paris, année 1754, Estève, de la Société royale des sciences de Montpellier, met le

problème en équation en prenant pour inconnues les angles DAB $= x$, DAC $= y$, DBC $= z$; il n'achève la solution que dans le cas où $y = z$ et trouve alors une équation bicarrée en $\sin y$.

Lagrange (*Mémoires de l'Ac. de Berlin*, 1773) prend pour inconnues les longueurs des arêtes DA $= X$, DB $= Y$, DC $= Z$; les équations du problème sont alors

$$a^2 = Y^2 + Z^2 - 2YZ\cos\alpha, \quad b^2 = \cdots, \quad c^2 = \cdots,$$

et l'équation finale en X est du 8e degré.

En 1795, Lagrange traite cette question plus spécialement dans ses leçons aux écoles normales et fait observer qu'en prenant pour inconnues X, $\frac{X}{Y}$, $\frac{X}{Z}$, on arrive à une équation finale du 4e degré. Les calculs ont été développés dans ce sens par Hachette dans le tome II de la *Correspondance sur l'École Polytechnique*.

Monge, dans ses leçons aux Écoles normales, traite le problème par la géométrie descriptive; il détermine D par l'intersection des tores engendrés par les segments capables des angles α, β, γ décrits sur BC, CA, AB et tournant autour de ces droites. Il indique l'existence de 64 solutions, mais cette erreur a été corrigée dans l'édition de sa Géométrie descriptive, de 1811.

On peut encore consulter sur ce problème la Géométrie descriptive de Hachette, édition de 1822.

8. *Problème de Bruno.* Le problème précédent est un cas particulier d'une question proposée et résolue synthétiquement par Bruno, de Naples, dans un opuscule de 20 pages ayant pour titre : *Solusione geometrica di un difficile problema di sito.* Voici l'énoncé de cette question :

Etant donnés un point A *et deux droites b, c dans l'espace, trouver sur b un point* B *et sur c un point* C, *tels que le triangle* ABC *soit semblable à un triangle donné* $\alpha\beta\gamma$.

La CGQ a publié de ce problème une solution géométrique et une solution analytique dues à Quetelet (t. II, pp. 145 et 215) et une due à Hachette (t. II, p. 142); ces solutions ont paru *in extenso* dans les *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, t. IV, avec un résumé de celle de Bruno.

Voici comment Quetelet traite la question. Prenons sur b un point quelconque B′ et construisons dans le plan Ab le triangle AB′C′ sem-

blable à $\alpha\beta\gamma$; soit D′ la projection de C′ sur AB′. Si l'on fait tourner le triangle AB′C′ autour de AB′, le point C′ engendre une circonférence Γ′ ayant pour centre D′ et située dans un plan perpendiculaire à AB′. Lorsque B′ parcourt la droite b, la circonférence Γ′ engendre une surface du 4e ordre Σ, qui est le lieu du sommet d'un triangle semblable à $\alpha\beta\gamma$ et ayant pour base une droite quelconque allant de A vers b. Le point cherché est à l'intersection de c avec Σ; on cherchera donc la courbe suivant laquelle un plan mené par c coupe Σ ou le lieu des points d'intersection de ce plan avec le cercle variable Γ′. Pour faciliter la construction de plusieurs positions de Γ′, on observe que D′ décrit une parallèle à b et que C′ parcourt une droite dans le plan Ab.

Voici une solution analytique peu différente de celle de Hachette. Par A et la plus courte distance DE des droites b et c faisons passer un plan P; soient b_1 et c_1 les projections de b et c sur P, B_1 et C_1 les projections de A sur b_1 et c_1, B_2 et C_2 celles de B et C sur b_1 et c_1. Les données de la question sont

$$DB_1 = EC_1 = a,\ AB_1 = f,\ AC_1 = f',\ \text{angle}\,(b_1 b) = \delta,\ \text{angle}\,(c_1 c) = \delta',$$

et nous prendrons pour inconnues les distances $DB = x$, $EC = y$. Les triangles rectangles AB_1B, AC_1C et le trapèze birectangle BCC_2B_2 donnent

$$AB^2 = f^2 + \overline{BB_1}^2 = f^2 + a^2 + x^2 - 2ax\cos\delta,$$

$$AC^2 = f'^2 + \overline{CC_1}^2 = f'^2 + a^2 + y^2 - 2ay\cos\delta',$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{B_2C_2}^2 + (BB_2 - CC_2)^2 = (f - f')^2 + (x\cos\delta - y\cos\delta')^2 + (x\sin\delta - y\sin\delta')^2$$

$$(f - f')^2 + x^2 + y^2 - 2xy\cos(\delta - \delta').$$

En exprimant que les rapports AB : AC, AB : BC sont connus, on obtient deux équations en x et y, que l'on peut interpréter comme représentant deux hyperboles dont les points d'intersection ont pour coordonnées les valeurs cherchées de x et y.

Pour la solution de Bruno, nous renvoyons aux *Nouveaux Mémoires de l'Ac. de Bruxelles*.

Si l'on suppose que les droites b et c se coupent ou sont parallèles, on tombe sur le problème de la note 7 ou sur celui de la section d'un prisme triangulaire. (*A continuer*).

SUR LE CAS GÉNÉRAL DE LA DIVISION DES NOMBRES ENTIERS,

par M. M. Stuyvaert, professeur à l'Athénée de Gand.

La démonstration relative à ce cas comporte les trois points suivants : 1° détermination de l'ordre du 1er chiffre du quotient; 2° détermination de ce premier chiffre; 3° détermination des chiffres suivants.

Le 2° est le point délicat; il est traité de façons très diverses. L'excellent livre de M. Gelin en donne une démonstration rigoureuse, et peut-être celle qui fait le mieux voir la raison des choses. Son raisonnement se trouve répété, identiquement au fond, mais sous une forme un peu différente dans le théorème qui suit le cas général. Voici ce théorème : Pour diviser un nombre par un produit de deux facteurs, on peut le diviser par un de ces facteurs, puis diviser la partie entière du quotient par le second facteur. Ainsi si $N = a \cdot q + r$ et si $q = b \cdot q' + r'$ la partie entière du quotient de N par ab est q' et le reste est $ar' + r$. Tout revient à prouver que $ar' + r < ab$, ce qui est très facile.

On peut, en plaçant ce théorème avant le cas général, simplifier la démonstration relative à celui-ci. Voici, dans cette méthode, l'ordre des propositions :

1° Lemme. Pour diviser un nombre par 10, 100, ... on sépare sur la droite autant de chiffres qu'il y a de zéros au diviseur; la partie à gauche est le quotient, celle à droite est le reste.

2° Le théorème énoncé ci-dessus.

3° Corollaires. I. On obtient le même quotient entier en divisant N par a puis le quotient par b, qu'en divisant N par b puis le quotient par a.

II. Si le diviseur est terminé par des zéros on peut les supprimer et barrer autant de chiffres à la droite du dividende, sans altérer le quotient.

4° Cas de la division où le quotient n'a qu'un chiffre.

5° Cas général. Soit 75854 à diviser par 87. On traite le premier point comme d'habitude : le premier chiffre du quotient exprime des centaines.

Deuxième point. En divisant 75854 par 87, puis le quotient par 100, on obtient, d'après le lemme, le chiffre des centaines du quotient, mais,

d'après le corollaire I, on trouve le même résultat en divisant 75854 d'abord par 100, puis le quotient entier 758 par 87 ; etc.

Troisième point : comme d'ordinaire.

Remarque. Dans la préface de l'Arithmétique de Humbert, M. Tannery signale l'avantage qu'il y a à exposer les propositions résultant de la définition des opérations fondamentales avant la théorie de ces opérations (Voir *Mathesis*, 1893, p. 196).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 935.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 104).

Démontrer l'intégrale

$$\int_0^a \sqrt{b^2 - 2x^2 + \sqrt{4(a^2 - b^2)x^2 + b^4}}\, dx = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}(a^2 + b^2). \quad (1)$$

(E. N. Barisien.)

Solution par M. E. Fauquembergue. Cette intégrale représente l'aire comprise entre les axes de coordonnées et la courbe (on suppose $a > b$)

$$y = \sqrt{b^2 - 2x^2 + \sqrt{4(a^2 - b^2)x^2 + b^4}}$$

ou

$$(y^2 + 2x^2)^2 = 4a^2x^2 + 2b^2y^2,$$

équation qui, transformée en coordonnées polaires, devient

$$\rho^2 = \frac{4a^2\cos^2\theta + 2b^2\sin^2\theta}{(\sin^2\theta + 2\cos^2\theta)^2}.$$

On est ainsi ramené à l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}{(\sin^2\theta + 2\cos^2\theta)^2}\, d\theta \quad (2)$$

ou encore

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a^2 + b^2 + (b^2 - 2a^2)\cos 2\theta}{(3 + \cos 2\theta)^2}\, d\theta.$$

Or la méthode d'intégration par réductions successives donne

$$\int \frac{dx}{(m+n\cos x)^2} = \frac{1}{m^2-n^2}\left\{\frac{n\sin x}{m+n\cos x} + \frac{2m}{(m^2-n^2)^{\frac{1}{2}}}\operatorname{arc\,tang}\left[\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{tang}\frac{x}{2}\right]\right\},$$

$$\int \frac{\cos x\,dx}{(m+n\cos x)^2} = \frac{1}{m^2-n^2}\left\{\frac{n\sin x}{m+n\cos x} - \frac{2n}{(m^2-n^2)^{\frac{1}{2}}}\operatorname{arc\,tang}\left[\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{tang}\frac{x}{2}\right]\right\}.$$

En appliquant ces résultats à l'intégrale précédente, entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$, on trouve bien

$$\frac{\pi}{4\sqrt{2}}(a^2+b^2).$$

NOTE. M. J. JONESCO arrive plus rapidement au même résultat, en remplaçant d'abord $x\sqrt{2}$ par x_1, puis passant aux coordonnées polaires.

Solution analogue par M. CRISTESCU. M. HACKEN cherche l'intégrale (2) en posant $\operatorname{tg}\theta = z$.

M. FAIRON, par la substitution :

$$4(a^2-b^2)x^2 + b^4 = z^2,$$

ramène l'intégrale (1) à

$$\frac{1}{2\sqrt{2}(a^2-b^2)}\int_{b^2}^{2a^2-b^2}\frac{\sqrt{2a^2-b^2-z}}{\sqrt{z-b^2}}\,z\,dz$$

facile à obtenir par les procédés généraux. M. MANDART procède de même, sauf qu'il remplace z par z^2+b^2.

Question 940.

(Voir *Mathesis* (2), IV, p. 127).

A un triangle donné ABC *on circonscrit une ellipse ayant pour centre le centre de gravité du triangle. Démontrer : 1° que les rayons de courbure en* A, B, C *sont entre eux comme les cubes des côtés opposés* BC, CA, AB ; *2° que le produit de ces rayons est égal au cube du rayon de la circonférence* ABC.

Solution par M. J. JONESCO. Soient r_a, r_b, r_c les rayons de courbure en A, B, C ; R le rayon du cercle ABC. Considérons le cercle qui a pour projection l'ellipse en question, et soit A'B'C' le triangle qui a pour

projection le triangle ABC. A'B'C' sera un triangle équilatéral parce que ses médianes passent par le centre du cercle circonscrit. Appelons $2a$, $2b$ les axes de l'ellipse, et $2m$, $2n$, $2p$ les diamètres parallèles à BC, AB, BA. Les projections de deux droites parallèles étant proportionnelles aux longueurs de ces droites, on a

$$\frac{C'B'}{CB} = \frac{a}{m}, \quad \frac{A'C'}{AC} = \frac{a}{n}, \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{a}{p}.$$

Mais $A'C' = A'B' = B'C'$. Donc

$$\frac{CB}{m} = \frac{AC}{n} = \frac{AB}{p}.$$

On sait que

$$r_a = \frac{m^2}{ab}, \quad r_b = \frac{n^2}{ab}, \quad r_c = \frac{p^2}{ab}, \quad R = \frac{mnp}{ab}.$$

Donc

$$\frac{r_a}{m^2} = \frac{r_b}{n^2} = \frac{r_c}{p^2}, \quad \text{et} \quad r_a r_b r_c = \frac{m^2 n^2 p^2}{a^3 b^3} = R^3;$$

en remplaçant m, n, p par les quantités proportionnelles CB, AC, AB, on obtient

$$\frac{r_a}{BC^2} = \frac{r_b}{AC^2} = \frac{r_c}{AB^2}.$$

Solutions analogues par MM. Hacken, Déprez, Cristescu. M. Barisien établit d'abord la relation

$$\frac{r_a}{BC^2} = \frac{1}{3ab\sqrt{3}}.$$

A cet effet, après avoir désigné par x_1, y_1 les coordonnées de A, il représente le côté BC par

$$a^2 y y_1 + b^2 x x_1 + \frac{a^2 b^2}{2} = 0;$$

en éliminant alternativement x et y entre cette équation et celle de l'ellipse, il trouve les équations aux ordonnées et aux abscisses des points B et C, et en déduit

$$BC^2 = (x_2 + x_3)^2 + (y_2 + y_3)^2 - 4x_2x_3 - 4y_2y_3 = \frac{3}{a^2b^2}(a^2y_1^2 + b^2x_1^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Comme

$$r_a = \frac{(a^2y_1^2 + b^2x_1^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2b^2}, \quad S = \frac{3ab\sqrt{3}}{4},$$

on aura

$$r_a = \frac{1}{3ab\sqrt{3}} BC^2, \text{ etc.}$$

M. P. Bastin prend pour axes coordonnés la droite AC et la hauteur BB', et se sert de l'expression du rayon de courbure de la courbe $f(x, y) = 0$, sous la forme

$$\rho = \frac{(f'^2_x + f'^2_y)^{\frac{3}{2}}}{f''_{xx} f'^2_y - 2 f''_{xy} f'_x f'_y + f''_{yy} f'^2_x}.$$

Solution par M. Cl. Servais. Soient P et Q les points de rencontre de la tangente au point A, avec les tangentes aux points B et C. Si du point P on abaisse des perpendiculaires sur la droite AB et sur le diamètre passant par A, elles rencontrent la normale en A, aux points R et R_1, tels que RR_1 est égal au rayon de courbure ρ_A de la conique au point A (*). De même, à l'aide du point Q on obtiendrait un segment SS_1 de la normale, égal à ρ_A. On a

$$\rho_A = AR + R_1A, \quad \rho_A = AS + S_1A;$$

mais $R_1A = -S_1A$, donc

$$2\rho_A = AR + AS = BC\left(\frac{1}{\operatorname{tg} B} + \frac{1}{\operatorname{tg} C}\right), \quad \text{ou} \quad \rho_A = \frac{1}{2}\frac{BC \sin A}{\sin B \sin C}.$$

Par suite,

$$\rho_B = \frac{1}{2}\frac{AC \sin B}{\sin A \sin C}, \quad \rho_C = \frac{1}{2}\frac{AB \sin C}{\sin A \sin B};$$

$$\frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{BC \sin^2 A}{AC \sin^2 B} = \frac{\overline{BC}^3}{\overline{AC}^3}, \quad \rho_A \cdot \rho_B \cdot \rho_C = \frac{1}{8}\frac{BC}{\sin A} \cdot \frac{AC}{\sin B} \cdot \frac{AB}{\sin C} = R^3.$$

si R est le rayon de la circonférence ABC.

Le théorème 940, 1° se trouve dans un Mémoire de MM. de Longchamps et A. Demoulin (A. F., 1891). L'expression de ρ_A peut se déduire de la formule générale $\rho = (Rxyz : \alpha\beta\gamma)$ démontrée dans *Mathesis* (2), III, supplément de juin et p. 217; puis (2) IV, 133, en faisant intervenir les points diamétralement opposés à A, B, C, sur l'ellipse de Steiner. (J. N.).

×Question 943.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 128.)

Etant donnés deux faisceaux homographiques de quatre rayons, abcd et a'b'c'd', si une transversale coupe le premier suivant la ponctuelle ABCD, ***on peut toujours trouver deux transversales réelles qui coupent le second suivant une ponctuelle*** A'B'C'D' ***égale à*** ABCD. (Droz-Farny.)

(*) Ribaucour, N. A. M. (2), t. VII, 1868, p. 172. Nous avons démontré géométriquement ce théorème dans les *BB.* (3), t. XXIII, p. 258. (C. S.).

Solution par M. Cl. Servais. Les deux ponctuelles ABCD et A'B'C'D' étant semblables, les éléments à l'infini de ces ponctuelles sont correspondants. Donc si l'on mène dans le premier faisceau, un rayon p parallèle au support AB de la ponctuelle ABCD, le rayon correspondant p' dans le second, sera parallèle au support de la ponctuelle A'B'C'D'. Soient O et O' les sommets des faisceaux; menons une droite parallèle à p', et rencontrant les rayons du faisceau O'(A'B'C'D') aux points A'', B'', C'', D''. On a

$$\frac{AB}{A''B''} = \frac{AC}{A''C''} = \frac{AD}{A''D''} = k.$$

Le point A' est tel que

$$\frac{O'A'}{O'A''} = k.$$

Son symétrique par rapport au point O' correspond à une seconde solution.

On peut transporter le second faisceau de manière que les rayons a', b', c' passent respectivement par les points A, B, C: la nouvelle position du centre O' de ce faisceau se détermine par l'intersection des arcs des segments capables des angles $a'b'$, $b'c'$ construits sur AB, BC, etc. (J. N.)

Question 945.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 128.)

Le lieu des points tels que, si l'on mène les trois normales à une parabole, le cercle passant par les seconds points de rencontre des normales avec la parabole ait son centre sur l'axe de la parabole, est une parabole de même paramètre que la première. (E.-N. Barisien.)

Solution par MM. Bastin, Cristescu *et* Jean Jonesco. Soient α, β les coordonnées d'un point P d'où l'on mène à une parabole les trois normales PA, PB, PC, qui rencontrent la courbe une seconde fois en A', B', C'; désignons par (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées des points d'incidence A, B, C et par (x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), (x'_3, y'_3) celles des points A', B', C'. On sait que y_1, y_2, y_3 sont racines de

$$y^3 - 2p(\alpha - p)y - 2p^2\beta = 0,$$

de sorte que

$$\left.\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= 0, \\ y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 &= -2p(\alpha - p), \\ y_1y_2y_3 &= 2p^2\beta. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

La normale PA ayant pour équation

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1),$$

si l'on remplace x et x_1 par $\frac{y^2}{2p}$, $\frac{y_1^2}{2p}$, on obtient après simplification

$$1 = -\frac{y_1}{p}\frac{y + y_1}{2p};$$

de cette égalité on conclut l'ordonnée de A'. Par conséquent

$$y'_1 = -\left(y_1 + \frac{2p^2}{y_1}\right), \quad y'_2 = -\left(y_2 + \frac{2p^2}{y_2}\right), \quad y'_3 = -\left(y_3 + \frac{2p_2}{y_3}\right). \quad (2)$$

Le cercle A'B'C' doit avoir son centre sur l'axe de la parabole ; par suite, les points A' et B', par exemple, soient symétriques par rapport à l'axe ou bien $y'_1 + y'_2 = 0$. Au moyen des valeurs (2), l'égalité précédente se transforme en celle-ci (on néglige la solution $y_1 + y_2 = 0$) :

$$2p^2 + y_1 y_2 = 0. \quad (3)$$

Des relations (3) et (1) on tire successivement

$$y_3 = -\beta, \quad y_1 + y_2 = \beta, \quad \beta^2 = 2p\alpha - 4p^2.$$

La dernière équation représente le lieu cherché.

MM. J. Gillet et Droz-Farny déduisent la solution de la question 945 immédiatement de l'équation du cercle A'B'C' que l'on rencontre dans la *Revue de Math. spéciales* de Niewenglowski, t. I, p. 315, et dans le J. M. S., 1898, p. 195.

×Question 949.

(Voir *Mathesis*, (2) IV, p. 151).

On sait que l'expression $(a^2 + b^2)^6$ *est une somme de deux carrés. Démontrer qu'on peut la mettre sous la forme d'une somme de trois ou de quatre carrés.* (E. Fauquembergue.)

Solution par M. Soons (Tirlemont). En remplaçant $(a^2 + b^2)^2$ par

$$(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2,$$

on obtient successivement :

1° $$(a^2 + b^2)^6 (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 (a^2 + b^2)^4,$$

somme de deux carrés ;

2° $(a^2+b^2)^2(a^2-b^2)^4+4a^2b^2(a^2+b^2)^2(a^2-b^2)^2+4a^2b^2(a^2+b^2)^4$,
$(a^2+b^2)^4(a^2-b^2)^2+4a^2b^2(a^2+b^2)^2(a^2-b^2)^2+16a^4b^4(a^2+b^2)^2$,
somme de trois carrés ;

3° $(a^2-b^2)^6+4a^2b^2(a^2-b^2)^4+4a^2b^2(a^2+b^2)^2(a^2-b^2)^2+4a^2b^2(a^2+b^2)^4$,
$(a^2+b^2)^2(a^2-b^2)^4+4a^2b^2(a^2-b^2)^4+16a^4b^4(a^2-b^2)^2+4a^2b^2(a^2+b^2)^4$,
$(a^2+b^2)^4(a^2-b^2)^2+4a^2b^2(a^2-b^2)^4+16a^4b^4(a^2-b^2)^2+16a^2b^4(a^2+b^2)^2$
$(a^2+b^2)^4(a^2-b^2)^2+4a^2b^2(a^2+b^2)(a^2-b^2)+16a^4b^4(a^2-b^2)^2+64a^6b^6$;
sommes de quatre carrés distincts.

×Question 981.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 240).

On donne deux points A, B *et une droite d non situés dans un même plan. Trouver sur la droite un point* X *dont la somme des distances* XA + XB *aux points donnés soit un minimum.*

Solution par MM. Soons, Hacken, François (La Haye), Klompers, Fairon, Jean Jonesco, Poort, Brocard. Rabattons le plan B*d* autour de *d* sur le plan A*d*, de manière que A et B soient de part et d'autre de *d*. La droite qui les joint alors coupe *d* au point X demandé et est en même temps la somme XA + XB.

Si l'on rabat le plan B*d* sur A*d*, de manière que A et B soient du même côté de *d*, la droite AB ira couper *d* en un point Y qui rend maximum la différence des distances de A et B à un point de *d*. (Klompers, Poort.)

Si l'on mène AA', BB' perpendiculaires à *d*, les angles AXA', BXB' sont égaux, et X divise A'B' additivement dans le rapport AA' : BB' (Fairon); de même Y divise A'B' soustractivement dans le même rapport.

Autre solution, analytique et géométrique, très bien développée, par M. Cristescu. M. Brocard indique également une solution analytique.

×Question 1009.

(Voir *Mathesis*, (2), V, p. 56.)

Quels sont les nombres triangulaires qui, augmentés d'une unité, sont égaux à des carrés ? (De Rocquigny.)

Solution par M. E. Fauquembergue. Ce problème a été résolu par

Euler dans un Mémoire(*) (1778) sur la résolution, en nombres entiers, de l'équation générale

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \zeta y^2 + \eta y + \theta.$$

Toutes les solutions de l'équation

$$x^2 = \frac{y(y+1)}{2} + 1, \qquad (1)$$

ou

$$2x^2 - 2 = y^2 + y,$$

sont données par les formules

$$x = \frac{(2\sqrt{2}+1)}{4\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2})^n + \frac{(2\sqrt{2}-1)}{4\sqrt{2}}(3-2\sqrt{2})^n,$$

$$y = \frac{(2\sqrt{2}+1)}{4}(3+2\sqrt{2})^n - \frac{(2\sqrt{2}-1)}{4}(3-2\sqrt{2})^n - \frac{1}{2},$$

dans lesquelles n est un nombre entier quelconque.

Les premières solutions sont

$$\begin{cases} x = 1, & 4, & 23, & 134, & 781, & \text{etc.} \\ y = 0, & 5, & 32, & 189, & 1104, & \text{etc.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2, & 11, & 64, & 373, & 2174, & \text{etc.} \\ y = 2, & 15, & 90, & 527, & 3074, & \text{etc.} \end{cases}$$

Ces suites sont récurrentes. La loi de récurrence est

$u_n = 6u_{n-1} - u_{n-2}$ pour x et $u_n = 6u_{n-1} - u_{n-2} + 2$ pour y.

Solution analogue par M. H. Brocard qui ramène l'équation à résoudre à celle-ci : $u^2 - 2t^2 = -7$.

M. Boutin, par les substitutions,

$$y = \frac{k-1}{2}, \quad k = 3p \mp 2q, \quad 2x = 3q \mp p,$$

ramène l'équation (1) à $p^2 - 2q^2 = -1$; il présente aussi quelques considérations sur l'équation plus générale

$$x^2 = \frac{y(y+1)}{2} \pm \alpha.$$

M. J. Jonescu établit la relation entre les solutions des deux équations

$$x^2 = \frac{y(y+1)}{2} + 1, \quad u^2 = \frac{z(z+1)}{2}$$

en montrant qu'une solution de la première est

$$y = \tfrac{1}{2}(8u \pm \sqrt{8u^2+1} - 1).$$

(*) Voir Leonh. Euleri, *Commentationes Arithmeticae collectae*, t. II, p. 268.

Question 1024.

(Voir *Mathesis*, (2), V, p. 152.)

L'équation

$$x^4 - 5p^2x + 3q^2 = 0,$$

dans laquelle p est un nombre pair, et q un nombre différent de zéro, n'a pas de racine entière. (S. Realis.)

Solution par M. Fauquembergue. Cette équation peut s'écrire

$$2x^2(x^4 + 3q^2) = 10(px)^2,$$

ou encore, à cause de l'identité

$$2L^2(L^4 + 3M^2) = (L^2 + M)^3 + (L^2 - M)^3,$$

$$[1] \qquad (x^2 + q)^3 + (x^2 - q)^3 = 10(px)^3.$$

D'autre part, d'après E. Lucas (N. A. M., 1878, p. 425), pour que l'équation $X^3 + Y^3 = AZ^3$ soit possible en nombres entiers, il faut et il suffit que A soit de la forme $xy(x + y)$, débarrassée de ses facteurs cubiques.

Or le nombre 10 n'est pas de cette forme ; donc l'équation [1], c'est-à-dire l'équation proposée, est impossible en nombres entiers, et cela sans restrictions pour les valeurs de p et de q (*).

Pour des équations analogues et une généralisation que nous en avons donnée, voir *Mathesis*, (1), VII, p. 96.

Solution analogue par M. Cristescu.

QUESTIONS D'EXAMEN.

924. Trouver l'anomalie excentrique d'un point M d'une ellipse, tel qu'en abaissant des deux foyers F et F′ les perpendiculaires FP et F′P′ sur la tangente en M, la longueur PP′ soit égale au petit axe.

(E. N. Barisien.)

Si φ est l'anomalie de M et α l'angle de la tangente en M avec le grand axe, on a

$$PP' = b = 2c\cos\alpha, \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{b\cos\varphi}{a\sin\varphi}, \quad \ldots, \quad \text{d'où} \quad \sin\varphi = \frac{b^2}{c^2}.$$

(*) L'impossibilité de l'équation (1) en nombres entiers résulte encore de ce théorème dû à M. Sylvester, N. A. M. Question 869 :

L'équation $X^3 + Y^3 = AZ^3$ est impossible pour $A = p, 2p, 4p^2, q^3, 2q^3, 4q, p$ et q étant des nombres premiers de l'une des formes $18n + 5$ et $18n + 11$. » Voir l. c., 1878, p. 507, la solution d'Ed. Lucas.

715. Si, dans un triangle ABC, on a

$$b^4 + c^4 = a^2(b^2 + c^2),$$

on a aussi

$$\operatorname{tg}^2 A = \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C, \quad bc = a^2 \cos(B - C), \quad \frac{\sin 2B}{\sin 2C} = \frac{c^2}{b^2},$$

$$\frac{\operatorname{cotg} A}{\operatorname{cotg} B} = \frac{b^2}{c^2}, \quad \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin(C - A)}{\sin(A - B)},$$

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} \operatorname{cotg}\frac{3A}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(B - C) = 0;$$

et l'angle de Brocard est complémentaire de l'angle A.

716. Résoudre le système

$$\begin{aligned} y^2 + z^2 + u^2 - x(y + z + u) &= a, \\ x^2 + z^2 + u^2 - y(x + z + u) &= b, \\ x^2 + y^2 + u^2 - z(x + y + u) &= c, \\ x^2 + y^2 + z^2 - u(x + y + z) &= d, \end{aligned}$$

717. Pour que le système

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg}(y - z) = a, \quad \operatorname{tg} y \operatorname{tg}(z - x) = b, \quad \operatorname{tg} z \operatorname{tg}(x - y) = c,$$

soit compatible, on doit avoir

$$a + b + c + abc = 0.$$

Ces équations peuvent prendre la forme

$$\frac{1 - a}{1 + a} = \frac{\cos(x + y - z)}{\cos(x - y + z)}, \ldots; \quad \text{donc} \quad \frac{1 - a}{1 + a} \cdot \frac{1 - b}{1 + b} \cdot \frac{1 - c}{1 + c} = 1.$$

Comparer *Mathesis* (2), II, 212.

718. Résoudre le système

$$\sin^2 x - \sin^2(y - z) = a, \quad \sin^2 y - \sin^2(z - x) = b,$$
$$\sin^2 z - \sin^2(x - y) = c.$$

QUESTIONS PROPOSÉES,

1043 (corrigé). Chercher le lieu du foyer d'une parabole touchant en un point fixe A une circonférence donnée et passant par les extrémités B, C d'un diamètre variable de cette circonférence, et le lieu du point de rencontre de l'axe de la parabole avec la droite BC.

(E.-N. Barisien.)

×**1051.** A un triangle donné ABC, on inscrit un triangle quelconque A'B'C' et on circonscrit un triangle A''B''C'' dont les côtés sont respectivement parallèles à ceux de A'B'C'.

1° On a

$$\frac{BA'}{A'C}=\frac{C''A}{AB''},\quad \frac{CB'}{B'A}=\frac{A''B}{BC''},\quad \frac{AC'}{C'B}=\frac{B''C}{CA''}.$$

2° Si A', B', C' sont les pieds des bissectrices intérieures du triangle ABC, et que la parallèle par A'' à B'C' rencontre AB en M, AC en N, on a

$$MA''=A''N,\ MB=BC=CN,$$
$$\overline{MN}^2=a^2(3-2\cos A+2\cos B+2\cos C)$$
$$=a^2(1+8\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C).\qquad\text{(J. N.)}$$

1052. Par le sommet A d'une ellipse on mène une corde quelconque AB. Trouver l'enveloppe de la circonférence qui touche la droite AB en B et qui a son centre sur l'axe OA de l'ellipse. (Dépbez.)

×**1053.** Étant donné un triangle équilatéral ABC, on prend sur les côtés AB, BC, CA respectivement les segments $AM=x$, $BN=2x$, $CP=3x$. On demande pour quelles valeurs de x le triangle MNP est rectangle, ou isoscèle. Peut-il se réduire à un segment de droite? Peut-il être semblable à un triangle quelconque? (H. Brocard.)

1054. Trouver le lieu des centres des coniques passant par trois points donnés A, B, C et ayant leurs axes parallèles à deux directions rectangulaires données (Par la géométrie analytique et par la géométrie projective).

1055. La podaire de la Kreuzcurve

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{k^2}$$

par rapport à son centre est une courbe fermée dont l'aire est égale à $3\pi k^2$. (E.-N. Barisien.)

SUR LES TRIANGLES FORMÉS PAR LES TANGENTES COMMUNES A TROIS CERCLES DONNÉS;

par M. E.-N. Barisien.

Soient O_1, O_2, O_3 les centres, et R_1, R_2, R_3 les rayons de trois cercles donnés, que nous supposons extérieurs l'un à l'autre. Désignons par D_1, D_2, D_3 les distances des centres O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2, et par :

α, α' les deux tangentes communes extérieures des cercles O_2, O_3,
β, β' » » » » » O_3, O_1,
γ, γ' » » » » » O_1, O_2;

les tangentes communes intérieures seront dénotées respectivement par α_1, α'_1, β_1, β'_1, γ_1, γ'_1.

Si nous limitons ces tangentes à leurs points de contact, nous aurons:

$$\alpha = \alpha' = \sqrt{D_1^2 - (R_2 - R_3)^2}, \quad \alpha_1 = \alpha'_1 = \sqrt{D_1^2 - (R_2 + R_3)^2},$$

$$\beta = \beta' = \sqrt{D_2^2 - (R_3 - R_1)^2}, \quad \beta_1 = \beta'_1 = \sqrt{D_2^2 - (R_3 + R_1)^2},$$

$$\gamma = \gamma' = \sqrt{D_3^2 - (R_1 - R_2)^2}, \quad \gamma_1 = \gamma'_1 = \sqrt{D_3^2 - (R_1 + R_2)^2}.$$

Le triangle $O_1O_2O_3$ a pour aire

$$U = \frac{1}{4}\sqrt{2D_1^2D_2^2 + 2D_2^2D_3^2 + 2D_3^2D_1^2 - D_1^4 - D_2^4 - D_3^4}.$$

Cela posé, nous nous proposons d'étudier les triangles formés par trois tangentes communes aux cercles (O_2, O_3), (O_3, O_1), (O_1, O_2). Ces triangles, au nombre de 64, peuvent se répartir en trois groupes, que nous appellerons respectivement *triangles extérieurs*, *triangles intérieurs*, *triangles mixtes* suivant que les trois côtés sont des tangentes extérieures ou des tangentes intérieures ou que ce ne sont pas des tangentes de même espèce.

Nous avons les 8 triangles extérieurs :

$$\alpha\beta\gamma, \quad \alpha'\beta\gamma, \quad \alpha\beta'\gamma, \quad \alpha\beta\gamma',$$
$$\alpha'\beta'\gamma', \quad \alpha\beta'\gamma', \quad \alpha'\beta\gamma', \quad \alpha'\beta'\gamma;$$

les 8 triangles intérieurs :

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1, \quad \alpha'_1\beta_1\gamma_1, \quad \alpha_1\beta'_1\gamma_1, \quad \alpha_1\beta_1\gamma'_1,$$
$$\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1, \quad \alpha_1\beta'_1\gamma'_1, \quad \alpha'_1\beta_1\gamma'_1, \quad \alpha'_1\beta'_1\gamma_1;$$

les 48 triangles mixtes :

$$\alpha_1\beta\gamma, \quad \alpha\beta_1\gamma, \quad \alpha\beta\gamma_1, \quad \alpha'_1\beta\gamma, \quad \alpha\beta'_1\gamma, \quad \alpha\beta\gamma'_1 \text{ etc.}$$

Appelons ABC l'un quelconque de ces triangles; a, b, c, ses côtés et A, B, C ses angles; r, r_1, r_2, r_3, les rayons des cercles tritangents, et R le rayon du cercle circonscrit; S, la surface ABC. Nous introduisons encore les notations suivantes :

$$a+b+c=2p, \quad -a+b+c=2p_1, \quad a-b+c=2p_2, \quad a+b-c=2p_3,$$

de sorte que

$$p_1=p-a, \quad p_2=p-b, \quad p_3=p-c, \quad p=p_1+p_2+p_3;$$

ensuite

$$\alpha+\beta+\gamma=2s, \quad -\alpha+\beta+\gamma=2s_1, \quad \alpha-\beta+\gamma=2s_2, \quad \alpha+\beta-\gamma=2s_3,$$

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=2t, \quad -\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=2t_1, \quad \alpha_1-\beta_1+\gamma_1=2t_2, \quad \alpha_1+\beta_1-\gamma_1=2t_3.$$

On sait que

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p_1}=\frac{r_1}{p}=\frac{p_2}{r_3}=\frac{p_3}{r_2}=\frac{S}{pp_1}=\frac{p_2p_3}{S};$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{p_2}=\frac{r_2}{p}=\frac{p_1}{r_3}=\frac{p_3}{r_1}=\frac{S}{pp_2}=\frac{p_1p_3}{S};$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{p_3}=\frac{r_3}{p}=\frac{p_1}{r_2}=\frac{p_2}{r_1}=\frac{S}{pp_3}=\frac{p_1p_2}{S}.$$

Triangles extérieurs. Nous allons chercher les éléments du triangle $\alpha\beta\gamma$ dont les sommets sont A, B, C.

En projetant les contours BO_2O_3C, CO_3O_1A, AO_1O_2B respectivement sur BC, CA, AB, on trouve les relations

$$\left.\begin{aligned} a&=\alpha+R_2\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+R_3\operatorname{cotg}\frac{C}{2},\\ b&=\beta+R_3\operatorname{cotg}\frac{C}{2}+R_1\operatorname{cotg}\frac{A}{2},\\ c&=\gamma+R_1\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+R_2\operatorname{cotg}\frac{B}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Or,

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}=\frac{p_1}{r}, \quad \operatorname{cotg}\frac{B}{2}=\frac{p_2}{r}, \quad \operatorname{cotg}\frac{C}{2}=\frac{p_3}{r}; \qquad (2)$$

les égalités (1) peuvent donc s'écrire

$$\left.\begin{aligned} a &= \alpha + \frac{R_2 p_2 + R_3 p_3}{r}, \\ b &= \beta + \frac{R_3 p_3 + R_1 p_1}{r}, \\ c &= \gamma + \frac{R_1 p_1 + R_2 p_2}{r}, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

On en tire, en calculant $b+c-a$, $c+a-b$, $a+b-c$,

$$p_1 = s_1 + \frac{R_1 p_1}{r}, \quad p_2 = s_2 + \frac{R_2 p_2}{r}, \quad p_3 = s_3 + \frac{R_3 p_3}{r}; \qquad (4)$$

par conséquent

$$p_1 = \frac{r s_1}{r - R_1}, \quad p_2 = \frac{r s_2}{r - R_2}, \quad p_3 = \frac{r s_3}{r - R_3}. \qquad (5)$$

Les valeurs de p_1, p_2, p_3 et par suite celles de a, b, c seraient connues, si l'on connaissait r. Or $S = pr = \sqrt{p p_1 p_2 p_3}$; remplaçant dans cette relation p par $p_1 + p_2 + p_3$, et p_1, p_2, p_3 par les valeurs (5), on trouve

$$\frac{s_1}{r - R_1} + \frac{s_2}{r - R_2} + \frac{s_3}{r - R_3} = \frac{s_1 s_2 s_3}{(r - R_1)(r - R_2)(r - R_3)}.$$

Cette équation développée et ordonnée devient

$$r^2 s - r \Sigma \alpha R_1 + \Sigma s_1 R_2 R_3 - s_1 s_2 s_3 = 0. \qquad (6)$$

On en tire les deux valeurs de r :

$$r = \frac{\Sigma \alpha R_1 \pm 2U}{\alpha + \beta + \gamma}; \qquad (7)$$

en effet, la quantité sous le radical a pour expression

$\Sigma^2 \alpha R_1 - \Sigma \alpha \Sigma (-\alpha + \beta + \gamma) R_2 R_3 + \frac{1}{4}(2\Sigma\alpha^2\beta^2 \quad \Sigma\alpha^4)$ (*)

$= \Sigma \alpha^2 R_1^2 + 2\Sigma\beta\gamma R_2 R_3 - \Sigma(\beta^2 + 2\beta\gamma + \gamma^2 - \alpha^2) R_2 R_3 + \frac{1}{4}\Sigma\alpha^2(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)$

$= \Sigma \alpha^2 (R_1 - R_2)(R_1 - R_3) + \frac{1}{4}\Sigma\alpha^2(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)$ (**)

$= \frac{1}{4}\Sigma [D_1^2 - (R_2 - R_3)^2][D_2^2 + D_3^2 - D_1^2 + 2(R_1 - R_2)(R_1 - R_3)]$

$= \frac{1}{4}\Sigma D_1^2 (D_2^2 + D_3^2 - D_1^2) = 4U^2$ (***).

(*) $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = \frac{1}{16}(\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma) = \frac{1}{16}(2\Sigma\alpha^2\beta^2 - \Sigma\alpha^4)$,

(**) $\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 = D_2^2 + D_3^2 - D_1^2 - (R_3 - R_1)^2 - (R_1 - R_2)^2 + (R_2 - R_3)^2$
$= D_2^2 + D_3^2 - D_1^2 - 2(R_1 - R_2)(R_1 - R_3)$.

(***) Lorsque les trois points O_1, O_2, O_3 sont en ligne droite, les triangles $\alpha\beta\gamma$,

L'une des valeurs de r convient au triangle $\alpha\beta\gamma$, l'autre au triangle $\alpha'\beta'\gamma'$. Les autres éléments de l'un de ces triangles ont pour expression

$$p_1 = p - a = \frac{rs_1}{r - R_1}, \quad p - b = \frac{rs_2}{r - R_2}, \quad p - c = \frac{rs_3}{r - R_3},$$

$$p = p_1 + p_2 + p_3 = r\left(\frac{s_1}{r - R_1} + \frac{s_2}{r - R_2} + \frac{s_3}{r - R_3}\right),$$

$$a = p_2 + p_3 = r\left(\frac{s_2}{r - R_2} + \frac{s_3}{r - R_3}\right), \quad \cdots$$

$$S = pr = r^2 \Sigma \frac{s_1}{r - R_1} - \frac{r^3 s_1 s_2 s_3}{(r - R_1)(r - R_2)(r - R_3)},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p_1} = \frac{r - R_1}{s_1}, \quad \cdots, \quad r_1 = \frac{S}{p_1} = \frac{s_2 s_3 r}{(r - R_2)(r - R_3)}, \quad \cdots$$

Les formules précédentes conviennent à tous les triangles extérieurs pourvu qu'on change les signes de certaines quantités.

Le triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ est encore représenté par ABC, les centres de cercles donnés étant maintenant ω_1, ω_2, ω_3(*). Pour passer de $\alpha\beta\gamma$ $\alpha'\beta'\gamma'$, il suffit de changer R_1, R_2, R_3 en $-R_1$, $-R_2$, $-R_3$ dans les formules (1) ou, ce qui est plus simple, r en $-r$ dans les égalités (1). Il résulte de là que le rayon du cercle inscrit au triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ est donné par la racine négative de l'équation (6), ou que

$$r = \frac{-\Sigma \alpha R_1 + 2U}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Considérons le triangle $\alpha'\beta\gamma$, qui correspond aux centres O_1, O'_2, O'_3. Les droites AO_1, BO'_2, CO'_3 concourent maintenant au centre I_1 du cercle exinscrit qui correspond à l'angle A. Les équations (1), (2), (3), (4), (5) sont remplacées par les suivantes :

$$a = \alpha + R_2 \operatorname{tg}\frac{B}{2} + R_3 \operatorname{tg}\frac{C}{2}, \quad b = \beta - R_3 \operatorname{tg}\frac{C}{2} + R_1 \operatorname{cotg}\frac{A}{2},$$

$$c = \gamma + R_1 \operatorname{cotg}\frac{A}{2} - R_2 \operatorname{tg}\frac{B}{2},$$

$\alpha'\beta'\gamma'$ sont symétriques par rapport à la droite $O_1O_2O_3$; par suite dans ce cas, on $U = 0$, et les deux valeurs de r sont égales. (J. N.)

(*) Pour plus de clarté et aussi pour faciliter le passage d'un triangle à l'autre, nous considérons toujours le même triangle ABC et nous changeons la position des centres des cercles O_1, O_2, O_3 suivant les différents cas.

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}=\frac{p}{r_1},\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{p_3}{r_1},\quad \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{p_2}{r_1},$$

$$a=\alpha+\frac{R_2p_3+R_3p_2}{r_1},\quad b=\beta+\frac{R_1p-R_3p_3}{r_1},\quad c=\gamma+\frac{R_1p-R_2p_2}{r_1},$$

$$p=s+\frac{r_1}{R_1p},\quad p_2=s_2+\frac{r_1}{R_2p_2},\quad p_3=s_3+\frac{r_1}{R_3p_3},$$

$$p=\frac{r_1s}{r_1-R_1},\quad p_3=\frac{r_1s_3}{r_1-R_2},\quad p_2=\frac{r_1s_2}{r_1-R_3}.$$

Les dernières égalités se déduisent des relations (5) en changeant a en $-a$ et α en $-\alpha$, ce qui transforme $p_1, p_2, p_3, s_1, s_2, s_3$ en $p, -p_3, -p_2, s, -s_3, -s_2$. Il reste à faire les mêmes changements dans l'équation (6) pour obtenir r_1; la racine positive convient au triangle $\alpha'\beta\gamma$, la racine négative au triangle $\alpha\beta'\gamma'$ (centres des cercles : ω_1, O_2'', O_3').

On voit facilement comment on passe aux autres triangles extérieurs.

(*A continuer*).

SUR LES CONIQUES QUI SE TOUCHENT EN DEUX POINTS DONNÉS;

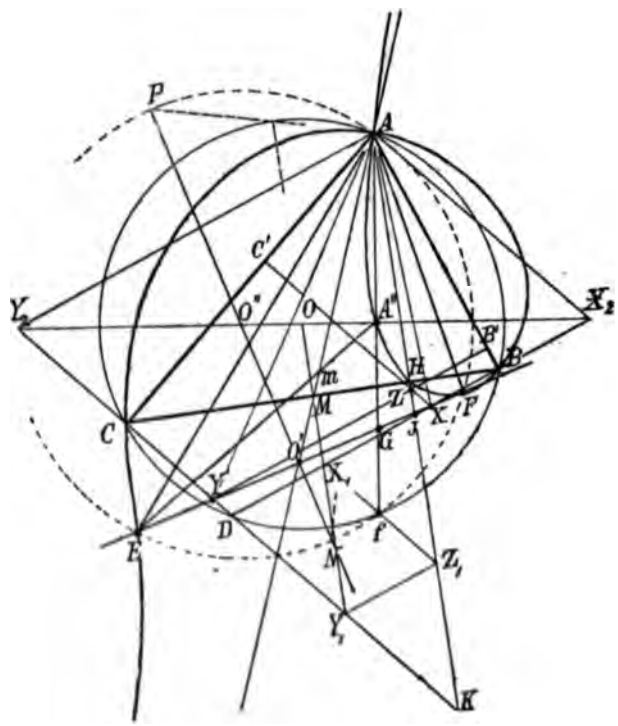
par M. V. Jeřabek.

Le lieu des foyers et l'enveloppe des axes des coniques qui touchent quatre droites données ont occupé différents géomètres(*). Dans le cas particulier où les coniques touchent deux droites fixes AB, AC aux mêmes points B, C, les foyers se trouvent sur une strophoïde, et les axes enveloppent une parabole. Nous allons d'abord étudier cette parabole en rapport avec le triangle ABC, puis le système des coniques bitangentes en B et C.

(*) Voir, par exemple, un article de Schröter dans les *Math. Ann.*, t. V, pp. 50-63 et de Durège, ibid., pp. 63-94. Voir aussi *Steiner's Vorlesungen ueber die Theorie der Kegelschnitte*, t. II, pp. 266 et 309, et une note de M. Pelz dans les *Wiener Sitzungsberichte*, t. 78.

I.

1. Soit un triangle fondamental ABC. Les perpendiculaires en B, C sur AB, AC se rencontrent en un point D, extrémité du diamètre AO de la circonférence ABC. Menons deux droites quelconques, AX et AY, isogonales par rapport à l'angle BAC et rencontrant BD, CD en X, Y



(ou CD, BD en X', Y'). Les triangles ABX, ACY étant semblables, les points X, Y engendrent deux ponctuelles semblables dont le rapport de similitude est $\frac{AB}{AC}$.

Par suite, l'enveloppe de la droite XY (et de X'Y') est une parabole π ayant pour tangentes DC, DB, BC.

2. La hauteur AH et le diamètre AOD étant des lignes isogonales par rapport à l'angle BAC, la première rencontre BD, CD aux points

J, K qui sont les correspondants de D dans les ponctuelles semblables (X), (Y); J et K sont donc les points de contact de π avec DC, DB, et la hauteur AH est la polaire de D par rapport à π. D'après un théorème connu, le sommet Z du parallélogramme construit sur DX, DY se trouve sur AH.

Les droites AX, AY peuvent coïncider avec l'une des bissectrices AN, AP de l'angle BAC; ces bissectrices sont donc tangentes à π.

La perpendiculaire OM au milieu de BC passe aux milieux X_1, Y_1 des segments DJ, DK; c'est donc une tangente de π.

3. Comme A et M sont les sommets de deux angles droits NAP, X_1MB circonscrits à π, la médiane AM est la directrice de π.

Le foyer f est à l'intersection de la circonférence ABC avec la symédiane issue de A; en effet, la circonférence ABC est circonscrite au triangle des tangentes DC, DB, BC, et la circonférence circonscrite au triangle des tangentes BC, AN, AP a pour axe radical avec la première la symédiane issue de A.

4. Les perpendiculaires élevées en A sur AC, AB rencontrent respectivement DB, DC aux points X_2, Y_2; comme elles sont isogonales par rapport à l'angle BAC, la droite X_2Y_2 est une tangente de π. Les circonférences circonscrites aux triangles ABX_2, ACY_2 touchent en A les côtés AC, AB; donc, d'après une proposition connue, elles se coupent en un point A'', qui est le milieu de la corde symédiane Af et le centre de similitude de deux figures semblables construites sur BA et AC. L'angle $AA''X_2$ étant droit (AX_2 est un diamètre du cercle ABX_2), la tangente X_2Y_2 passe par le centre O du cercle ABC, et le point A'', projection du foyer f sur X_2Y_2, appartient à la tangente au sommet de π.

II.

5. Considérons maintenant toutes les coniques qui touchent AB en B et AC en C.

Soient E, F les foyers de l'une de ces courbes. Les normales en B, C, rencontrent l'axe focal EF en deux points X, Y, tels que les droites AX, AY, sont isogonales par rapport à l'angle BAC(*). On voit par là que l'axe EF enveloppe la parabole π définie ci-dessus.

(*) Pour établir cette propriété il suffit de faire voir que $\frac{AC}{CY} = \frac{AB}{BX}$. Or, si $2\beta, 2\gamma$

Le second axe enveloppe la même parabole. Car le centre O′ est sur la directrice AM de π, la perpendiculaire en O′ sur XY est également une tangente.

6. Le cercle passant par A et les foyers E, F de la conique passe par le foyer f de la parabole. En effet, il coupe le second axe de la conique en deux points N, P appartenant aux bissectrices de l'angle EAF qui sont aussi celles de l'angle CAB; donc il est circonscrit au triangle formé par trois tangentes NP, AN, AP de π.

7. Le lieu des foyers E, F est une strophoïde ayant pour foyer le point A″, pour directrice AM.

En effet, la médiane AM et la symédiane Af du triangle ABC sont isogonales par rapport à l'angle BAC et aussi par rapport à l'angle EAF; AM étant aussi la médiane du triangle AEF, Af est la symédiane du même triangle, et comme le cercle circonscrit passe par f, A″ est le centre de similitude de deux figures semblables construites sur BA et AE. Il résulte de là que l'angle A″EA = A″AP = MAE; donc si A″E coupe AM en m, on a $mE = mA$.

8. Dans la première définition de π on peut remplacer le triangle ABC par AEF; car π touche EF, les bissectrices AN, AP de l'angle EAF et la médiatrice NP de EF. On en conclut que π touche aussi les perpendiculaires élevées en E, F sur AE, AF; E, F sont donc les projections de A sur deux tangentes de π; par suite la strophoïde est la podaire de A par rapport à la parabole π.

On voit aussi que B, C sont les foyers d'une conique touchant AE, AF en E, F.

Si le point A se transporte à l'infini sur la droite MO′ supposée fixe, les coniques considérées ont un double contact aux extrémités B, C d'un

---

sont les longueurs des diamètres parallèles aux tangentes AC, AB, on a $\frac{AC}{AB} = \frac{\beta}{\gamma}$. D'autre part, si AC coupe EF en T, et qu'on désigne par e, f, d, les distances des foyers E, F et du centre O′ à la tangente AC, la division harmonique YTEF donne

$$\frac{1}{TY} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{TF} + \frac{1}{TE}\right) = \frac{TO'}{TF.TE}, \quad \text{d'où} \quad CY.d = ef = B^2,$$

2A et 2B désignant les longueurs des axes de la courbe. Mais d'après un théorème d'Apollonius, $\beta d = AB$; donc $\frac{CY}{\beta} = \frac{B}{A}$, et par analogie $\frac{BX}{\gamma} = \frac{B}{A}$, etc.

(J. N.)

diamètre fixe. Soient BB_1, CC_1 les tangentes en B, C. Les foyers E, F de l'une de ces courbes sont symétriques par rapport au milieu M de BC; les droites BE, BF étant également inclinées sur BB_1, il en est de même de BE, CE. Par suite le lieu des foyers est engendré par deux faisceaux symétriquement égaux, ayant leurs centres en B, C; c'est donc une hyperbole équilatère.

Un autre cas particulier à remarquer est celui des coniques qui ont entre elles en un point donné B un contact du troisième ordre. Le lieu des foyers est une strophoïde ayant pour foyer le point B et pour directrice le diamètre commun.

NOTES MATHÉMATIQUES.

×1. *Un triangle est isoscèle s'il a deux bissectrices intérieures égales* (Démonstration indépendante du postulatum d'Euclide). Lemme. *Dans un quadrilatère convexe dont les diagonales se coupent mutuellement en parties égales, deux côtés opposés ne peuvent se rencontrer*, car ils forment avec les diagonales des angles alternes internes égaux.

Théorème. Soient BB′, CC′ deux bissectrices égales du triangle ABC. Soit M le milieu de C′B′. Prolongeons la droite BM d'une quantité MD = BM, et joignons DC′, DB′. La droite B′D ne peut être à l'intérieur de l'angle C′B′A ; autrement B′D rencontrerait BC′, ce qui est contraire au lemme précédent. Par suite, B′ est à l'intérieur du triangle CC′D.

Soit maintenant, s'il est possible, AB < AC et, par suite, angle C < angle B, angle C′CB′ < angle C′BB′ ou C′DB′.

Les triangles BCB′ et CBC′ ayant le côté BC commun, le côté BB′ = CC′, et l'angle B′BC > C′CB, on a B′C > BC′ = B′D.

Donc

$$\text{angle } B'CD < \text{angle } B'DC.$$

Par conséquent,

$$C'CD = B'CD + C'CB' < C'DB' + B'DC = C'DC,$$

et, enfin,

$$BB' = C'D < CC';$$

ce qui est absurde. (G. Tarry, J. M. E. 1895, p. 169-170.)

8. *Un théorème de James Gregory*. Les courbes $y = f(x)$ en coordonnées rectangulaires et $r = F(\theta)$ en coordonnées polaires, telles que

$$y = r = \frac{dx}{d\theta},$$

ont même longueur; la première a une aire double de l'autre; enfin l'angle de la tangente avec l'axe des y dans la première est le même que l'angle du rayon vecteur avec la tangente dans la seconde. En effet, on trouve sans peine

$$\sqrt{dy^2 + dx^2} = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}, \quad y\,dx = r^2 d\theta, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{r d\theta}{dr}.$$

M. Aubry (J. M. S., 1893, pp. 130-134, 145-146, 172-180) a signalé Gregory comme le premier auteur de ces théorèmes remarquables qui ont été retrouvés maintes fois depuis le 17e siècle, entre autres par Steiner, M. Habich et plus récemment par M. A. Demoulin.

NOTES EXTRAITES DE LA CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE.

(*Suite*, voir (2), V pages 138 et 195; VI, p. 18).

9. *Mémoire sur les propriétés générales des courbes algébriques*, par Michel Reiss, de Francfort, docteur en sciences (C. G. Q., IX, 1837, pp. 249-308).

Dans ce mémoire, dont l'introduction est datée de Bruxelles, 25 avril 1832, l'auteur étudie les relations entre les segments déterminés sur une sécante u par les points où elle coupe une courbe algébrique, les relations entre les tangentes en ces points ou entre les rayons de courbure correspondants, lorsque la sécante tourne autour d'un point fixe. Il démontre les théorèmes de Newton, Cotes, Carnot et Maclaurin et en établit plusieurs corollaires ou signale des cas particuliers remarquables. Une formule se rapportant aux rayons de courbure appartient en propre à Reiss; elle a été récemment retrouvée ou étudiée dans ses conséquences par MM. d'Ocagne, Demoulin, Servais et Gob. En voici une démonstration assez simple.

Soit

$$y^m + (ax + b)\,y^{m-1} + (cx^2 + dx + e)\,y^{m-2} + \cdots = 0,$$

l'équation de la courbe, et désignons par $y_1, y_2, \ldots, y_m$, les ordonnées des points $A_1, A_2, \ldots, A_m$ où la courbe rencontre une sécante u parallèle à Oy ; nous aurons

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_m = -(ax + b), \tag{1}$$

x représentant l'abscisse de u. Si l'on appelle r le rayon de courbure au point (x, y) et α l'angle de la tangente avec Oy, on a

$$y' = \operatorname{cotg}\alpha, \quad r = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}, \quad \text{d'où} \quad y'' = \frac{1}{r\sin^3\alpha}.$$

Or, si l'on dérive deux fois de suite l'équation (1) par rapport à x, on obtient

$$y'_1 + y'_2 + \cdots + y'_m = -a, \quad y''_1 + y''_2 + \cdots + y''_m = 0;$$

par conséquent,

$$\operatorname{cotg}\alpha_1 + \operatorname{cotg}\alpha_2 + \cdots + \operatorname{cotg}\alpha_m = -a, \tag{2}$$

$$\frac{1}{r_1\sin^3\alpha_1} + \frac{1}{r_2\sin^3\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{r_m\sin^3\alpha_m} = 0. \tag{3}$$

L'égalité (3) constitue le théorème de Reiss. La constante $-a$ qui figure dans l'égalité (2) est égale à la somme des cotangentes des angles que forme l'axe Oy avec les directions asymptotiques de la courbe. L'égalité (1) exprime que le centre des moyennes distances des points $A_1, A_2, \ldots, A_m$, lorsque la sécante u se déplace parallèlement à elle-même, décrit une droite (Théorème de Newton).

Voici une démonstration du théorème de Maclaurin. L'équation de la courbe peut se mettre sous la forme

$$Q_0 + \rho Q_1 + \rho^2 Q_2 + \cdots + \rho^m Q_m = 0,$$

où ρ, ω sont les coordonnées polaires d'un point et Q_p une fonction homogène de degré p en $\sin\omega$ et $\cos\omega$. En divisant par ρ^m, on trouve

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \cdots + \frac{1}{\rho_m} = -\frac{Q_1}{Q_0} = A\sin\omega + B\cos\omega; \tag{4}$$

$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ désignent les rayons vecteurs des points $A_1, A_2, \ldots, A_m$ où une sécante u menée par l'origine O coupe la courbe, et A, B sont des constantes. Si l'on dérive les deux membres de (4) par rapport à ω, on obtient

$$\frac{\rho'_1}{\rho_1^2} + \frac{\rho'_2}{\rho_2^2} + \cdots + \frac{\rho'_m}{\rho_m^2} = -A\cos\omega + B\sin\omega. \tag{5}$$

Soient $T_1, T_2, \ldots$ les points où les tangentes menées en $A_1, A_2, \ldots$ coupent une perpendiculaire élevée en O sur u, et soient $t_1, t_2, \ldots$ les sous-tangentes polaires $OT_1, OT_2, \ldots$; l'égalité (5) pourra s'écrire

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_m}=-A\cos\omega+B\sin\omega. \qquad (6)$$

Mais si A_1T_1 rencontre l'axe Ox en U_1, et qu'on exprime que le triangle OA_1T_1 est la somme (ou la différence) des triangles OT_1U_1 et OU_1A_1, on trouve

$$\frac{1}{OU_1}=\frac{\sin\omega}{t_1}+\frac{\cos\omega}{\rho_1}.$$

Dès lors on déduit facilement des égalités (4) et (6) :

$$\frac{1}{OU_1}+\frac{1}{OU_2}+\cdots+\frac{1}{OU_m}=B.$$

Ainsi, lorsque la sécante u tourne autour de O, la somme des inverses des distances de O aux points où les tangentes menées en $A_1, A_2, \ldots, A_m$ rencontrent une droite fixe Ox, est constante.

BIBLIOGRAPHIE.

Compléments d'algèbre élémentaire à l'usage de l'enseignement moyen et des candidats aux écoles spéciales, par E. COLART, professeur de mathématiques supérieures à l'Athénée royal de Huy. Bruxelles, A. Castaigne, 1895 (163 pp. in-8°). Prix : fr. 3-00.

Ce volume fait suite au *Traité d'algèbre élémentaire* du même auteur (Bruxelles, A. Castaigne, 1894), ouvrage couronné par le jury du concours De Keyn, analysé dans *Mathesis* (1895, p. 255).

SOMMAIRE. I. *Méthode des coefficients indéterminés.* 1. Conditions d'identité des polynômes (mieux établies que dans beaucoup d'autres traités); 2. Application de la méthode à quelques exemples (bien choisis et pas trop nombreux).

II. *Nombres incommensurables*, définis par la limite commune de deux séries, l'une croissante, l'autre décroissante; puis l'égalité, l'inégalité de ces nombres et les opérations fondamentales sont définies avec rigueur et clarté.

III. *Expressions imaginaires.* Bonne théorie de ces expressions avec la forme trigonométrique, la formule de Moivre, etc. (l'auteur emploie le mot « argument » qu'il a oublié de définir).

IV. *Fractions continues.* La théorie établie au chapitre II permet de traiter ici avec une rigueur satisfaisante la question des fractions continues périodiques.

V. *Analyse indéterminée.* Équations et systèmes du 1er degré et quelques cas particuliers du 2d degré. Résolution en nombres entiers, puis en nombres positifs avec le théorème de Paoli.

VI. *Analyse combinatoire.* Permutations; arrangements; combinaisons; définition de la probabilité; triangle de Pascal.

VII. *Puissances et racines de degré quelconque.* Binôme de Newton et ses applications; puissance d'un polynôme; racine n^{me} d'un nombre et d'un polynôme.

VIII. *Radicaux quelconques.* Radicaux arithmétiques. Radicaux algébriques. Exposants fractionnaires, incommensurables, négatifs. Nous n'aimons guère l'emploi des formules trigonométriques pour démontrer qu'un radical algébrique a n valeurs; on devine que cette méthode a pour but d'éviter le théorème : toute équation a une racine.

IX. *Exponentielles.* Fonction exponentielle et résolution de l'équation exponentielle.

X. *Logarithmes* définis par les exposants (la définition au moyen de deux progressions a été exposée dans le *Traité* du même auteur).

XI. *Déterminants.* Permutations d'éléments à un et deux indices; propriétés des déterminants et application aux équations linéaires. Ce chapitre suit pas à pas les premières pages de la *Théorie des Déterminants* de M. Mansion.

Appendice. Propriétés des fractions continues périodiques avec application au problème de Pell, dont l'auteur donne, d'après Legendre, une infinité de solutions, et oublie, comme Legendre, de prouver qu'il les a données toutes.

Chaque chapitre est suivi d'exercices, dont plusieurs sont empruntés à *Mathesis*.

La matière traitée dans ce volume ne coïncide pas exactement avec le programme de l'enseignement moyen, mais le dépasse en quelques endroits; nous n'en faisons pas un grief à M. Colart : les bons auteurs ne font pas leurs livres d'après un programme; c'est au contraire d'après leurs livres que se feront les programmes de l'avenir. Mais que les professeurs qui adopteront les *Compléments d'algèbre*, n'en prennent pas prétexte pour allonger leur cours; les élèves de nos athénées ont déjà fort à faire pour apprendre ce que le programme exige, sans que l'on y introduise de nouvelles matières.

Pour les questions très délicates des imaginaires, des incommensurables, etc., on ne peut pas dire que M. Colart en ignore les difficultés; il les connaît et connaît aussi ce que les écrivains les plus autorisés ont proposé, dans leurs travaux récents, pour vaincre ces difficultés.

Dans l'ensemble, on est frappé, à première lecture, par le mode d'exposition très concis et constamment synthétique. Il faut féliciter l'auteur d'avoir écrit un véritable manuel pour les élèves, et non un de ces ouvrages qui semblent vouloir se substituer à l'enseignement oral, s'adressent surtout au professeur dont ils ont l'air de se défier, prennent des allures de Cours de Méthodologie, et arrivent à des proportions fastidieuses. Ici rien de pareil : un exposé vraiment scientifique des résultats auxquels doivent aboutir les recherches analytiques faites au préalable par les élèves sous la direction du maître; aussi ce dernier ne doit-il pas espérer

trouver dans son manuel un guide constant qui le dispense de préparation, bien au contraire.

La méthode synthétique est un peu exagérée pourtant dans le chapitre des Déterminants. MM. Mansion et Salmon (*Algèbre supérieure*) qui écrivaient cependant pour des lecteurs plus avancés, ont trouvé utile de faire précéder l'étude abstraite des déterminants d'une introduction plus accessible.

Si l'on considère que la matière assez étendue que nous avons analysée est traitée avec méthode et rigueur, que rien d'essentiel ne manque, que tout cela tient dans 160 pages de ce beau grand texte, si facile à lire auquel l'éditeur M. Castaigne nous a habitués, qu'enfin cette grande concision ne nuit pas à la clarté ni même à l'élégance de la rédaction, on doit se dire que voilà un bon livre, dont l'emploi s'impose dans nos établissements d'instruction moyenne, et qui fait à M. Colart non moins d'honneur que le précédent volume. (M. STUYVAERT.)

Recueil de problèmes de Mathématiques. Algèbre, théorie des nombres, probabilités, géométrie de situation, par C. A. LAISANT. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1895. Prix : 5 fr.

Ce volume est le cinquième du recueil de questions proposées dans les Nouvelles Annales de Mathématiques, le Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales (rédigé par Bourget ou M. de Longchamps), la Nouvelle Correspondance mathématique et Mathesis. M. Laisant a fait œuvre utile et intéressante en réunissant les énoncés de ces questions et en indiquant où l'on en peut trouver les solutions. L'ouvrage que nous annonçons ici renferme 504 questions d'algèbre, 389 se rapportant à la théorie des nombres, 24 aux probabilités, 24 à la géométrie de situation. — Il rendra des services réels aux professeurs et aux élèves. (J. N.)

Géométrie, par L. GÉRARD, 156 pages in-12. Prix : fr. 2-50.

Géométrie descriptive, par L. GÉRARD. 60 pages in-12. Prix : fr. 1-75.

Géométrie descriptive (compléments, perspective, levé des plans, etc.), par L. GÉRARD, 33 pages in-12. Prix : fr. 1-25.

Cosmographie, par JABLONSKI, 70 pages in-18. Prix : fr. 1-25.

Ces volumes font partie des manuels des baccalauréats de l'enseignement secondaire classique et moderne, publiés par la Société d'éditions scientifiques (Paris, rue Antoine-Dubois, 4). Nous avons déjà signalé à nos lecteurs deux autres livres de la même collection : *Algèbre*, par Gérard ; *Trigonométrie*, par L. Gérard (voir *Mathesis*, 1895, pp. 46 et 113). Ceux que nous annonçons aujourd'hui se recommandent par les mêmes qualités : clarté, simplicité et précision. Ils peuvent rendre de grands services non seulement aux candidats aux divers baccalauréats, mais aussi aux candidats aux diverses écoles du gouvernement (Saint-Cyr, Navale, Centrale, etc.). Les aspirants à nos écoles spéciales belges et les étudiants qui suivent les cours du grade de candidat-ingénieur ou de candidat en sciences physiques et mathématiques y trouveraient également un excellent guide pour revoir sous une forme résumée et substantielle quelques-unes des

matières du programme de l'épreuve à subir, ou se préparer à suivre avec fruit un enseignement plus développé.

Outre les manuels du baccalauréat dont nous venons de parler, la Société d'éditions scientifiques publie des *Cours de Sciences*, sous la direction de B. Niewenglowski, inspecteur de l'Académie de Paris. Quoique les sciences naturelles ne rentrent pas dans le programme de *Mathesis*, nous annonçons ici le volume suivant de cette collection, dont la lecture rapide nous a laissé une impression favorable.

Précis de sciences naturelles. Anatomie et physiologie animales et végétales, à l'usage des candidats à l'Institut agronomique, à l'École normale secondaire de Sèvres, etc. et des élèves des lycées et collèges de garçons et de jeunes filles, etc. par J. Anglas, préparateur des travaux pratiques de zoologie à la Faculté des Sciences de Paris. Un vol. in-8°, de IX-324 p., avec 52 fig. dans le texte (Prix : 5 fr.)

TH. LAMBERT, ingénieur honoraire des Mines, ancien professeur de mathématiques. **Géométrie élémentaire** en deux parties. Namur, Wesmael, 1895 (168 et 185 pages in-12) (*).

La première partie est destinée aux élèves des classes d'humanités; la seconde aux élèves qui se préparent aux écoles spéciales.

Plane and Solid Geometry by W. W. BEMAN, Professor of Mathematics in the University of Michegan, and D. E. SMITH, Professor of Mathematics in the Michigan State Normal School. Boston, U. S. A. and London, Ginn and Co 1895 (IX-320 p. in-12).

Exercices de Géométrie comprenant l'exposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues par F. J. Troisième édition. Tours, Mame : Paris, Poussielgue, 1896 (In-8° de XIX-1135 pages).

The Science Absolute of Space, independent of the Truth or Falsity of Euclid's Axiom XI (which can never be decided a priori) by John Bolyai, translated from the Latin by Dr. G. Br. Halsted, President of the Texas Academy of Science. Fourth Edition. Published at The Neomon, Austin, Texas, U. S. A. 1896 (XXX-71 p. in-8). Prix : Un dollar.

Leçons sur le frottement par P. PAINLEVÉ, Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris. Paris, A. Hermann, 1895 (Autographie de VIII-109 pages in-4°). Prix : 6 francs.

Cours d'analyse professé par M. DEMARTRES et rédigé par M. E. LEMAIRE. Troisième partie. Équations différentielles et aux dérivées partielles. Paris, Hermann, 1895 (Autographie de V-156 pages in-4°). Prix : 8 francs.

Essai sur la théorie des nombres. Premiers éléments, par T.-J. STIELTJES, professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse (Sur la divisibilité des nombres. Des congruences. Équations linéaires indéterminées. Systèmes de congruences linéaires). Paris, Gauthier-Villars et fils, 1895 (In-4°, 103 pages).

(*) Nous donnerons désormais dans chaque numéro le titre exact des ouvrages de mathématiques reçus par la Rédaction, sauf à revenir ultérieurement sur un certain nombre d'entre eux.

NÉCROLOGIE.

—

J. GRAINDORGE.

JOSEPH GRAINDORGE, né à Liége le 9 août 1943, vient de mourir en cette ville, le 23 janvier 1896.

A l'Athénée de Liége, après avoir brillamment terminé ses humanités, il suivit les cours de mathématiques supérieures donnés avec tant de succès par V. Falisse. En 1867, il conquit le diplôme de docteur, en 1871, celui de docteur spécial, en sciences physiques et mathématiques.

Attaché à l'Université de Liége dès 1868 en qualité de répétiteur à l'École des Mines, il fut chargé en 1876 de l'enseignement des théories dynamiques de Jacobi et Hamilton, cours nouvellement créé; en 1881, il fut nommé professeur à l'Université de Liége.

Les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, les *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liége*, et le *Journal de Liouville* renferment un grand nombre de notices dues à GRAINDORGE.

Nous signalons surtout son *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles des deux premiers ordres* (1872), sa dissertation de doctorat spécial intitulée *Mémoire sur l'intégration des équations de la dynamique* (1871; deuxième édition, augmentée, en 1890).

Signalons aussi son *Cours de Mécanique* en trois volumes; des *Exercices de calcul intégral* à l'usage de ses élèves, une traduction partielle du second volume du *Compendium der höheren Analysis de Schlömilch*; le *Traité d'Algèbre élémentaire* qu'il a publié en 1871 avec son ancien professeur Falisse (le tome I est arrivé à sa onzième édition, le tome II à la quatrième; l'ouvrage a été traduit en hollandais), manuel très clair mais parfois peu rigoureux sur des points délicats. En 1895, GRAINDORGE a fait paraître une nouvelle édition, revue et augmentée, de la *Géométrie analytique* de Falisse.

L'œuvre de GRAINDORGE est surtout didactique; cependant ses publications renferment certaines parties originales, des additions ou des développements importants apportés aux travaux des maîtres de la science.

L'Université de Liége perd en GRAINDORGE un excellent professeur. Les qualités dominantes de son enseignement étaient une grande clarté d'exposition et une juste mesure dans les développements d'un programme assez chargé. (*Rédaction.*)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 976.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 239).

Une droite (Δ) ***rencontre une lemniscate de Bernoulli aux points*** A, B, C, D. ***Si*** P ***est la projection du point double sur*** (Δ) ***et si a désigne la longueur du demi-axe de la courbe, on a la relation***

$$OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD = 2\overline{OP}^2 \cdot a^2.$$ (E. N. Barisien.)

Solution par MM. Droz-Farny, Déprez, Klompers, Soons, Hacken, Retali, Gillet ***et un*** anonyme (*). La lemniscate et la droite ont respectivement pour équation

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\omega, \quad \rho = \frac{d}{\cos(\omega - \alpha)}.$$

De la première égalité on déduit facilement cos ω et sin ω; en substituant les valeurs dans la seconde, on obtient

$$\rho^8 + 4a^2\rho^6 \cos 2\alpha + 4a^2(a^2 \cos^2 2\alpha - d^2 \cos 2\alpha)\rho^4 - 8a^4d^2\rho^2 + 4a^4d^4 = 0,$$

équation qui a pour racines OA, OB, OC, OD. On en déduit immédiatement la relation proposée.

Question 987.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 264).

Sur les côtés d'un triangle ABC ***on construit extérieurement les carrés*** ABDE, BCFG, CAHI. ***Soient :*** A′, B′, C′ ***les milieux des côtés du triangle*** ABC; A″, B″, C″ ***les milieux des droites*** HE, DG, FI; O_a, O_b, O_c ***les centres des carrés. Démontrer que les droites*** A′A″, B′B″, C′C″ ***sont égales aux côtés du triangle*** $O_aO_bO_c$ ***et passent par le centre du cercle circonscrit à ce triangle.*** (Déprez.)

Solution par MM. Droz-Farny, Mandart, Hacken, Deschacht (Louvain) et Verhelst (Anvers). Les triangles BAH et EAC ayant

---

(*) Prière à nos correspondants de signer *chacune* des solutions qu'ils nous envoient.

chacun un angle égal $90° + A$ compris entre des côtés égaux chacun à chacun sont égaux ; comme AH est perpendiculaire sur AC et AE perpendiculaire sur AB, les troisièmes côtés BH et CE seront égaux et perpendiculaires. Le quadrilatère BEHC est donc un pseudocarré et par conséquent le parallélogramme $A''O_bA'O_c$ des milieux des côtés est un carré. $A'A''$ est donc égale à O_bO_c et elle est médiatrice du triangle $O_aO_bO_c$.

Autres solutions par MM. Klompers, Cristescu, A. Francq, Delahaye. M. Jonesco se sert des équipollences.

En observant que AA'' est perpendiculaire à BC et égale à $\frac{1}{2}$ BC, et par suite égale et parallèle à O_aA', on voit que $A''A'$ et AO_a sont des lignes égales et parallèles. Le théorème de M. Déprez conduit donc facilement à la proposition que MM. Van Aubel et moi, nous avons signalée presque en même temps dans la *Nouvelle Correspondance*, t. IV, pp. 42 et 142 : *Les droites* AO_a, BO_b, CO_c *sont respectivement égales et perpendiculaires aux côtés du triangle* $O_aO_bO_c$. La question 987 se déduit aussi de la propriété que A' *est le centre d'un carré construit sur* O_bO_c (loc. cit.) ; comme on peut intervertir les rôles des triangles ABC, AHE, A'' est le centre du second carré construit sur O_bO_c.

M. Delahaye rappelle l'égalité suivante proposée dans le *Journal de Vuibert*, t. X, pp. 96 et 114 (Voir aussi *loc. cit.*, p. 145) :

$$O_aO_bO_c = ABC\left(1 + \frac{1}{2}\cot V\right) = ABC + \frac{1}{8}(a^2 + b^2 + c^2),$$

V étant l'angle de Brocard de ABC. (J. N.)

Question 988.

(Voir *Mathesis*, (2) IV, p. 264).

Toutes les paraboles qui touchent une droite donnée AB *en un point donné* A, *et dont la directrice passe par un point fixe* P, *ont une seconde tangente commune t. Si le point* P *parcourt une droite donnée d, la droite t enveloppe une parabole qui touche* AB *en* A. (J. N.).

Solution par MM. Droz-Farny, Déprez, Buisseret *et* Gob. On sait que l'orthocentre d'un triangle circonscrit à une parabole est sur la directrice de cette courbe. Donc, si l'on considère toutes les paraboles qui touchent deux droites données AB et AC et dont la directrice passe par un point donné P, elles admettront nécessairement une troisième tangente que l'on obtient en cherchant le troisième côté d'un triangle dont on donne deux côtés et l'orthocentre P. La circonférence circonscrite à ce triangle sera le lieu des foyers de toutes ces paraboles.

Supposons les deux tangentes AB et AC infiniment voisines; on trouve alors immédiatement que toutes les paraboles qui touchent une droite donnée AB en un point donné A et dont la directrice passe par un point fixe P, ont une seconde tangente commune que l'on obtient ainsi : de P on abaisse la perpendiculaire PB sur AB et de B la perpendiculaire BD sur PA. BD sera la seconde tangente commune t. La circonférence passant par A et B et tangente en B à t sera le lieu des foyers de toutes ces paraboles. La démonstration directe serait d'ailleurs très aisée.

Supposons que P se meuve sur une droite donnée d. Il s'agit de démontrer que BD $\equiv t$ enveloppe une parabole. Abaissons de A une perpendiculaire AE sur d et de E une perpendiculaire Eg sur AB. Prolongeons Eg d'une longueur gF = Eg, enfin menons par g une parallèle gL à d, qui rencontre BD en M. t coupe gL en M; il est facile de démontrer que l'angle BMF = 90°.

En effet, dans le quadrilatère inscriptible BPEA on a

$$\text{angle BE}g = 90° - \text{EBA} = 90° - \text{EPA} = \text{PAE}.$$

Mais angle BEg = BFg et angle DML = PAE; donc BFg = BGg et par conséquent le quadrilatère BMFg est inscriptible et BMF = BgF = 90°.

Comme FA = AE il en résulte que t enveloppe une parabole admettant gL comme tangente au sommet, d comme directrice, F comme foyer et qui touche AB en A.

Remarque. Si d coupe AB en R sous un angle φ, et que l'on pose AR = a, on aura pour le paramètre de la parabole

$$p = a \sin 2\varphi \cos \varphi.$$

Solution analytique par MM. Déprez et J. Jonesco. Prenons pour axes la droite AB et une perpendiculaire Ay à cette droite. L'équation d'une parabole touchant AB en A sera

$$(y - \lambda x)^2 - \mu y = 0, \qquad (1)$$

où le diamètre conjugué avec AB a pour équation $y - \lambda x = 0$.

La directrice est perpendiculaire à ce diamètre et passe par l'intersection de AB avec la tangente parallèle à Ay; son équation est donc

$$\lambda y + x - \frac{\mu}{4\lambda} = 0.$$

Si a, b sont les coordonnées de P, on doit avoir

$$\lambda b + a - \frac{\mu}{4\lambda} = 0. \qquad (2)$$

Si l'on élimine μ entre (1) et (2), on trouve pour la parabole variable

$$(y - \lambda x)^2 - 4\lambda(\lambda b + a)y = 0,$$

et pour son enveloppe

$$y^2(ax + by - a^2) = 0.$$

Cette enveloppe se compose donc de la droite AB et de la perpendiculaire t abaissée sur AP de la projection de P sur AB.

Si P parcourt une droite $y = mx + n$, l'équation de t peut prendre la forme

$$ax + (ma + n)y - a^2 = 0;$$

l'enveloppe de t est représentée par l'équation

$$(x + my)^2 + 4ny = 0;$$

c'est donc une parabole tangente à AB en A et ayant pour directrice la droite que parcourt P.

Remarque (due à M. Déprez). Comme dans le cas général d'une parabole inscrite à un triangle fixe, on a pour la parabole considérée dans la question 988 les propriétés suivantes : le foyer décrit une circonférence; la tangente au sommet enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements, et il en est de même de l'axe; le sommet décrit une quartique.

---

*Question 995.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 280.)

Construire un pseudocarré, connaissant les longueurs de trois côtés. Quand le quadrilatère sera-t-il inscriptible? Quand sera-t-il circonscriptible? (J. N.).

Solution par MM. Klompers (Anvers) *et* Colart (Huy). Supposons donnés les côtés AB = a, BC = b, CD = c. D'après un théorème connu (*Mathesis* (2), V, p. 119), les carrés construits vers l'intérieur sur les côtés AB, CD, ont même centre K; il en résulte que l'on connaît les côtés

$$BC = b, \quad KB = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad KC = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

du triangle BKC. Nous pourrons donc construire successivement les triangles CKD, CKB, AKB.

Pour que le problème soit possible, on doit avoir

$$(c-a) < b\sqrt{2} < c+a.$$

Le pseudocarré inscriptible est un trapèze isoscèle ; la condition pour qu'il en soit ainsi est $a = c$, ou $a^2 + c^2 = 2b^2$.

Si le pseudocarré est circonscriptible, on a simultanément

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2, \quad a + c = b + d,$$

d'où l'on conclut $ac = b'd$, ensuite $a = b$ et $c = d$ ou $a = d$, $c = d$. La figure est donc un carré.

Solution par M. Droz Farny. Nous nous donnons les côtés $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ du pseudocarré ABCD ; désignons par O l'intersection des diagonales AC, BD. Menons par les sommets des parallèles aux diagonales opposées ; nous formons ainsi quatre rectangles AOBX, OBYC, OCZD, ODUA. Comme $OX = a$, $OY = b$, $OC = c$, la question revient à mener par un même point O trois droites égales à a, b, c et dont les extrémités X, Y, Z soient les sommets d'un triangle rectangle isoscèle. Or une rotation autour de Y qui amène YZ sur YX, fait prendre au triangle YZO la position YXW, et l'on aura $XW = OZ = c$. On construira donc le triangle rectangle isoscèle OYW sur $OY = b$ puis le triangle OXW ayant pour côtés $OX = a$, $WX = c$; on achèvera le carré XYZU et les parallèles aux côtés par O feront connaître les sommets du pseudocarré.

Solution d'après M. J. Jonescu. On donne les côtés $AB = a$, $BC = b$, $AD = d$ du pseudocarré ABCD. Menons DD', CC' perpendiculaires sur AB ; les triangles rectangles ACC', DBD' dont les côtés sont deux à deux perpendiculaires et dont les hypoténuses sont égales, sont égaux, et l'on a $AC' = DD'$, $BD' = CC'$. Menons encore DE perpendiculaire et égale à BC ; les projections de DE sur AB, CC' sont égales à celles de BC sur CC', AB, ou égales à CC', C'B. De là on déduit que BE est perpendiculaire et égale à AB.

Par analogie, si l'on mène CG perpendiculaire et égale à AD, AG sera perpendiculaire et égale à AD.

De là, la solution suivante : sur $AB = a$ construire un carré ABEG ;

sur AE, BG construire des triangles ADE, GCB dont les deux autres côtés sont égaux à d, b.

Les égalités $AC' = DD'$, $BD' = CC'$ sont dues à M. Jonescu; notre correspondant en a déduit par le calcul l'existence du triangle ADE ayant pour côtés d, b, $a\sqrt{2}$ et pour angle $DEA = 45° - ABC$. (J. N.)

Une solution analogue à celle de M. Jonescu, due à M. Dépres sera analysée plus tard.

Question CCXIX.

(Voir N. C. M., t. III, p. 32).

Si p et q sont des nombres entiers, différents de zéro, et si l'équation

$$y^4 + 2(2p-1)y^2 + 8qy - (4p-1) = 0 \tag{1}$$

a une racine entière, de signe contraire à q, l'équation

$$x^3 + px + q = 0 \tag{2}$$

a au moins une racine réelle, incommensurable. (S. Réalis.)

Solution par M. Fauquembergue. Mettons l'équation (1) sous la forme

$$(y^2-1)^2 + 4p(y^2-1) + 8qy = 0.$$

On voit ainsi qu'elle ne peut avoir pour solutions $y = \pm 1$; autrement q serait nul, ce qui est contraire à l'hypothèse.

De plus, une racine entière ne peut être qu'impaire; désignons-la par $2\alpha + 1$, nous aurons l'identité

$$2\alpha^2(\alpha+1)^2 + 2p\alpha(\alpha+1) + q(2\alpha+1) = 0. \tag{3}$$

Cela étant remarqué, remplaçons x par α dans l'équation (2), et désignons par $f(\alpha)$ le résultat de la substitution :

$$f(\alpha) = \alpha^3 + p\alpha + q.$$

Multipliant les deux membres de cette égalité par $2(\alpha+1)^2$, ce qui ne change pas le signe de $f(\alpha)$, et éliminant p au moyen de la relation (3), on trouve :

$$2(\alpha+1)^2 f(\alpha) = -2\alpha^2(\alpha+1)^2 + q(\alpha+1).$$

Or, d'après l'hypothèse, $2\alpha+1$ et q, et aussi $\alpha+1$ et q sont de signes contraires. Donc $f(\alpha)$ est négative.

En procédant de la même manière, on trouve

$$2\alpha^2 f(\alpha+1) = 2\alpha^2(\alpha+1)^4 - q\alpha.$$

Le produit $q\alpha$ étant négatif, d'après l'hypothèse, $f(\alpha+1)$ est positive.

On en conclut que l'équation (2) a au moins une racine réelle, comprise entre les deux entiers consécutifs α et $\alpha+1$, et par suite non entière.

De plus, cette racine ne peut être fractionnaire puisque le coefficient de la plus haute puissance de x est l'unité; donc elle est incommensurable.

Parthenay, 8 juin 1895.

QUESTIONS D'EXAMEN.

719. Quand deux triangles (tétraèdres) ont leurs sommets deux à deux sur trois (quatre) droites parallèles entre elles, si l'on tire une transversale quelconque parallèle à ces droites, les segments compris sur cette transversale entre les angles (dièdres) du premier triangle (tétraèdre) seront proportionnels aux segments compris entre les angles (dièdres) correspondants du second triangle (tétraèdre). (CHASLES).

720. Un plan qui se meut parallèlement à lui même, rencontre des droites données aux points A, B, C,... Le centre de gravité de ces points pour des masses données α, β, γ,... décrit une droite. (CHASLES).

721. Une transversale qui se meut parallèlement à elle-même, rencontre des plans donnés aux points A, B, C,... Le centre de gravité de ces points pour des masses données α, β, γ,... décrit un plan. (CHASLES).

722. Soient A la valeur nominale d'un billet, E son escompte en dehors, e son escompte en dedans; on a

$$A=\frac{Ee}{E-e}, \qquad \frac{1}{A}=\frac{1}{e}-\frac{1}{E};$$

c'est-à-dire que *la valeur nominale d'un billet est égale au produit des escomptes en dehors et en dedans, divisé par leur différence;* ou, autrement, que *l'inverse de la valeur nominale d'un billet est égale à la différence des inverses des escomptes en dedans et en dehors.* (E. GELIN.)

723. Étant donnés deux triangles quelconques ABC et A'B'C', tracer un troisième triangle $A_1B_1C_1$ homothétique à A'B'C' et tel que les côtés non correspondants des deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ se coupent en

six points appartenant à une même circonférence. — Démontrer que ce problème est impossible ou admet une infinité de solutions.

L'antiparallèle de B'C' par rapport à l'angle BAC et l'antiparallèle de BC par rapport à l'angle B'A'C' doivent avoir la même direction. — Les droites AA_1, BB_1, CC_1 dont on détermine facilement les directions sont concourantes.

724. Si un point A se meut sur un petit cercle d'une sphère et que B, C désignent les extrémités d'un diamètre de ce cercle, on a

$$\operatorname{tg} ABC \cdot \operatorname{tg} ACB = \cos^2 \tfrac{1}{2} BC, \quad \sin^2 \tfrac{1}{2} AB + \sin^2 \tfrac{1}{2} AC = \sin^2 \tfrac{1}{2} BC,$$
$$1 + \cos BC = \cos AB + \cos AC.$$

QUESTIONS PROPOSÉES,

1956. Soient A, B, C, D les sommets consécutifs d'un carré donné. Soit P un point tel que la droite de Brocard du triangle PBD passe par le pied de la symédiane issue de P dans le même triangle. Démontrer que le cercle de Brocard du triangle PAC passe par le pied de la bissectrice issue de P dans ce dernier triangle, et que le point P décrit une ellipse de Cassini, normale en P à la symédiane du triangle PAC. (Déprez.)

1957. Si p est un nombre premier, on a

$$[1.3.5.7.... \times (p-2)]^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p.}$$

(Stuyvaert.)

***1958.** Démontrer que les nombres qui, divisés par $a, b, c, \ldots$ laissent respectivement les restes $a', b', c', \ldots$ sont de la forme $mt + n$, t désignant un nombre entier quelconque. Signification des nombres m et n.

(H. Brocard.)

1959. Sur trois droites concourantes Ox, Oy, Oz on prend les couples de points AA', BB', CC'. Les plans A'BC, B'CA, C'AB se coupent en un point S; la droite OS rencontre les plans ABC, A'B'C' aux points D, D'. Démontrer que le rapport anharmonique (OSDD') a une valeur constante. (J. N.)

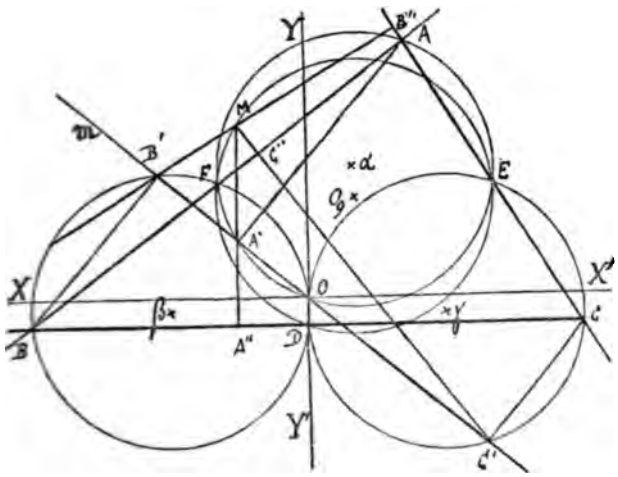
Rectifications. — A la dernière ligne de la page 6, les petits radicaux doivent porter sur $a^2 + b^2$ seulement et non sur $+a$ et $-a$.

×THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE(*).

Par M. Soons, professeur à Tirlemont.

On projette les sommets d'un triangle ABC *en* A', B', C' *sur une droite quelconque m du plan* ABC; *on mène ensuite les droites* A'A'', B'B'', C'C'' *respectivement perpendiculaires sur* BC, CA, AB. *Ces droites concourent en un même point* M.

Lorsque m passe par le centre O *du cercle* ABC, M *est sur le cercle des neuf points du triangle* ABC.



1. La première partie de cette proposition est connue. Qu'il me suffise d'en rappeler la démonstration suivante :

Si l'on appelle M, M' les points de rencontre de A'A'' avec B'B'',

(*) Dans la question 112 de la *N. C. M.* (t. II, p. 189), j'ai proposé la première partie de la proposition de M. Soons, ainsi que l'étude de la transformation (*m*, M). Cette première partie a été démontrée géométriquement par M. H. Van Aubel (ibid., t. II, p. 316); la démonstration analytique est très facile si l'on prend *m* pour axe des *x*, une perpendiculaire pour axe des *y*. J'ai donné quelques développements sur la transformation (*m*, M) dans la *N. C. M.*, t. IV, p. 379, mais sans remarquer le curieux théorème de M. Soons.

La première partie est un cas particulier du théorème des triangles orthologiques. Voir aussi le *J. M. E.*, 1884, p. 49. (J. N.)

C'C'' et K celui de AA' avec BC, les triangles B'A'M, C'A'M' sont respectivement semblables aux triangles AKC, AKB parce que les côtés homologues sont perpendiculaires. On en conclut

$$A'M : KC = B'A' : AK, \quad A'M' : KB = C'A' : AK ;$$

d'où, à cause de

$$KC : KB = A'C' : A'B', \quad A'M = A'M'.$$

2. Je vais d'abord démontrer la seconde partie par la géométrie analytique.

Prenons pour axes coordonnés le diamètre OX parallèle à CB et le diamètre perpendiculaire. Les coordonnées des points B, C et l'équation de m étant

$$R \sin A, \ -R \cos A ; \ -R \sin A, \ -R \cos A ; \ y \cos \alpha - x \sin \alpha = 0,$$

les équations des droites BB', CC' sont

$$y \sin \alpha + x \cos \alpha - R \sin (A - \alpha) = 0,$$
$$y \sin \alpha + x \cos \alpha + R \sin (A + \alpha) = 0,$$

et celles des droites B'B'', C'C'' :

$$\left.\begin{aligned} y \sin \alpha + x \cos \alpha - R \sin (A - \alpha) + K (y \cos \alpha - x \sin \alpha) = 0, \\ y \sin \alpha + x \cos \alpha + R \sin (A + \alpha) + K' (y \cos \alpha - x \sin \alpha) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

On détermine K et K' en exprimant que ces lignes ont respectivement pour coefficient angulaire $-\cot g\, C$, $\cot g\, B$; ce qui donne

$$K = tg (C - \alpha), \quad K' = - tg (B + \alpha),$$

et au lieu des équations (1) :

$$\left.\begin{aligned} y \sin C + x \cos C - R \sin (A - \alpha) \cos (C - \alpha) = 0, \\ - y \sin B + x \cos B - R \sin (A + \alpha) \cos (B + \alpha) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Le point M satisfait aux égalités (2); donc pour obtenir le lieu qu'il décrit lorsque m tourne autour de O, il suffit d'éliminer α. A cet effet, transformons les produits de lignes trigonométriques en sommes :

$$\left.\begin{aligned} 2y \sin C + 2x \cos C - R \sin (A - C) = R \sin (B + 2\alpha), \\ 2y \sin B - 2x \cos B - R \sin (A - B) = R \sin (C - 2\alpha); \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

après avoir développé $\sin (B + 2\alpha)$, $\sin (C - 2\alpha)$, résolvons les équations (3) par rapport à $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$:

$$\left.\begin{aligned} R \sin 2\alpha = 2x \cos (B - C) - 2y \sin (B - C) - 2R \sin (B - C) \cos A, \\ R \cos 2\alpha = 2x \sin (B - C) + 2y \cos (B - C) + 2R \cos (B - C) \cos A - R; \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

en ajoutant ces équations (4) après les avoir élevées au carré, nous aurons

$$\left[x - \frac{R}{2}\sin(B - C)\right]^2 + \left[y - \frac{R\cos(B - C) - 2R\cos A}{2}\right]^2 = \frac{R^2}{4}.$$

Le lieu cherché est donc le cercle des neuf points du triangle ABC.

Soient D, E, F les milieux de BC, CA, AB; en faisant passer m par l'un de ces points, on voit immédiatement que ces points appartiennent au lieu. Lorsque m est parallèle à un côté de ABC, M est au milieu de AH, BH ou CH, H désignant l'orthocentre; lorsque m passe par A, B ou C, M est au pied d'une hauteur de ABC.

3. Le lieu que nous venons de traiter par l'analyse, peut s'obtenir par la géométrie élémentaire.

Sur OA, OB, OC comme diamètres décrivons trois circonférences α, β, γ; elles passeront respectivement par les points A', B', C' et par les milieux de deux côtés de ABC.

Les droites EF, FD, DE sont respectivement perpendiculaires au milieu des droites MA', MB', MC'; autrement dit, les points F, D, E sont les centres des cercles circonscrits aux triangles MA'B', MB'C', MC'A'. En effet, AA' et BB' étant perpendiculaires à A'B', la perpendiculaire au milieu de A'B' passe au milieu de AB; de plus

$$\textit{angle}\ FB'A' = FBO = 90° - BCA = 90° - B'MA';$$

donc F est le centre du cercle MB'A'. La perpendiculaire au milieu de B'M passe donc par F, et comme elle est parallèle à AC, elle se confond avec FD. D'après cela, les projections de M sur les côtés du triangle FDE sont sur la parallèle à m menée à égale distance de M et m. M est donc un point de la circonférence circonscrite au triangle FDE.

Réciproquement, M étant un point quelconque du cercle des neuf points d'un triangle ABC, les symétriques A', B', C' de M par rapport aux droites joignant les milieux des côtés de ABC sont sur une même droite m passant par le centre du cercle ABC, et les perpendiculaires élevées sur m en A', B', C' passent respectivement par A, B, C.

Note. Prenons pour le point fixe O un point quelconque du plan ABC. Le lieu décrit par M lorsque m tourne autour de O se ramène au suivant:

Deux circonférences β, γ *se coupent en un point* O.

On mène par O *une sécante quelconque* m *qui rencontre les deux courbes en* B', C'. *Par ces points on mène des droites* B'M, C'M *parallèles à deux directions données. Trouver le lieu de leur point d'intersection* M.

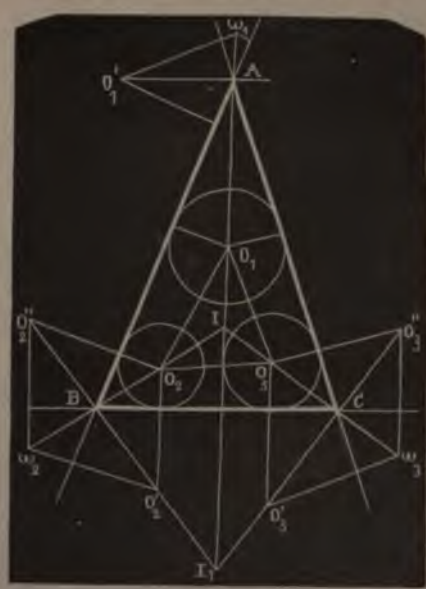
Ce lieu est une conique. Si nous revenons au triangle ABC, nous trouvons immédiatement neuf points de la conique (M) en considérant les positions où m est perpendiculaire ou parallèle à un côté de ABC, ou passe par un sommet. (J. N.)

SUR LES TRIANGLES FORMÉS PAR LES TANGENTES COMMUNES A TROIS CERCLES DONNÉS;

par M. E.-N. Barisien.

(*Suite;* voir pages 33-37.)

Triangles intérieurs. Supposons les centres des cercles donnés en O'_1, O'_2, O'_3 (*). Nous avons



$$\left.\begin{aligned} a &= \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B - R_3 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C, \\ b &= \beta_1 + R_3 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C - R_1 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A, \\ c &= \gamma_1 + R_1 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A - R_2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B, \end{aligned}\right\} (8)$$

Ici, il ne faut pas chercher à déterminer r, on aurait une équation trop compliquée; il est préférable de chercher r_1.

Les équations (8) donnent, par addition et soustraction,

$$p = t,$$

$$p_1 = t_1 + R_1 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C - R_2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B,$$

$$p_2 = t_2 + R_1 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A - R_3 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C,$$

$$p_3 = t_3 + R_2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B - R_1 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A,$$

(*) La figure, qui se rapporte à tous les cas étudiés, aurait déjà dû paraître dans la livraison précédente.

Mais

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r_1}{p}=\frac{r_1}{t},\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{p_3}{r_1},\quad \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{p_2}{r_1}; \tag{9}$$

par suite,

$$p_1=t+\frac{R_1p_2}{r_1}-\frac{R_1p_3}{r_1},\quad p_2=t_2+\frac{R_1r_1}{t}-\frac{R_2p_2}{r_1},$$

$$p_3=t_3+\frac{R_2p_3}{r_1}-\frac{R_1r_1}{t}.$$

Ces équations linéaires en p_1, p_2, p_3 donnent

$$p_2=\frac{r_1}{t}\frac{tt_2+R_1r_1}{r_1+R_3},\quad p_3=\frac{r_1}{t}\frac{tt_3-R_1r_1}{r_1-R_2},$$

$$p_1=t_1+\frac{R_3}{t}\frac{tt_2+R_1r_1}{r_1+R_3}-\frac{R_2}{t}\frac{tt_3-R_1r_1}{r_1-R_2}.$$

Substituant ces valeurs dans la relation

$$p_1r_1=\sqrt{pp_1p_2p_3},$$

on obtient

$$r_1^2[(\beta_1+\gamma_1)^2-\alpha_1^2+4R_1(R_1+R_2+R_3)]-4r_1t[\beta_1(R_1+R_2)-\gamma_1(R_1+R_3)]-t^2[4R_2R_3+\alpha_1^2-(\beta_1-\gamma_1)^2]=0.$$

On en déduit

$$r_1=(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)\frac{\beta_1+(R_1+R_3)-\gamma_1(R_1+R_3)\pm 2U}{(\beta_1+\gamma_1)^2-\alpha_1^2+4R_1(R_1+R_2+R_3)}.$$

Une permutation tournante effectuée sur $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ et sur R_1, R_2, R_3 donnera les valeurs de r_2 et r_3. Les deux signes placés devant U correspondent respectivement aux triangles $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ et $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1$; toutefois, il faut changer le signe de l'une des valeurs de r_1.

Il est maintenant facile de trouver les autres éléments des triangles $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1$.

Pour passer aux triangles $\alpha'_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_1\beta'_1\gamma'_1$, on change a en $-a$, et α en $-\alpha$.

Triangles mixtes. Ces triangles se divisent encore en deux groupes : l'un comprenant les triangles formés par deux tangentes intérieures et une tangente extérieure, le second composé des triangles qui ont pour côtés deux tangentes extérieures et une tangente intérieure.

Recherchons les éléments du triangle $\alpha_1\beta_1\gamma$; les centres des cercles sont représentés par O_1, O'_2, O''_3. Nous avons ici

$$\left.\begin{aligned} a &= \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg}\frac{B}{2} - R_3 \operatorname{tg}\frac{C}{2}, \\ b &= \beta_1 + R_1 \operatorname{cotg}\frac{A}{2} + R_3 \operatorname{tg}\frac{C}{2}, \\ c &= \gamma + R_1 \operatorname{cotg}\frac{A}{2} - R_2 \operatorname{tg}\frac{B}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Posons, par analogie avec ce que nous avons fait précédemment,

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma = 2u, \quad -\alpha_1 + \beta_1 + \gamma = 2u_1, \quad \alpha_1 - \beta_1 + \gamma = 2u_2,$$
$$\alpha_1 + \beta_1 - \gamma = 2u_3.$$

On déduit alors, des relations (10), les suivantes :

$$p = u + R_1 \operatorname{cotg}\frac{A}{2} = u + \frac{R_1 p}{r_1},$$

$$p_2 = u_2 - R_3 \operatorname{tg}\frac{C}{2} = u_2 - \frac{R_3 p_2}{r_1}, \quad p_3 = u_3 + R_2 \operatorname{tg}\frac{B}{2} = u_3 + \frac{R_2 p_3}{r_1};$$

celles-ci donnent

$$p = \frac{u r_1}{r_1 - R_1}, \quad p_2 = \frac{u_2 r_1}{r_1 + R_3}, \quad p_3 = \frac{u_3 r_1}{r_1 - R_2}.$$

Portant ces valeurs dans la formule $p_1 r_1 = \sqrt{p p_1 p_2 p_3}$, on trouve

$$\frac{u u_2 u_3}{(r_1 - R_1)(r_1 - R_2)(r_1 + R_3)} = \frac{u}{r_1 - R_1} - \frac{u_2}{r_1 + R_3} - \frac{u_3}{r_1 - R_2}. \qquad (11)$$

D'après cela, on passe du triangle extérieur $\alpha'\beta\gamma$ au triangle mixte $\alpha_1\beta_1\gamma$ en changeant R_3, α, β en $-R_3$, α_1, β_1. On a donc, dans ce cas :

$$r_1 = \frac{-\alpha_1 R_1 + \beta_1 R_2 - \gamma R_3 + 2U}{\beta_1 + \gamma - \alpha_1}.$$

Nous laissons au lecteur le soin de chercher comment on obtient les autres triangles mixtes du premier groupe.

Étudions maintenant le triangle $\alpha\beta\gamma_1$, pour lequel les centres des cercles donnés sont O'_1, O_2, O_3. Nous avons

$$\left.\begin{aligned} a &= \alpha + R_2 \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + R_3 \operatorname{cotg}\frac{C}{2}, \\ b &= \beta + R_3 \operatorname{cotg}\frac{C}{2} - R_1 \operatorname{tg}\frac{A}{2}, \\ c &= \gamma_1 + R_2 \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + R_1 \operatorname{tg}\frac{A}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Posons

$$\alpha+\beta+\gamma_1=2v, \quad -\alpha+\beta+\gamma_1=2v_1, \quad \alpha-\beta+\gamma_1=2v_2,$$
$$\alpha+\beta-\gamma_1=2v_3.$$

Les relations (12) donneront

$$p_1=v_1,$$
$$p_2=v_2+R_2\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+R_1\operatorname{tg}\frac{A}{2}=v_2+\frac{R_2p_2}{r}+\frac{R_1r}{v_1},$$
$$p_3=v_3+R_3\operatorname{cotg}\frac{C}{2}-R_1\operatorname{tg}\frac{A}{2}=v_3+\frac{R_3p_3}{r}-\frac{R_1r}{v_1}.$$

Substituons ces valeurs dans la formule

$$pr=\sqrt{pp_1p_2p_3};$$

l'équation du second degré en r qu'on obtient ainsi ne diffère de celle relative au triangle intérieur $\alpha'_1\beta_1\gamma_1$ que par le changement de R_3, α_1, β_1 en $-R_3$, α, β, de sorte que

$$r=(\beta+\gamma_1+\alpha)\frac{\beta(R_1+R_2)-\gamma_1(R_1-R_3)+2U}{(\beta+\gamma_1)^2-\alpha^2+4R_1(R_1+R_2-R_3)}.$$

Les deux rayons obtenus par des formules analogues sont r_2 et r_3. Donc, le second groupe de 24 triangles mixtes a toutes ses formules dépendant de celles des triangles intérieurs.

Le lecteur trouvera facilement comment on passe du triangle $\alpha\beta\gamma_1$ aux autres triangles du même groupe.

La conclusion à tirer de cette étude est que les 64 triangles se ramènent à 2 types : 32 triangles dépendant par des combinaisons de signes et de permutations de lettres des formules des triangles extérieurs; les 32 autres s'obtiennent par les formules des triangles intérieurs.

Cas particulier des cercles tangents entre eux. Nous supposons trois cercles tangents extérieurement deux à deux.

Les triangles intérieurs n'existent pas, puisque les trois tangentes intérieures passent par un même point. On a 8 triangles extérieurs, et 18 triangles mixtes dont 6 formés par deux tangentes intérieures et une extérieure, et 12 formés par une tangente intérieure et deux extérieures.

On a alors

$$D_1=R_2+R_3, \quad D_2=R_3+R_1, \quad D_3=R_1+R_2,$$
$$\alpha=2\sqrt{R_2R_3}, \quad \beta=2\sqrt{R_3R_1}, \quad \gamma=2\sqrt{R_1R_2},$$
$$\alpha_1=\beta_1=\gamma_1=v, \quad U=\sqrt{R_1R_2R_3(R_1+R_2+R_3)}.$$

Pour les triangles extérieurs, la formule (7) devient

$$r = \frac{R_1\sqrt{R_2R_3} + R_2\sqrt{R_3R_1} + R_3\sqrt{R_1R_2} + \sqrt{R_1R_2R_3(R_1+R_2+R_3)}}{\sqrt{R_1R_2} + \sqrt{R_2R_3} + \sqrt{R_3R_1}}$$

ou

$$r = \frac{\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2} + \sqrt{R_3} + \sqrt{R_1 + R_2 + R_3}}{\frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}} + \frac{1}{\sqrt{R_3}}}.$$

Les combinaisons de signes des radicaux donnent les valeurs de r des 8 triangles extérieurs.

Pour les six triangles formés par deux tangentes intérieures et une extérieure, on a :

$$\alpha_1\beta_1\gamma \text{ et } \alpha_1\beta_1\gamma' : r_3 = \mp R_3 + \sqrt{R_3(R_1+R_2+R_3)},$$
$$\alpha_1\beta_1\gamma \text{ et } \alpha_1\gamma_1\beta' : r_2 = \mp R_2 + \sqrt{R_2(R_1+R_2+R_3)},$$
$$\alpha\beta_1\gamma_1 \text{ et } \alpha\beta_1\gamma_1' : r_1 = \mp R_1 + \sqrt{R_1(R_1+R_2+R_3)}.$$

Pour les douze triangles formés par deux tangentes extérieures et une intérieure, on fera dans les formules générales l'une des quantités $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ égale à zéro.

SUR LE CALCUL DES ANNUITÉS VIAGÈRES ;

par M. E. FAGNART, professeur à l'Athénée royal de Gand.

Une erreur fréquente dans l'évaluation des annuités viagères consiste à représenter la durée de la vie, terme inconnu, par la durée de la vie moyenne ou de la vie probable. Le calcul des annuités viagères n'est plus alors qu'un simple problème d'annuité certaine.

Il n'est donc pas inutile de rappeler la véritable valeur de l'annuité viagère et le sens de l'erreur que l'on commet lorsqu'on prend pour base du calcul la durée de la vie moyenne ou de la vie probable.

Dans ce qui va suivre, nous emploierons les notations de BOUDIN (*Leçons sur le calcul des probabilités*), qui s'expliquent d'ailleurs d'elles-mêmes.

1. *Valeur de l'annuité viagère de* 1 *franc.* — Calculée par le principe de l'espérance mathématique, elle est :

$$A = \frac{1}{1+\theta}\cdot\frac{V_{m+1}}{V_m} + \frac{1}{(1+\theta)^2}\cdot\frac{V_{m+2}}{V_m} + \cdots + \frac{1}{(1+\theta)^n}\cdot\frac{V_{m+n}}{V_m} \quad (1)$$

C'est la véritable valeur mathématique, en ce sens que si l'on suppose V_m contrats de rente viagère, le fonds AV_m ainsi formé, avec ses intérêts au taux θ, sera suffisant pour payer les termes de rente à leurs échéances successives et sera épuisé à l'extinction totale des V_m rentiers.

Cette dernière considération permet aussi d'établir très simplement la théorie mathématique des annuités viagères, et cela indépendamment de toute notion relative au calcul des probabilités.

En s'inspirant des mêmes principes, l'assureur pourra dans son bilan annuel et pour toute espèce d'assurances, calculer la valeur de son engagement et celle de l'engagement réciproque pris par l'assuré ; en d'autres termes, il pourra contrôler s'il y a équilibre entre l'actif et le passif.

Cette compensation des effets dus au hasard se fera d'autant plus exactement que les deux bases du calcul, c'est-à-dire le taux d'intérêt et la table de mortalité auront été plus convenablement choisis. Le choix du taux du placement des fonds est une question de finances, celui de la table de mortalité est une question de statistique.

Les progrès de la statistique ont actuellement mis les institutions qui s'occupent d'assurances, en possession d'excellentes tables de mortalité *résultant de leurs propres observations* et soumises chaque année à un contrôle permanent par la comparaison annuelle des nombres de décès observés et des décès théoriques. Citons : la table H^m des vingt compagnies anglaises, les tables AF et RF des compagnies françaises, la table RC de la caisse nationale des retraites de France, etc. (*).

2. *Sens de l'erreur que l'on commet lorsqu'on égale la valeur de l'annuité viagère à celle de l'annuité certaine correspondant à la vie moyenne.* A l'aide d'une table d'annuités viagères, on voit immédiatement que l'annuité certaine correspondant à la vie moyenne est supérieure à la véritable valeur de l'annuité viagère.

Car si l'on cherche le nombre d'années de l'annuité certaine égale à la valeur mathématique de l'annuité viagère, on constate que ce nombre d'années, que l'on pourrait appeler *vie mathématique* du rentier, est toujours inférieur à la vie moyenne.

(*) Voir ces tables avec d'autres dans l'*Annuaire du bureau des longitudes* de 1896, pp. 535-546.

On peut du reste donner de ce fait, d'après le « TEXT-BOOK ». (*) une démonstration algébrique :

On sait que la vie moyenne est représentée par l'expression suivante :

$$W_m = \frac{1}{2} + \frac{V_{m+1} + V_{m+2} + \cdots + V_{m+n}}{V_m}$$

soit $W_m = e + f$, où e désigne un nombre entier d'années et f une fraction d'année.

La valeur théorique d'une annuité certaine d'une durée $e + f$, est :

$$A' = \frac{1 - (1+\theta)^{-(e+f)}}{\theta} \qquad (1)$$

$$= \frac{1}{1+\theta} + \frac{1}{(1+\theta)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+\theta)^e} + \frac{1}{(1+\theta)^{e+f}} \cdot \frac{(1+\theta)^f - 1}{\theta}$$

ou en remplaçant le dernier terme par $\frac{f}{(1+\theta)^{e+1}}$, ce qui a pour effet de diminuer la valeur de A' :

$$A' = \frac{1}{1+\theta} + \frac{1}{(1+\theta)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+\theta)^e} + \frac{f}{(1+\theta)^{e+1}} \qquad (2)$$

Or, A sera plus petit que A', si l'on a :

$$\frac{1}{1+\theta} \cdot \frac{V_{m+1}}{V_m} + \frac{1}{(1+\theta)^2} \cdot \frac{V_{m+2}}{V_m} + \cdots + \frac{1}{(1+\theta)^n} \cdot \frac{V_{m+n}}{V_m}$$

$$< \frac{1}{1+\theta} + \frac{1}{(1+\theta)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+\theta)^e} + \frac{f}{(1+\theta)^{e+1}}$$

(*) *Institute of Actuaries' Text-Book of the Principles of Interest, Life Annuities, and Assurances, and their Pratical Application.* Part I. Interest, by W. SUTTON, M. A. of St. John's College, Cambridge, and Fellow of the Institute of Actuaries; Actuary to the Registry of Friendly Societies (in-8° de XVI-174 p.). Part II. Life Contingencies, by GEORGES KING, Fellow of the Institute of Actuaries and Fellow of the Faculty of Actuaries, Actuary of the Atlas Assurance Company (in-8° de XXVII-553 p.). London, C. et E. Layton, 1882 et 1887. Prix : 10 s. 6 d. + 31 s. 6 d. Il existe une traduction française de ces deux volumes, faite par A. BÉGAULT, ancien officier d'artillerie, Actuaire de la Compagnie belge d'Assurances générales sur la vie. Bruylant-Cristophe, Bruxelles, 1891. Prix : 10 fr. + 40 fr.

ou

$$\frac{1}{(1+\theta)^{e+2}}\cdot\frac{V_{m+e+2}}{V_m}+\cdots+\frac{1}{(1+\theta)^n}\cdot\frac{V_{m+n}}{V_m}$$

$$<\frac{1}{1+\theta}\left(1-\frac{V_{m+1}}{V_m}\right)+\cdots+\frac{1}{(1+\theta)^e}\left(1-\frac{V_{m+e}}{V_m}\right)+\frac{1}{(1+\theta)^{e+1}}\left(f-\frac{V_{m+e+1}}{V_m}\right).$$

Or le premier membre de cette inégalité est inférieur à

$$\frac{1}{(1+\theta)^{e+2}}\left(\frac{V_{m+e+2}+\cdots+V_{m+n}}{V_m}\right), \qquad (3)$$

et le second membre est supérieur à

$$\frac{1}{(1+\theta)^{e+1}}\left(e+f-\frac{V_{m+1}+\cdots+V_{m+e+1}}{V_m}\right)$$

ou, d'après la définition de $e+f$, à

$$\frac{1}{(1+\theta)^{e+1}}\left(\frac{1}{2}+\frac{V_{m+e+2}+\cdots+V_{m+n}}{V_m}\right) \qquad (4)$$

Mais l'expression (3) est plus petite que l'expression (4), et à fortiori : $A > A'$.

3. *Vie probable.* Si l'on examine la table H^n, *ajustée* par MM. King et Hardy, on constate que jusqu'à 56 ans, la vie probable est constamment supérieure à la vie moyenne. La même chose se présente pour la table de mortalité dressée par M. Leclerc, pour la Belgique(*).

Ainsi, pour les âges moyens de la vie, jusqu'à 55 ou 60 ans, c'est-à-dire aux âges où se pratiquent principalement les opérations d'assurances, la vie probable est toujours supérieure à la vie moyenne.

Le calcul basé sur la vie probable est donc encore plus erroné que s'il est basé sur la vie moyenne.

(*) *Tables de Mortalité ou de Survie et table de Population pour la Belgique*, par J. M. J. Leclerc, ingénieur en chef honoraire des ponts et chaussées, Président de la Commission centrale de Statistique. (Mémoire extrait du tome XVII du Bulletin de la Commission centrale de statistique).

BIBLIOGRAPHIE.

Compte rendu du bureau local du Comité Lobatchefsky, (1893-1895). — Kazan, Typographie de l'Université impériale. 1895 (25 pages, in-8°).

La souscription Lobatchefsky a produit, tous frais déduits, jusqu'au 1er mai 1895, la somme de 8840 roubles 95 copecks. De cette somme, 6640 roubles 95 copecks serviront à la fondation d'un prix international de 500 roubles, à décerner tous les trois ans au meilleur écrit sur la géométrie, spécialement sur la géométrie non euclidienne, publié, dans les six années qui précèdent l'attribution du prix, en russe, français, allemand, anglais, italien ou latin. Le prix sera décerné pour la première fois, le 3 novembre 1897. Deux bustes de Lobatchefsky seront établis, l'un dans l'enceinte de l'Université, l'autre dans un jardin de Kazan, avec le concours des professeurs et du Conseil municipal de cette ville. Le Comité y consacrera une somme de 2200 roubles. — La société physico-mathématique de Kazan a fondé en cette ville une *Bibliotheca lobatchefskiana* où sont réunis tous les écrits relatifs à la géométrie non euclidienne.

Le compte rendu que nous venons de résumer contient la liste des membres du Comité, des souscripteurs étrangers et des livres contenus dans la Bibliothèque lobatchefskienne.

Étude sur l'Espace et le Temps par G. Lechalas, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Paris, Alcan, 1896. (In 18 de 201 pages). Prix : fr. 2.50.

Voir dans la *Revue des questions scientifiques*, janvier 1896, 2e serie, t. IX, pp. 266-273, notre compte rendu de cet ouvrage dont un tiers au moins est consacré à la géométrie non euclidienne, exposée surtout d'après les travaux de M. l'ingénieur Calinon.

Répertoire bibliographique des sciences mathématiques. Première série : Fiches 1 à 100, Paris, Gauthier-Villars et Fils, novembre 1894. Prix : 2 francs.

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik von Moritz Cantor. Dritter (Schluss-) Band Vom Jahre 1668 bis zum 1759. Zweite Abtheilung. Die Zeit von 1700 bis 1726 Mit 30 Figuren im Text Leipzig, Teubner, 1796 (Pages 255-472). Prix : 6 marcs.

Voici les titres des chapitres contenus dans cette 17e section de l'ouvrage capital de M. Cantor. Ch. 93. Histoire des mathématiques. Editions des classiques. Le calcul infinitésimal jusqu'en 1701. Ch. 94. La lutte de priorité entre Newton et Leibniz jusqu'en avril 1712. Ch. 95. Depuis avril 1712. Ch. 96. Analyse combinatoire. Calcul des probabilités. Ch 97. Théorie des séries. Calcul des différences. Ch. 98 Algèbre. Ch. 99. Calcul différentiel; calcul intégral. Géométrie analytique et géométrie projective. Ch. 100. Équations différentielles.

A Primer of the History of mathematics by W. W. Rouse Ball, Fellow and Tutor of Trinity College, Cambridge. London, Macmillan and Co and New-York, 1895 (146 p. in 12). Price : 2 sh.

Essai d'une histoire populaire où l'auteur a voulu esquisser en 137 pages dont 9 sont consacrées à Newton — les tables en occupent 9 autres, — la vie et les découvertes des principaux fondateurs des mathématiques pures et appliquées. Quoique ce livre contienne une foule de renseignements, il nous semble qu'il donne une idée fausse du développement de la science particulièrement dans la partie moderne et surtout dans la plus récente.

L'auteur accorde trop d'importance à des auteurs de second ordre, anglais surtout, et semble en ignorer d'autres qu'il est impardonnable de ne citer qu'en passant (Dirichlet, par exemple). Leibniz et Cauchy sont sacrifiés; etc., etc. Il y a aussi bien des erreurs de détail.

— —

Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, par E. Goursat, maître de conférences à l'école normale supérieure. Tome I. Problème de Cauchy. Caractéristiques. Intégrales intermédiaires. Paris, A. Hermann, 1896 (In-8° de VIII-226 pages). Prix : 7 fr. 50.

Ce premier volume contient la théorie des caractéristiques, l'exposition détaillée des méthodes d'intégration de Monge et d'Ampère et la recherche des intégrales intermédiaires pour des équations de forme quelconque. L'auteur fait remarquer qu'Ampère a employé des transformations de contact tout à fait générales, un demi-siècle avant les travaux de Lie. (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 960.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 176).

Par un point fixe O, *situé dans le plan d'un parallélogramme donné* ABCD, *on mène une sécante quelconque, qui rencontre les côtés* AB, BC, CD, DA *aux points* M, N, P, Q. *Démontrer que le rapport des produits* OM, ON, OP, OQ *ne change pas lorsque la sécante tourne autour de* O. *Généraliser ce théorème par projection centrale.* (J. N.).

Solution par MM. Hacken, Klompers et Poort. Le rapport(OM : OP) est égal au rapport constant des distances de O aux côtés opposés AB, CD du parallélogramme; le rapport (ON : OQ) est égal au rapport constant des distances de O aux côtés opposés BC, DA du parallélogramme. Donc $\frac{OM.\,ON}{OP.\,OQ}$ est constant.

Si l'on transforme le parallélogramme ABCD par projection centrale, on trouve, comme on sait, un quadrilatère complet A'B'C'D'KL. La troisième diagonale KL de ce quadrilatère correspond à la droite de l'infini du plan ABCD. Au point O correspond un point O' et à la droite OM une droite O'M' coupant A'B', B'C', C'D', D'A' aux points M', N', P', Q', projections de M, N, P, Q. Le point T où O'M' coupe la 3e diagonale KL du quadrilatère complet correspond au point de l'infini de la droite OM.

On a

$$(MOP\,\infty) = (M'O'P'T), \quad (NOQ\,\infty) = (N'O'Q'T).$$

Or(*)

$$(MOP\,\infty) = \frac{OM}{OP}, \quad (NOQ\,\infty) = \frac{ON}{OQ},$$

donc $(M'O'P'T) \times (N'O'Q'T)$ est constant. Ce que l'on pouvait voir directement : chacun des rapports anharmoniques $(M'O'P'T)$, $(N'O'Q'T)$ est constant. L'égalité $(M'O'P'T) \times (N'O'Q'T) = c^{te}$ peut s'écrire

$$\frac{O'M' \times TM' \times O'N' \times TN'}{O'P' \times TP' \times O'Q' \times TQ'} = \text{constante}$$

et s'énoncer : *Si par un point quelconque* O', *situé dans le plan d'un quadrilatère complet, on mène une sécante qui rencontre les côtés* A'B', B'C', C'D', D'A' *aux points* M', N', P', Q' *et la 3e diagonale au point* T, *le rapport des produits*

$$O'M' \cdot TM' \cdot O'N' \cdot TN', \quad O'P' \cdot TP' \cdot O'P' \cdot TQ'$$

ne change pas quand la sécante tourne autour du point O'.

Question 970.

(Voir *Mathesis*, (2) IV, p. 216).

Soient deux cercles fixes de centres C *et* C' : *d'un point* M *variable de la circonférence* C, *on décrit une circonférence* Γ *de rayon donné* ρ *qui coupe la circonférence* C' *en* A *et* B.

(*) On désigne ici par (ABCD) le double rapport $\frac{BA}{BC} : \frac{DA}{DC}$. La plupart des auteurs posent $(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$. (J. N.)

1° *L'enveloppe de la corde* AB *est une conique qui a le point* C′ *pour un de ses foyers*;

2° *Le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* ABC *est une circonférence.* (E. Lemoine.)

Solution par M. Tzitzéica (*Bucarest*). 1° Prenons pour axes de coordonnées la ligne CC′ et une perpendiculaire en C. Soient R, R′, a les rayons des cercles C, C′ et la distance CC′. Le cercle mobile et le cercle C′ ont pour équations

$$(x - \mathrm{R}\cos\alpha)^2 + (y - \mathrm{R}\sin\alpha)^2 = \rho^2, \tag{1}$$

$$(x - a)^2 + y^2 = \mathrm{R}'^2. \tag{2}$$

La corde AB est donc représentée par

$$2\mathrm{R}(x\cos\alpha + y\sin\alpha) - 2ax - \mathrm{R}^2 + a^2 - \mathrm{R}'^2 + \rho^2 = 0;$$

et son enveloppe par

$$4\mathrm{R}^2(x^2 + y^2) = (2ax + \mathrm{R}^2 - a^2 + \mathrm{R}'^2 - \rho^2)^2.$$

Cette enveloppe est une conique ayant C pour foyer, CC′ pour axe focal. On peut remarquer que c'est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que C′ est intérieur ou extérieur au cercle C ou sur la circonférence; enfin c'est un cercle lorsque C et C′ sont concentriques.

2° L'équation d'un cercle qui passe par A et B est

$$x^2 + y^2 - 2\mathrm{R}\cos\alpha.\, x - 2\mathrm{R}\sin\alpha.\, y + \mathrm{R}^2 - \rho^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - \mathrm{R}'^2) = 0.$$

S'il passe par C, on a

$$\lambda = \frac{\mathrm{R}^2 - \rho^2}{\mathrm{R}'^2 - a^2}. \tag{3}$$

Son centre est donné par

$$(1 + \lambda)x - \mathrm{R}\cos\alpha - \lambda a = 0, \quad (1 + \lambda)y - \mathrm{R}\sin\alpha = 0,$$

où λ a la valeur (3). On obtient l'équation du lieu demandé, en éliminant α entre les deux équations précédentes. On trouve ainsi

$$(1 + \lambda)^2(x^2 + y^2) - 2\lambda a(1 + \lambda)x + \lambda^2 a^2 - \mathrm{R}^2 = 0,$$

le lieu est donc un cercle.

Remarque. On peut généraliser la question dans l'espace :

On considère deux sphères fixes S, S′ *et une troisième* Σ *de rayon constant* ρ *ayant son centre sur* S.

1° *L'enveloppe du plan radical* P *des sphères* Σ *et* S′ *est une quadrique de révolution ayant le centre de* S *pour un de ses foyers.*

2° *Le lieu des centres des sphères* Σ' *passant par l'intersection de* S' *avec* P *et par le centre de* S *est une sphère.*

3° *Le lieu de la projection du centre de* Σ *sur le plan qui touche* Σ' *au centre de* S *est une sphère.*

On a les équations :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \qquad (S)$$

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = R'^2, \qquad (S')$$

$$(x - R\cos\alpha)^2 + (y - R\cos\beta)^2 + (z - R\cos\gamma)^2 = \rho^2. \qquad (\Sigma)$$

L'enveloppe de P est

$$R^2(x^2 + y^2 + z^2) = (ax - k)^2,$$

ou

$$2k = \rho^2 - R^2 - R'^2 + a^2.$$

Cette surface est donc une quadrique de révolution ; on peut distinguer les hypothèses suivantes, a étant supposé positif :

$R > a$, ellipsoïde ; $R < a$, hyperboloïde ; $R = a$, paraboloïde.

2° L'équation de Σ' est

$$(1+\lambda)(x^2+y^2+z^2) - 2(R\cos\alpha + a\lambda)x - 2R\cos\beta . y - 2R\cos\gamma . z = 0,$$

ou

$$\lambda = \frac{R^2 - \rho^2}{R'^2 - a^2}.$$

Le lieu des centres des sphères Σ' a pour équation

$$(1+\lambda)^2(x^2 + y^2 + z^2) - 2a\lambda(1+\lambda)x + a^2\lambda^2 - R^2 = 0,$$

λ ayant la valeur ci-dessus.

3° La projetante a pour équations

$$\frac{x - R\cos\alpha}{R\cos\alpha + a\lambda} = \frac{y - R\cos\beta}{R\cos\beta} = \frac{z - R\cos\gamma}{R\cos\gamma}.$$

En tenant compte de l'équation du plan tangent considéré

$$(R\cos\alpha + a\lambda)x + R\cos\beta . y + R\cos\gamma . z = 0,$$

on trouve pour l'équation du lieu

$$x^2 + y^2 + z^2 + a\lambda x = 0.$$

De même, dans la question 970, la projection du centre de Γ sur la tangente en C au cercle circonscrit à ABC décrit un cercle.

Solutions analytiques analogues par M. M. V. Retali, Barisien, Barbette, Klompers, Mandart, J. Gillet, Déprez, Droz Farny, Cristescu et J. Jonesco.

MM. Retali et Déprez indiquent une seconde méthode pour établir la première partie de la question 970 : ils démontrent (analytiquement) que la projection de C sur la droite AB décrit une circonférence ; AB enveloppe donc l'antipodaire de C par rapport à cette circonférence. M. Droz Farny fait le raisonnement suivant : Si le point M décrit une courbe Σ, les axes radicaux AB, A'B' du cercle C' combiné successivement avec les cercles de rayon ρ décrits de deux points M, M' de Σ comme centre, et l'axe radical des deux derniers cercles concourent en un même point D ; donc en passant à la limite, c'est-à-dire en faisant tendre M' vers M sur la courbe Σ, on voit que le point de contact de AB avec son enveloppe est sur la normale menée à Σ en M. Il résulte de là que dans la question 970, 1°, il suffit de chercher le lieu de l'intersection de AB avec le rayon CM.

M. Déprez trouve que l'axe radical du cercle donné C et du cercle CAB enveloppe également une conique ayant un foyer en C ; pour le démontrer, il cherche le lieu de la projection de C sur cet axe radical et obtient une circonférence.

Question 974.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 237).

En chaque point d'une ellipse, on considère le cercle ayant pour centre ce point et pour rayon le rayon du cercle osculateur. Le lieu des points d'intersection de ce cercle avec la tangente à l'ellipse se compose de deux courbes égales dont l'aire est équivalente à deux fois l'aire de l'ellipse, augmentée de l'aire de la développée. (E.-N. Barisien.)

Solution par M. Keelhoff. Soient A, B, C, D les sommets de l'ellipse, et A_1, B_1, C_1, D_1 les centres de courbure correspondants ou les rebroussements de la développée. Désignons par M_1 le centre du cercle osculateur au point M de l'ellipse. Lorsque M parcourt l'arc ABC, M_1 parcourt l'arc $A_1B_1C_1$, et la droite MM_1 décrit une aire composée de la demi-ellipse supérieure ABC et de la demi-développée inférieure $A_1B_1C_1$. De même, lorsque M décrit l'arc CDA, la droite MM_1 décrit une aire comprenant la demi-ellipse inférieure CDA et la demi-développée supérieure $C_1D_1A_1$.

D'autre part, si nous faisons tourner le rayon MM_1 autour de M d'un angle droit, toujours dans le même sens, et que MN désigne sa nouvelle position, les deux droites MM_1, MN balaient des aires égales, d'après ce théorème de Steiner :

Dans un même plan, une droite a, *tourne autour de son extrémité et une tangente* b *roule sur une courbe convexe avec la même vitesse angulaire et sous la condition* a = b ; *les droites a et b décrivent des aires égales.*

La droite MN décrit une aire égale à la différence entre l'aire U limitée par la courbe (N) et l'aire E de l'ellipse ; si D est l'aire de la développée, le théorème de Steiner donne

$$U - E = E + D \quad \text{d'où} \quad U = 2E + D.$$

On voit facilement qu'une relation semblable s'applique à toute courbe fermée.

Solution par MM. J. Jonesco *et* Cristescu. Soient $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ les coordonnées d'un point quelconque M de l'ellipse ; prenons sur la tangente, dans un sens déterminé, une longueur MN égale au rayon de courbure MM_1. Si α est l'angle de MN avec l'axe Ox, on a pour les coordonnées de N :

$$x = a\cos\varphi + MN\cos\alpha, \quad y = b\sin\varphi + MN\sin\alpha.$$

Comme

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{b\cos\varphi}{a\sin\varphi}, \quad \sin\alpha = \frac{-b\cos\varphi}{\pm\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}},$$

$$\cos\alpha = \frac{a\sin\varphi}{\pm\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}, \quad MN = \frac{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

on peut écrire

$$x = a\cos\varphi \pm \frac{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}{b}\sin\varphi,$$

$$y = b\sin\varphi \mp \frac{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}{a}\cos\varphi.$$

Prenons les signes supérieurs ; nous aurons

$$x = a\cos\varphi + b\sin\varphi + \frac{c^2\sin^3\varphi}{b}, \quad y = b\sin\varphi - a\cos\varphi + \frac{c^2\cos^3\varphi}{a},$$

$$ydx = \left(b\sin\varphi - a\cos\varphi + \frac{c^2\cos^3\varphi}{a}\right)\left(b\cos\varphi - a\sin\varphi + \frac{3c^2}{b}\sin^2\varphi\cos\varphi\right)d\varphi,$$

$$xdy = \left(a\cos\varphi + b\sin\varphi + \frac{c^2\sin^3\varphi}{b}\right)\left(b\cos\varphi + a\sin\varphi - \frac{3c^2}{a}\cos^2\varphi\sin\varphi\right)d\varphi,$$

$$xdy - ydx = \left(ab + c^2\sin\varphi\cos\varphi + \frac{ac^2}{2b}\sin^4\varphi - \frac{bc^2}{2a}\cos^4\varphi\right)d\varphi.$$

L'aire limitée par la trajectoire de N a pour expression

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x\,dy - y\,dx).$$

En substituant et en observant que

$$\sin^4\varphi = \frac{1}{8}(\cos 4\varphi - 4\cos 2\varphi) + \frac{3}{8},\quad \cos^4\varphi = \frac{1}{8}(\cos 4\varphi + 4\cos 2\varphi) + \frac{3}{8},$$

on trouve

$$U = 2\pi ab + \frac{3}{8}\pi\frac{c^4}{ab}.$$

Le cercle de centre M et de rayon MM_1 rencontre la normale MM_1 en un second point M_1' ; M. Barisien trouve que ce point décrit une courbe fermée ayant pour aire $4E + 3D$.

Question 995.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, 280 et VI, 52.)

Construire un pseudocarré connaissant les longueurs de trois côtés.

(J. N.).

Solution par M. Déprez. Soit le pseudocarré ABCD dont on connaît les côtés $AB = a$, $BC = b$, $AD = d$. Si l'on construit vers CD le carré ABEF, les triangles ABC, BED sont directement égaux comme ayant les côtés AB, AC égaux et perpendiculaires à BE, BD ; donc DE est égal et perpendiculaire à BC. On construira donc le carré ABEF sur a, puis le triangle ADE avec les côtés $AD = d$, $DE = b$. Les perpendiculaires abaissées de A sur BD et de B sur DE détermineront le point C ; on peut encore obtenir C en prenant sur une perpendiculaire abaissée de B sur DE une longueur $BC = b$, ou sur une perpendiculaire menée de A sur BD la longueur $AC = BD$.

Remarque. Quand on donne les sommets A, B et la longueur $BC = b$ le lieu de D est une circonférence décrite du centre E avec le rayon b.

Les lignes BD, AC étant égales et perpendiculaires, on voit immédiatement que les points C, D décrivent des lignes semblables.

Lorsqu'on donne les sommets A, B et la longueur CD, les points C, D décrivent des circonférences, et CD enveloppe une circonférence. Cela résulte de ce que les carrés construits intérieurement sur AB et CD ont le même centre. (J. N.).

Question CCCXIV.

(Voir N. C. M., t. III, p. 433).

Pour quelles valeurs de n la somme des boulets des n premières piles triangulaires est-elle un carré parfait? (E. Lucas.)

Solution par M. E. Fauquembergue. Le nombre des boulets contenus dans une pile triangulaire, dont la base a k boulets au côté, est

$$\frac{k(k+1)(k+2)}{6} \quad \text{ou} \quad \frac{k^3}{6}+\frac{k^2}{2}+\frac{k}{3}.$$

Donc la somme des boulets des n premières piles est

$$\frac{S_3}{6}+\frac{S_2}{2}+\frac{S_1}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}.$$

Par suite l'équation du problème est

$$n(n+1)(n+2)(n+3)=24p^2,$$

ou encore

$$(n^2+3n+1)^2-6(2p)^2=1,$$

équation de la forme

$$x^2-6y^2=z^2,$$

x, y, z étant premiers entre eux.

Or, toutes les solutions de cette équation sont données par les formules

$$\begin{cases} x=\alpha^2+6\beta^2, \\ y=2\alpha\beta, \\ \pm z=\alpha^2-6\beta^2; \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x=2\alpha^2+3\beta^2, \\ y=2\alpha\beta, \\ \pm z=2\alpha^2-3\beta^2. \end{cases}$$

Donc notre équation présente les deux décompositions :

$$\begin{cases} n^2+3n+1=\alpha^2+6\beta^2, & (1) \\ \alpha^2-6\beta^2=1; & (2) \end{cases} \text{et} \begin{cases} n^2+3n+1=2\alpha^2+3\beta^2, & (3) \\ 2\alpha^2-3\beta^2=-1. & (4) \end{cases}$$

Les autres signes de z donneraient des relations, entre α et β, impossibles suivant le module 3.

En retranchant membre à membre les équations (3) et (4), on obtient l'équation

$$n^2+3n=4\alpha^2,$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$(2n+3+4\alpha)(2n+3-4\alpha)=9.$$

Cette équation n'est possible en nombres entiers que pour

$$2n+3+4\alpha=9 \quad \text{avec} \quad 2n+3-4\alpha=1,$$

c'est-à-dire pour $n=1$, $\alpha=1$.

Il ne reste donc à résoudre que le système des équations (1) et (2), que l'on peut remplacer par le suivant

$$\begin{cases} n^2+3n=12\beta^2, & (5)\\ \alpha^2-6\beta^2=1. & (6)\end{cases}$$

L'équation (5) montre que n et par suite β sont divisibles par 3.

Faisons $n=3m$, $\beta=3\gamma$; cette équation devient

$$m(m+1)=12\gamma^2,$$

ou encore

$$(2m+1)^2=\nu^2=48\gamma^2+1, \qquad (7)$$

et l'autre devient

$$\alpha^2=54\gamma^2+1. \qquad (8)$$

De ces équations on déduit

$$\alpha^2=\nu^2+6\gamma^2.$$

α, ν et γ étant premiers entre eux, toutes les solutions de cette équation sont données par les formules

$$\begin{cases} \alpha=\lambda^2+6\mu^2,\\ \pm\nu=\lambda^2-6\mu^2,\\ \gamma=2\lambda\mu; \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha=2\lambda^2+3\mu^2,\\ \pm\nu=2\lambda^2-3\mu^2,\\ \gamma=2\lambda\mu. \end{cases}$$

Dans le premier cas, l'une et l'autre des équations (7) et (8) deviennent

$$\lambda^4-204\lambda^2\mu^2+36\mu^4=1, \qquad (9)$$

et dans le second cas

$$4\lambda^4-204\lambda^2\mu^2+9\mu^4=1. \qquad (10)$$

L'équation (9) peut s'écrire

$$(\lambda^2-102\mu^2)^2=8.(6\mu)^4+1.$$

Le second membre doit être le carré d'un nombre impair; en l'égalant à $4t^2+4t+1$, on en tire

$$(6\mu)^4=\frac{t(t+1)}{2}.$$

Or, on sait, d'après Euler, qu'aucun nombre triangulaire, excepté l'unité n'est égal à un bicarré. Donc l'équation (9) est impossible.

De même l'équation (10) peut s'écrire

$$(2\lambda^2 - 51\mu^2)^2 = 2.(6\mu)^4 + 1^4.$$

Or, Euler a démontré que la somme de trois bicarrés, dont deux sont égaux, ne peut être égale à un carré.

Donc l'équation (10) est aussi impossible.

En résumé l'équation du problème n'admet que la solution insignifiante $n = 1$.

Les théorèmes d'Euler que nous venons de rappeler se trouvent reproduits dans la Théorie des Nombres de Legendre.

COROLLAIRE. Le nombre

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$$

représente le triangulo-triangulaire de rang n. Donc, dans ce qui précède, nous avons démontré qu'aucun nombre triangulo-triangulaire, excepté l'unité, n'est égal à un carré.

Parthenay, 11 janvier 1895.

QUESTIONS D'EXAMEN.

785. Résoudre le système

$$x+y+z+u=a, \quad (x+y)(z+u)=b, \quad (x+z)(y+u)=c,$$
$$(x+u)(y+z)=d.$$

786. Résoudre le système

$$x+y+z=a, \quad x^2+y^2+z^2=a^2+2b^2, \quad x^3+y^3+z^3=a^3.$$

NYT, *Tidsskrift for Matematik.*

De $x+y=a-z$ on déduit

$$x^2+y^2=(a-z)^2-2xy=a^2+2b^2-z^2,$$
$$x^3+y^3=(a-z)^3-3xy(a-z)=a^3-z^3;$$

éliminant le produit xy, on obtient

$$(a-z)(6z^2-6b^2)=0, \quad \text{d'où} \quad z=a, b, -b \ldots$$

787. Soient O le centre et M un point quelconque d'une conique. Sur une droite ON faisant avec l'axe focal Ox un angle $NOx = 2MOx$ on

porte une longueur ON proportionnelle au carré de OM. Trouver le lieu géométrique du point N. (GENESE.)

L'équation de la conique donnée étant

$$\rho^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\omega + b^2\sin^2\omega},$$

celle du lieu de N sera

$$\alpha\rho = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\frac{\omega}{2} + b^2\cos^2\frac{\omega}{2}} = \frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2 + c^2\cos\omega};$$

le lieu est donc une conique de foyer O.

728. Soient O le centre et M un point quelconque d'une hyperbole équilatère. Sur une droite ON faisant avec l'axe transverse Ox un angle $NOx = 4MOx$ on porte une longueur ON proportionnelle à $\overline{OM}^4$. Le point N décrit une parabole de foyer F. (GENESE).

729. Faire et expliquer l'épure propre à déterminer l'angle d'un plan quelconque défini par ses traces, avec le plan bissecteur du dièdre formé par les plans de projection. (*Bacc. Caen*, 1894).

730. ABC étant un triangle inscrit dans une circonférence, on mène par les sommets des cordes AA_1, BB_1, CC_1 parallèles aux côtés opposés. L'aire du triangle $A_1B_1C_1$ vaut quatre fois celle du triangle orthique de ABC.

Cet énoncé nous a été communiqué par M. J. JONESCO. La question d'examen 118 propose de déduire du triangle $A_1B_1C_1$ le triangle ABC. Or les droites AA_1, BB_1, CC_1, se coupent aux sommets d'un triangle $A_2B_2C_2$ dont les côtés ont pour milieux A, B, C; donc $A_1B_1C_1$ est le triangle orthique de $A_2B_2C_2$, etc.

731. Soient P, Q, R trois points qui divisent les côtés BC, CA, AB dans le rapport $(m : n)$, et soient P', Q', R' leurs isotomiques. Trouver l'équation de la conique qui passe par ces six points.

Réponse. En coordonnées barycentriques :

$$mn(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (m^2 + n^2)(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = 0.$$

732. Deux mobiles se meuvent dans des sens opposés sur une même circonférence partagée en 360 parties égales ou degrés. Ils sont partis d'un même point; le premier a fait pendant la première minute 3° et fait chaque minute 1° de plus que la minute précédente; le second qui a parcouru $1° \frac{1}{2}$ pendant la première minute, parcourt chaque minute 6° de plus que pendant la minute précédente. Déterminer la première et la seconde rencontre de ces mobiles.

733. Résoudre les systèmes d'équations :

1° $x^3 - y^3 = 19, \quad x^2 + y^2 + xy = 19.$

2° $\sqrt{x} - \sqrt{y} = x - \sqrt{xy} + 2, \quad 3(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 3\sqrt{xy} + y - 7.$

3° $x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha = a^2, \quad xy\sin\alpha = b^2, \quad x + y = d.$

4° $$\sqrt{y} - \sqrt{x} = \sqrt{x + y - 4\sqrt{4xy + x - y}} + 9,$$
$$2\sqrt{x - y} = 3\sqrt{20 - x}.$$

5° $$\sqrt{\frac{3y - 2x}{y}} + \sqrt{\frac{4y}{3y - 2x}} = 2\sqrt{2},$$
$$3(x^2 + 1) = (y + 1)(y - x + 1).$$

6° $$x^2 - 2xy + 3y^2 = 33,$$
$$3x^2 + 14xy + 6y^2 = 291.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

1060. On donne une hyperbole équilatère et deux points A, B de la courbe. Par ces points on fait passer une circonférence *quelconque* qui rencontre la conique en deux autres points C, D. Trouver le lieu des secondes extrémités des cordes CC', DD' de cette circonférence, lorsque ces droites sont parallèles à AB, ou à une asymptote, ou à un axe de l'hyperbole. Cas particuliers où les points A et B sont confondus, ou diamétralement opposés, ou situés sur une parallèle à un axe.

(H. Brocard.)

1061. Chercher le lieu des sommets des paraboles tangentes à deux normales rectangulaires d'une parabole donnée et ayant le même foyer que cette conique. (E. Duporcq.)

×**1062.** Le quotient de $(2m - 1)!$ par $m!\,(m - 1)!$ est toujours un nombre pair, excepté quand m est une puissance de 2. (Wolstenholme.)

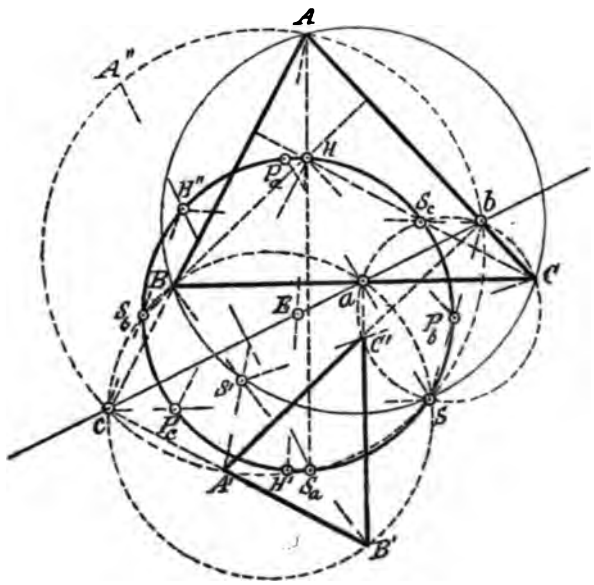
×**1063.** On donne trois droites parallèles AA', BB', CC' non situées dans un même plan. Les plans A'BC, B'CA, C'AB se coupent en un point S; les plans AB'C', BC'A', CA'B', en un point S'. Démontrer que la droite SS' est parallèle à AA' et coupe les plans ABC, A'B'C' en des points T, T' tels que TS = SS' = S'T'; que la droite TT' est une moyenne harmonique entre AA', BB', CC'. (J. N.).

SUR LES TRIANGLES A LA FOIS SEMBLABLES ET HOMOLOGIQUES

(*Nouvelle démonstration d'un théorème de* M. SONDAT);

par M. V. JEŘÁBEK (Brunn).

1. Soient a, b, c les points de rencontre d'une transversale avec les côtés BC, CA, AB d'un triangle. Il existe une infinité de triangles A'B'C' qui sont directement semblables au triangle ABC et qui ont pour axe d'homologie la droite abc : il suffit de mener par a, b, c trois droites a'C'B', bC'A', cA'B' faisant respectivement avec BC, CA, AB, dans le



même sens, un angle donné. On voit facilement que les sommets A', B', C' d'un tel triangle ont pour lieux géométriques les circonférences Abc, Bca, Cab. D'après un théorème connu, ces circonférences et celles qui sont circonscrites aux triangles ABC, A'B'C' se coupent en un même point S.

2. En considérant les quadrilatères inscrits AcA'S et BcB'S, on démontre aisément que les triangles SAB, SA'B' sont semblables; donc S est le centre de similitude des triangles ABC, A'B'C'.

Si les droites *abc*, B'C', C'A', A'B' se déplacent parallèlement à elles-mêmes, les points A', B', C' décrivent trois droites passant respectivement par A, B, C; donc le centre d'homologie S', intersection des droites AA', BB', CC', reste fixe. L'un des triangles A'B'C' est formé par trois droites passant par S'; comme ces droites rencontrent BC, CA, AB en trois points qui sont situés sur une même droite, le point S', d'après un théorème connu, appartient à la circonférence ABC. Par analogie, il se trouve aussi sur la circonférence A'B'C'.

2. Considérons maintenant le triangle A'B'C' et la transversale *abc* comme fixes, et faisons tourner les côtés de ABC autour des points *a*, *b*, *c* de manière que ce triangle reste semblable à lui-même. Les sommets A, B, C décriront les circonférences A'*bc*, B'*ca*, C'*ab*.

Soit H un point de la figure semblablement variable ABC; il se déplace avec ABC de manière à rester toujours son propre homologue. Les angles BAH, CAH restant constants, la droite AH tourne autour d'un point fixe S_a de la circonférence A'*bc*; de même les droites BH, CH tournent autour de deux points fixes S_b, S_c des circonférences B'*ca*, C'*ab*.

Le lieu géométrique des positions du point H *est la circonférence circonscrite au triangle* $S_aS_bS_c$; car les angles S_aHS_b, S_bHS_c, S_cHS_a restent constants. La circonférence $S_aS_bS_c$ passe par S; en effet, le triangle ABC peut se réduire au point S, les trois côtés étant dirigés suivant S*a*, S*b*, S*c* et, dans ce cas, H coïncide avec S.

4. *Si* H *est l'horthocentre de* ABC, *l'axe d'homologie abc de* ABC, A'B'C' *est un diamètre du cercle* $S_aS_bS_c$. En effet, considérons le triangle ABC dans la position particulière A''*cb* où les points B, C coïncident avec *c*, *b*. La hauteur A''H'' passe par S_a, et puisque ce point est sur la circonférence circonscrite A'*bc*, la base *bc* est perpendiculaire au milieu de S_aH''; et comme H'' appartient à la circonférence $S_aS_bS_c$, *bc* est un diamètre.

5. Le théorème de M. Sondat résulte immédiatement de la propriété précédente. En effet, si les triangles ABC, A'B'C' sont orthohomologiques (voir *Mathesis*, (2), V p. 267), les hauteurs AHS_a, $A'H'S_a$ sont rectangulaires; donc HH' est un diamètre de la circonférence $S_aS_bS_c$.

Si l'axe d'homologie *abc* passe par H, il passe également par H'.

6. On peut imaginer trois figures directement semblables F_a, F_b, F_c, dans lesquelles *a*, *b*, *c* sont des points homologues; les droites (indéfi-

nies) BC, CA, AB, des lignes homologues; S_a, S_b, S_c, les centres de similitude (points doubles) de (F_b, F_c), (F_c, F_a), (F_a, F_b). Les droites menées par le point H du cercle de similitude $S_aS_bS_c$ parallèlement aux lignes homologues BC, CA, AB rencontrent ce cercle aux *points invariables* P_a, P_b, P_c; le centre E du cercle est le centre d'homologie des triangles $S_aS_bS_c$, $P_aP_bP_c$; les droites aP_a, bP_b, cP_c concourent au point S.

NOTES MATHÉMATIQUES.

×3. *Sur un lieu géométrique élémentaire.* Soient A, B les points d'intersection de deux circonférences O, O'. Une sécante quelconque menée par A rencontre ces courbes en M, M'. Les angles BMA, BM'A étant constants, le triangle BMM' est toujours semblable à lui-même.

Soit N le point qui divise MM' dans un rapport donné MN : NM' $= m' : m$. Les triangles BMN, BM'N seront encore d'espèce constante; donc le lieu de N est une circonférence passant par A et B. Lorsque MM' est perpendiculaire à AB, on voit que le centre ω du cercle BAN est le milieu de la droite BN, et comme BM, BM' passent alors par les centres O, O', le centre ω divise le distance OO' dans le rapport donné $m' : m$.

En observant la règle des signes pour les segments comptés sur une même droite, on peut écrire

$$AN = \frac{m \cdot AM + m' \cdot AM'}{m + m'}.$$

On en conclut que si l'on porte sur MM' un segment

$$AP = p \cdot AM + p' \cdot AM',$$

où p et p' sont deux nombres donnés, proportionnels à m et m', les points N, P décrivent des circonférences ayant pour centre de similitude le point A.

En particulier, si l'on prend AP égal à la somme ou à la différence des cordes AM, AM', le point P décrit une circonférence. Cette proposition n'est exacte que si l'on tient compte de la règle des signes : Le milieu n de MM' décrit une circonférence, et il en est de même de l'extrémité d'un segment $AP = 2An$; si A est entre M et N, on a (en considérant les valeurs absolues des segments), $AP = \pm (AM - AN)$;

si A n'est pas entre M et N, on a AP = AM + AN. Quand on remplace le cercle O' par son symétrique O'' par rapport à A, et qu'on traite de nouveau la même question, ce lieu et le précédent pris ensemble résolvent complètement le problème où l'on prend AP = AM ± AM'.

Une note (incomplète) qui nous a été adressée à ce sujet par un honorable correspondant, nous a engagé à publier le présent article.

On peut encore généraliser la question en construisant sur MM' un triangle MM'Q semblable à un triangle donné.

Le quadrilatère BMQM' étant d'espèce constante, les côtés MQ, M'Q rencontrent respectivement les circonférences O, O' en des points fixes μ, μ' (les angles BMQ, BM'Q sont invariables); le lieu de Q est donc une circonférence passant par μ, μ'. Le centre de ce cercle est le sommet ε d'un triangle OO'ε directement semblable à MM'Q; car les quadrilatères BOεO', BMQM' étant semblables, les triangles εBQ, OBM ont un angle égal en B, compris entre des côtés proportionnels, d'où l'on conclut $\varepsilon Q = \varepsilon B$. (J. Neuberg.)

4. *Sur une formule de Newton, par* M.P. Mansion. Newton, dans sa célèbre lettre à Oldembourg du 13 juin 1676, a trouvé, au moyen des séries, pour déterminer approximativement la longueur d'un arc de cercle, une règle qui équivaut à la formule suivante :

$$x = \sin x \frac{14 + \cos x}{9 + 6\cos x}.$$

Dans le cas où x ne surpasse pas $\frac{1}{4}\pi$ (ce que l'on peut supposer), *cette formule*, qui donne toujours pour x une valeur trop petite, *ne comporte qu'une erreur moindre que* $20\frac{1}{4}$ *secondes*.

En effet, posons

$$\varphi(x) = x - \sin x \frac{14 + \cos x}{9 + 6\cos x};$$

$\varphi(x)$ sera l'erreur commise en calculant x par la formule de Newton.

Or, on trouve aisément, après quelques réductions,

$$\varphi'(x) = \frac{2}{3} \frac{(1 - \cos x)^3}{(3 + 2\cos x)^2},$$

quantité toujours positive. L'erreur $\varphi(x)$ est donc croissante avec x.

Pour $x = \frac{1}{4}\pi$, on trouve

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}\pi \frac{397}{3298673}, \text{ donc } \varphi(x) < \frac{180 \times 60 \times 60''}{32000} < 20\frac{1}{4} \text{ secondes.}$$

La formule de Newton équivaut à une table des lignes trigonométriques largement suffisante pour beaucoup de calculs pratiques.

×5. *Sur la définition de la multiplication.* Dans ces derniers temps, on a cru pouvoir donner une définition générale de la multiplication en disant que :

La multiplication est une opération qui a pour but, étant donés un nombre appelé multiplicande et un autre appelé multiplicateur, de trouver un nombre appelé produit qui soit formé avec le multiplicande comme le multiplicateur est formé avec l'unité.

Cette définition peut paraître séduisante au premier abord, mais èle présente plusieurs inconvénients très graves : au fond, èle est juste, mais èle exige, pour être comprise, des développements qui reviènent aux définitions que nous avons donées dans le texte; ce n'est pas à proprement parler une définition, c'est le *résumé* de plusieurs définitions. Quand on dit que le produit est formé avec le multiplicande comme le multiplicateur est formé avec l'unité, on énonce un fait qui est vrai, mais le multiplicateur peut être formé de bien des manières avec l'unité, et pour que le produit soit formé de la même manière, il faut faire un choix parmi ces manières, ce que la définition citée ne dit pas. Je vais me faire comprendre en prenant un exemple; soit 3 le multiplicande; 2 le multiplicateur; ce multiplicateur se forme en ajoutant deus unités, le produit se forme en ajoutant deus multiplicandes égaus à trois, mais le multiplicateur se forme aussi en ajoutant l'unité avec le carré de l'unité, tandis que le produit ne se forme pas en ajoutant le multiplicande avec son carré.

Enfin, il est impossible qu'un començant, dont l'esprit n'est pas encore façoné aux abstractions comprène une pareille définition, tandis qu'il comprendra très bien que multiplier un nombre, 3 par exemple, par deus, c'est ajouter deus nombres égaus à 3, ce qui est parfaitement clair. (Laisant et Lemoine, *Traité d'arithmétique*, note IV) (*).

(*) Les auteurs ont adopté l'ortografie simplifiée de la Société filologique française, fondée par M. Pierre Malvezin.

BIBLIOGRAPHIE.

Précis de Trigonométrie rectiligne, *à l'usage des élèves des classes d'Humanités et des candidats au diplôme géomètre-arpenteur*, par l'abbé E. GELIN, docteur en philosophie et en théologie, professeur de Mathématiques supérieures au Collège Saint-Quirin à Huy. *Ouvrage adopté par le Conseil de perfectionnement de l'enseignement moyen.* — Deuxième édition, augmentée de la triangulation de l'Ile Minorque, et ornée de 29 figures intercalées dans le texte. — Un vol. de 72 pages in-8°, caractères elzévirs. — Namur, *Wesmael-Charlier*; Huy, *chez l'auteur*; 1896. — Prix : **1,50** fr.

Nous avons autrefois rendu compte de la première édition de ce *Précis de Trigonométrie rectiligne*, bien connu, du reste, des professeurs de nos établissements d'enseignement moyen, et extrait, comme on sait, des *Eléments de Trigonométrie plane et sphérique* du même auteur, ouvrage très complet et couronné, encore manuscrit, par l'Académie royale de Belgique. Il nous suffira donc d'indiquer les principales modifications apportées à la présente édition.

1° L'auteur a remplacé, dans tout le cours de l'ouvrage, les notations $\frac{\pi}{2}$, π, etc., par les notations plus concrètes 90°, 180°, etc.

2° Pour les formules $\sin(a \pm b)$ et $\cos(a \pm b)$, la démonstration de Cauchy, que l'auteur avait adoptée sur le conseil de Catalan, a été remplacée par la démonstration ordinaire, tirée des triangles semblables, laquelle semble plus simple et mieux goûtée des élèves. L'auteur donne cette démonstration dans le cas le plus simple et laisse au professeur le soin de faire vérifier par les élèves qu'elle subsiste dans tous les cas.

3° Comme exemple de triangulation, l'auteur cite celle de l'Ile Minorque, comprenant 15 triangles de premier ordre, 17 de deuxième ordre et 82 de troisième ordre. Il donne les côtés et les angles de chacun de ces 114 triangles, ce qui fournit aux professeurs la matière de 1482 exercices sur la résolution des triangles. Car soit, par exemple, le triangle

$$A = 31°\,22'\,41,39''; \quad B = 100\,10'\,40,38''; \quad C = 48°\,26'\,38,23'';$$
$$a = 2359,281 \text{ m.}; \quad b = 4459,814 \text{ m.}; \quad c = 3390,667 \text{ m.}:$$

on peut, connaissant l'un des treize groupes suivants d'éléments de ce triangle,

$$a, A, B, C, \quad A, a, b, \quad A, a, c, \quad A, b, c, \quad a, b, c,$$
$$b, A, B, C, \quad B, b, c, \quad B, b, a, \quad B, c, a,$$
$$c, A, B, C, \quad C, c, a, \quad C, c, b, \quad C, a, b,$$

déterminer les autres éléments et la surface du triangle.

4° Enfin, dans la note de la page 71, l'auteur donne cinq applications numériques du problème de la droite inaccessible, à traiter d'après l'exemple développé dans le texte.

Leçons de géométrie, rédigées suivant les derniers programmes officiels et accompagnées, pour chaque leçon, d'exercices et de problèmes gradués, par EUGÈNE ROUCHÉ, examinateur de sortie à l'École Polytechnique, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et CH. DE COMBEROUSSE, professeur à l'École Centrale et au Conservatoire des Arts et Métiers; quatre volumes petit in-8° se vendant séparément. — 1° partie : *La ligne droite et la circonférence de cercle*, à l'usage des élèves de la classe de quatrième (moderne), Paris, Gauthier-Villars (X-173 p. petit in-8°, avec 137 fig.), 1896, broché fr. **2,75**, cartonné fr. **3,25**.

Solutions des Exercices et Problèmes proposés dans les Leçons de Géométrie, 1° partie; Id. ib. (X-168 in-8, avec 115 figures) broché fr. **2,75**, cartonné fr. **3,25**.

Éléments de Géométrie descriptive (point, droite et plan) à l'usage des candidats à l'École militaire et aux écoles spéciales des Universités par F. CHOMÉ, professeur à l'École militaire. Bruxelles, Kouwenaar, librairie Castaigne, 1896 (Vol. in-8° de XII-159 pages et atlas in-4° de 38 planches). Prix : 5 francs.

Voir *Mathesis*, 1893, pp. 42-45, une note de M. Chomé relative à son mode d'exposition de la géométrie descriptive.

F. KLEIN, **Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie** ausgearbeitet von F. Tagert. Leipzig, Teubner, 1895 (VI-66 p. in-8° avec 10 fig. et 2 planches). Prix : 2 marcs.

F. KLEIN, professeur à l'Université de Goettingue. Leçons sur certaines questions de Géométrie élémentaire. Possibilité des constructions géométriques; les polygones réguliers; transcendance des nombres e et π (démonstration élémentaire). Rédaction française autorisée par l'auteur, par J. GRIESS, ancien élève de l'école normale supérieure, professeur de mathématiques au lycée d'Alger. Paris, Nony, 1896 (99 p. in-8°) Prix : 2 fr.

« L'été dernier, en une série de leçons de deux heures, devant un auditoire plus considérable que de coutume, j'ai eu le plaisir d'exposer ce que la science moderne nous permet d'affirmer sur la possibilité des constructions de la Géométrie élémentaire. Déjà quelque temps auparavant j'avais eu l'occasion de présenter une esquisse de ces leçons aux auditeurs du cours de vacances qui avait lieu à Goettingue pendant les vacances de Pâques; ils y semblèrent prendre un intérêt particulier, et cette impression n'a fait que se confirmer pendant le semestre d'été.

C'est pourquoi je me permets de présenter une courte rédaction de mes leçons comme *écrit de fête* (Festschrift), à l'assemblée de l'*Association pour les progrès de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles*, qui doit se tenir prochainement à Goettingue. (*Extrait de la Préface de l'auteur.*) »

M. Griess a été très bien inspiré en présentant au public français une traduction française de ces leçons du grand mathématicien allemand. Nous recommandons très vivement aux élèves et aux professeurs la lecture de cet intéressant opuscule où sont traitées d'une façon si magistrale, mais par des moyens élémentaires,

des questions d'une extrême importance. La première partie de l'ouvrage s'occupe de la possibilité ou de l'impossibilité d'une solution géométrique d'un problème par la règle et le compas, avec application à la duplication du cube, à la trisection de l'angle, à la division du cercle en parties égales. Dans la seconde partie, l'auteur établit, d'après Gordan et Lindemann, mais en élucidant avec un talent supérieur les détails de la démonstration, que les nombres e et π ne sont pas racines d'une équation algébrique d'un degré fini.

Théorie des Fonctions algébriques et de leurs intégrales, étude des fonctions analytiques sur une surface de Riemann, par PAUL APPELL, membre de l'Institut, professeur à la faculté des sciences; et ÉDOUARD GOURSAT, maitre de conférences à l'Ecole normale supérieure, avec une préface de M. Hermite. — Paris, Gauthiers-Villars et Fils (8-X-530 p. grand in-8°, avec 91 figures), 1895. Prix : 16 fr.

Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques, par M. CH. MÉRAY, professeur à la Faculté des Sciences de Dijon. Paris, Gauthier-Villars et Fils. I^re^ Partie : *Principes généraux 1894*, 13 fr.; II^e^ Partie : *Étude monographique des principales fonctions d'une variable 1895*, 14 fr.

Exposé logique, à partir de l'idée de nombre entier, au moyen des séries, des principes généraux de la théorie des fonctions et de la théorie des fonctions élémentaires, des fonctions elliptiques et des fonctions eulériennes. Dans deux volumes qui seront publiés plus tard, l'auteur fera connaître les applications analytiques et géométriques de l'analyse infinitésimale. L'ouvrage de M. Méray sera surtout utile à ceux qui connaissent déjà le calcul différentiel et le calcul intégral.

Éléments de la théorie des Fonctions elliptiques, par J. TANNERY, sous-directeur des études scientifiques à l'École Normale supérieure, et J. MOLK, professeur à la Faculté des Sciences de Nancy. Tome II : *Calcul différentiel* (II^e^ Partie) Paris, Gauthiers-Villars et Fils, 1896 (VI-299 p. gr. in-8°), 9 fr.

Chapitre III. Les fonctions thêta (Transformations linéaire, quadratique, d'ordre impair). Chapitre IV. Les quotients des fonctions sigma et des fonctions thêta (transformation). Formules (90 groupes de formules occupant 66 pages).

SUR UNE SUITE RÉCURRENTE(*),

par M. J. NEUBERG.

La présente note n'offre peut-être rien de neuf; mais comme elle a pour objet une question élémentaire qui n'est guère traitée dans les

---

(*) Pour les suites récurrentes d'un ordre quelconque, on peut consulter : *Annales de l'École normale supérieure*, 2^e^ série, t. VII, p. 375 (André); *Journal*

manuels en usage, elle pourra intéresser un grand nombre de nos lecteurs.

1. Soit la suite (u) :

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots,$$

dont les deux premiers termes sont arbitraires et dont les autres se calculent par la *formule de récurrence d'échelle* (a, b)

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}, \tag{1}$$

de sorte que

$$u_2 = au_1 + bu_0, \quad u_3 = au_2 + bu_1, \quad u_4 = au_3 + bu_2, \ldots$$

On voit facilement que les nombres $u_3, u_4, \ldots$ s'expriment directement en fonction des *termes initiaux* u_0, u_1 ; par exemple

$$\begin{aligned} u_3 &= a(au_1 + bu_0) + bu_1 = (a^2 + b)u_1 + abu_0, \\ u_4 &= a[(a^2 + b)u_1 + abu_0] + b(au_1 + bu_0) \\ &= (a^3 + 2ab)u_1 + (a^2b + b^2)u_0, \text{ etc.} \end{aligned}$$

On peut donc poser

$$u_n = c_n u_1 + d_n u_0, \tag{2}$$

et il est évident que les nombres c, d dépendent uniquement des nombres a, b.

La formule (2) comprend les nombres u_0, u_1 pourvu que l'on fasse

$$c_0 = 0, \quad d_0 = 1, \quad c_1 = 1, \quad d_1 = 0.$$

2. Les suites (c), (d) :

$$c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, c_{n+1}, \ldots$$
$$d_0, d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n, d_{n+1}, \ldots$$

sont récurrentes et ont la même *échelle* (a, b) que la suite (u). En effet, des égalités

$$u_{n-1} = c_{n-1}u_1 + d_{n-1}u_0, \quad u_{n-2} = c_{n-2}u_1 + d_{n-2}u_0,$$

on conclut

$$\begin{aligned} u_n &= a(c_{n-1}u_1 + d_{n-1}u_0) + b(c_{n-2}u_1 + d_{n-2}u_0) \\ &= (ac_{n-1} + bc_{n-2})u_1 + (ad_{n-1} + bd_{n-2})u_0; \end{aligned}$$

---

de l'École polytechnique, LXIV^e Cahier, 1894 (d'Ocagne) ; *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, t. V, 1891 (Laisant) ; Ed. Lucas. *Théorie des Nombres*, p. 299.

Pour la suite du 2^e ordre, comparer : de Longchamps, *Supplément du Cours Mathématiques spéciales*, 2^e édition, p. 3.

par conséquent

$$c_n = ac_{n-1} + bc_{n-2}, \quad d_n = ad_{n-1} + bd_{n-2}.$$

D'après cela, pour calculer les termes d'une suite quelconque d'échelle (a, b) ayant pour termes initiaux u_0, u_1, il suffit de calculer ceux de deux suites ayant la même échelle et pour termes initiaux respectivement 0,1 et 1,0.

Les suites auxiliaires (c), (d) se ramènent facilement l'une à l'autre. Car si l'on multiplie les termes initiaux d'une série récurrente par un facteur m, tous les nombres de la série sont multipliés par m. Or

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1, \quad d_1 = 0, \quad d_2 = b,$$

donc

$$d_1 = bc_0, \quad d_2 = bc_1.$$

Par conséquent, la suite

$$d_1, \quad d_2, \quad d_3, \ldots$$

s'obtient en multipliant par b la suite

$$c_0, \quad c_1, \quad c_2, \ldots$$

On peut dire qu'il suffit de calculer la suite récurrente (c) ayant pour termes initiaux 0, 1, et d'appliquer la formule

$$u_n = c_n u_1 + bc_{n-1}u_0.$$

3. Pour calculer la suite (u), on peut aussi recourir à deux suites récurrentes quelconques ayant la même échelle (a, b). En effet, soient

$$v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots, \quad w_0, w_1, w_2, w_3, \ldots.$$

ces suites. Nous aurons

$$u_n = c_n u_1 + d_n u_0, \quad v_n = c_n v_1 + d_n v_0, \quad w_n = c_n w_1 + d_n w_0;$$

en éliminant c_n, d_n on trouve

$$\begin{vmatrix} u_n & u_1 & u_0 \\ v_n & v_1 & v_0 \\ w_n & w_1 & w_0 \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

ou

$$u_n = \frac{w_1u_0 - u_1w_0}{v_0w_1 - v_1w_0}v_n + \frac{v_1u_0 - u_1v_0}{v_0w_1 - v_1w_0}w_n.$$

Cette relation a la forme

$$u_n = Av_n + Bw_n;$$

les nombres A, B dépendent uniquement des termes initiaux des trois séries (u), (v), (w).

4. Il existe deux suites récurrentes d'échelle (a, b) dont les termes ont une expression analytique connue.

En effet, soient α, β les racines de l'équation (*équation génératrice* de Lagrange)

$$x^2 = ax + b;$$

nous aurons

$$\alpha^2 = a\alpha + b, \quad \beta^2 = a\beta + b,$$

et par conséquent

$$\alpha^n = a\alpha^{n-1} + b\alpha^{n-2}, \quad \beta^n = a\beta^{n-1} + b\beta^{n-2}.$$

Posons $v_n = \alpha^n$, $w_n = \beta^n$; alors

$$v_n = av_{n-1} + bv_{n-2}, \quad w_n = aw_{n-1} + bw_{n-2},$$

et l'équation (3) devient

$$\begin{vmatrix} u_n & u_1 & u_0 \\ \alpha^n & \alpha & 1 \\ \beta^n & \beta & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

On en déduit

$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} u_1 - \alpha\beta \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} u_0, \tag{5}$$

$$u_n = \frac{u_1 - \beta u_0}{\alpha - \beta} \alpha^n - \frac{u_1 - \alpha u_0}{\alpha - \beta} \beta^n; \tag{6}$$

ensuite

$$c_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad d_n = -\alpha\beta \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta},$$

$$A = \frac{u_1 - \beta^n u_0}{\alpha - \beta}, \quad B = \frac{\alpha^n u_0 - u_1}{\alpha - \beta}.$$

5. La méthode précédente paraît être en défaut lorsque $\alpha = \beta$. Cependant, la solution résulte encore de la formule (5) lorsqu'on effectue les divisions indiquées et qu'on passe ensuite *à la limite* pour $\beta = \alpha$; on trouve

$$u_n = n\alpha^{n-1} u_1 - (n-1)\alpha^n u_0.$$

6. Pour donner une application nous considérons les suites récurrentes d'échelle (1, 1). La suite (c) est alors constituée par les nombres de Fibonacci (ou de Lamé):

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \ldots$$

dont chacun à partir du troisième est égal à la somme des deux précédents. Si les termes initiaux sont u_0, u_1, on a

$$u_n = c_n u_1 + c_{n-1} u_0.$$

L'équation génératrice est $x^2 = x + 1$; elle a pour racines

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Les nombres de Fibonacci ont donc pour expression générale

$$c_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{(\sqrt{5}+1)^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5^n}}.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 782.

(Voir *Mathesis*, (2) II, p. 215).

On considère toutes les paraboles touchant une droite AB *au même point* A, *et ayant même diamètre* AC. *Démontrer que le centre des moyennes harmoniques, relatif au diamètre* AC, *des points où chacune de ces paraboles rencontre une courbe géométrique donnée est un point fixe.*

(Cl. Servais.)

Solution par M. Stuyvaert (Gand). Si l'on prend AC pour axe des x et AB pour axe des y, l'équation générale des paraboles est

$$y^2 = 2p'x,$$

p' étant variable. Soit l'équation de la courbe :

$$x^n + x^{n-1}(ay+b) + x^{n-2} f_2(y) + \cdots + x f_{n-1}(y) + gy^n + \cdots + qy + r = 0.$$

Appelons (x_1, y_1), (x_2, y_2)... les coordonnées des points d'intersection des deux courbes, (X, Y) celles du centre des moyennes harmoniques G.

On a

$$X = \frac{\Sigma \frac{x_1}{y_1}}{\Sigma \frac{1}{y_1}}, \quad Y = \frac{2n}{\Sigma \frac{1}{y_1}}.$$

Éliminant x des équations des courbes : $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ sont racines de

$$\frac{y^{2n}}{(2p')^{2n}} + \frac{y^{2n-2}}{(2p')^{2n-2}}(ay+b) + \cdots + \frac{y^2}{2p'} f_{n-1}(y) + gy^n + \cdots + qy + r = 0$$

ou

$$y^{2n} + a(2p')y^{2n-1} + By^{2n-2} + \cdots + q(2p')^{2n} y + r(2p')^{2n} = 0,$$

d'où

$$\Sigma \frac{1}{y_1} = \frac{\Sigma y_1 y_2 \ldots y_{2n-1}}{y_1 y_2 \ldots y_{2n}} = -\frac{q}{r} \text{ (constante)},$$

$$\Sigma \frac{x_1}{y_1} = \Sigma \frac{\frac{y_1^2}{2p'}}{y_1} = \Sigma \left(\frac{y_1}{2p'}\right) = \frac{1}{2p'} \Sigma y_1 = \frac{1}{2p'} \left(-2ap'\right) = -a \text{ (constante)}.$$

Donc X et Y sont constants.

Le raisonnement ci-dessus serait en défaut si l'on avait $q = r = 0$ mais alors la courbe est tangente à AB en A. Deux des valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ sont nulles, donc $\Sigma \frac{1}{y_1} = \infty$ et $Y = 0$; — ou bien si les termes en x^n et $x^{n-1}y$ étaient à la fois absents de l'équation, mais alors la courbe et la parabole auraient des points d'intersection à l'infini et $\Sigma y_1 = \infty$, donc aussi $\Sigma \frac{x_1}{y_1} = X = \infty$.

Donc, dans tous les cas, le point G est indépendant du paramètre de la parabole.

Il n'est peut-être pas inutile de rappeler quelques définitions.

On considère, sur une même droite, les points $A_1, A_2, \ldots A_n, O, O'$ satisfaisant à l'équation

$$\frac{1}{OO'} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2} + \cdots + \frac{1}{OA_n}\right);$$

on dit que O' est le *conjugué harmonique* de O par rapport aux n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Etant donnés un point O et une courbe algébrique Σ d'ordre n, le conjugué

harmonique de O par rapport aux points où une sécante quelconque menée par O rencontre Σ décrit une droite qu'on appelle la *polaire* de O.

Remplaçons Σ par un système de n droites $D_1, D_2, \ldots, D_n$ concourant en un même point M ; la polaire d'un point O est une droite d' menée par M, qui ne change pas lorsque O parcourt une droite d passant par M. On dit que d' est la conjuguée harmonique de d par rapport à $D_1, D_2, \ldots, D_n$.

Étant donnés n points $B_1, B_2, \ldots B_n$ et une droite d, la conjuguée harmonique de d par rapport aux n droites joignant ces points à un point quelconque B de d passe par un point fixe G. Ce point est appelé le *centre des moyennes harmoniques des points* $B_1, B_2, \ldots B_n$ *par rapport à l'axe* d. Si l'on prend d pour axe des x et une autre droite quelconque pour axe des y, les coordonnées de G sont

$$x = \frac{\Sigma \frac{x_i}{y_i}}{\Sigma \frac{1}{y_i}}, \quad y = \frac{n}{\Sigma \frac{1}{y_i}}. \qquad \text{(J. N.)}$$

×Question 963.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 176.)

Si sur les côtés d'un pseudocarré ABCD *on construit les triangles* ABA', BCB', CDC', DAD' *directement semblables à un triangle donné* MNP, *les points* A', B', C', D' *sont les sommets d'un pseudocarré.*

(H. Van Aubel.)

Solution par M. Droz Farny. Soient X, Y, Z, U les milieux des côtés AB, BC, CD, DA. Les perpendiculaires en X sur AB et en Z sur CD se rencontrent en un point L, centre commun des carrés construits intérieurement sur AB, CD (*Mathesis*, question 878); soit L' le point d'intersection des perpendiculaires menées en Y sur BC et en U sur DA.

Les quadrilatères LAA'B, LCC'D sont directement semblables; on en conclut que les lignes homologues LA', LC' sont proportionnelles aux lignes homologues LX, LZ et font le même angle que les dernières. Par suite, les triangles LXZ, LA'C' sont semblables et l'on a

$$XZ : A'C' = LX : LA'.$$

De même, les quadrilatères L'BB'C, L'DD'A sont semblables entre eux et aux quadrilatères LAA'B, LCC'D; on en conclut

$$YU : B'D' = L'Y : L'B'.$$

Mais XZ = YU, la figure XYZU étant un carré, et

$$LX : LA' = L'Y : L'B';$$

par suite $A'C' = B'D'$. De plus, l'angle des droites XZ, A'C' est égal à XLA', et l'angle des droites YU, B'D' égal à YL'B', et comme les angles XLA', YL'B' sont égaux, et que XZ, YU sont perpendiculaires, A'C' et B'D' sont également perpendiculaires.

Autre solution par M. Déprez. La question 963 renferme comme cas particulier ce théorème : *Les points qui divisent les côtés AB, BC, CD, DA d'un pseudocarré dans un même rapport, sont les sommets d'un pseudocarré* (Voir *Mathesis* (2), IV, p. 264).

M. J. Jonesco démontre la question 963 en se servant des équipollences.

En désignant par a, b, c, d les côtés AB, BC, CD, DA considérés en grandeur et en direction, on peut poser

$$AA' = \lambda a, \quad BB' = \lambda b, \quad CC' = \lambda c, \quad DD' = \lambda d,$$

λ étant un nombre complexe. On a

$$A'C' = A'A + AC + CC' = AC + \lambda (c - a),$$
$$B'D' = B'B + BD + DD' = BD + \lambda (d - b).$$

Par hypothèse $AC = iBD$; cette égalité donne

$$a + b = i (b + c). \tag{1}$$

De plus

$$a + b + c + d = 0. \tag{2}$$

Si l'on tire a et c de (1) et (2), on vérifie facilement que $c - a = i(d - b)$; par suite on a $A'C' = i.B'D'$.

Question 978.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 216).

Soient A', B', C' *les milieux des côtés d'un triangle* ABC, *et soit* A''B''C'' *le triangle formé par les tangentes menées par* A, B, C *au cercle circonscrit au triangle* ABC. *Démontrer que les côtés non homologues des triangles* A'B'C', A''B''C'' *se coupent en six points d'une conique, et trouver l'équation de cette courbe.* (J. Neuberg.)

Solution géométrique par M. A. Droz Farny. Représentons par 1 et 2 les points d'intersection de B'C' avec A''B'' et A''C''; *par* 3 et 4 ceux de A'B' avec A''C'' et B''C''; et par 5 et 6 ceux de A'C' avec B''C'' et A''B''. Les droites A'A'', B'B'', C'C'' se coupant au centre du cercle

ABC, les triangles A'B'C' et A''B''C'' sont homologiques; 123456 est par conséquent un hexagone de Pascal.

Solution analytique. Appelons x, y, z les coordonnées barycentriques par rapport au triangle de référence ABC. Les côtés des triangles A'B'C', A''B''C'' ont pour équations

$$\alpha \equiv -x+y+z=0, \quad \beta \equiv x-y+z=0, \quad \gamma \equiv x+y-z=0,$$
$$\alpha' \equiv c^2y+b^2z=0, \quad \beta' \equiv a^2z+c^2x=0, \quad \gamma' \equiv b^2x+a^2y=0.$$

Nous allons d'abord démontrer que ces triangles ont un axe d'homologie. Cet axe, s'il existe, peut être représenté par

$$2\alpha' - A\alpha = 0. \tag{1}$$

Les coordonnées du point d'intersection des côtés β, β' vérifient les égalités

$$\frac{x}{a^2} = -\frac{z}{c^2} = \frac{y}{a^2-c^2};$$

en remplaçant dans (1) x, y, z par $a^2, a^2-c^2, -c^2$, on trouve $A = b^2+c^2-a^2$. L'équation (1), après substitution de cette valeur de A, prend la forme symétrique

$$(b^2+c^2-a^2)x+(c^2+a^2-b^2)y+(a^2+b^2-c^2)z=0; \tag{2}$$

on en conclut que les triangles A'B'C', A''B''C'' sont homologiques.

Désignons par δ le premier membre de (2) et posons

$$A = b^2+c^2-a^2, \quad B = c^2+a^2-b^2, \quad C = a^2+b^2-c^2;$$

nous aurons

$$2\alpha' - A\alpha \equiv 2\beta' - B\beta \equiv 2\gamma' - C\gamma \equiv \delta. \tag{3}$$

Cela posé, toute cubique passant par les neuf points d'intersection des côtés des triangles A'B'C', A''B''C'' a pour équation

$$8\alpha'\beta'\gamma' - K\alpha\beta\gamma = 0. \tag{4}$$

Remplaçons $2\alpha', 2\beta', 2\gamma'$ par leurs valeurs $A\alpha+\delta, B\beta+\delta, C\gamma+\delta$ tirées de (3); nous aurons

$$(A\alpha+\delta)(B\beta+\delta)(C\gamma+\delta) - K\alpha\beta\gamma = 0.$$

Pour $K = ABC$, cette équation se décompose en deux autres : $\delta = 0$, et

$$\delta^2+\delta(A\alpha+B\beta+C\gamma)+BC\beta\gamma+CA\gamma\alpha+AB\alpha\beta=0. \tag{5}$$

L'équation (5) représente la conique passant par les intersections des côtés non homologues des deux triangles A'B'C', A''B''C''. On en déduit l'équation de cette courbe rapportée à l'un ou l'autre des triangles ABC, A'B'C', A''B''C''. (J. N.)

M. Bastin a trouvé, par une autre méthode, l'équation en coordonnées normales par rapport à ABC :

$$\Sigma a^2 (c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)\, x^2 + 2abc\Sigma a^2 \Sigma ayz = 0;$$

M. Déprez a obtenu l'équation en coordonnées barycentriques par rapport à A''B''C'' :

$$\Sigma x^2 \operatorname{tg}^2 A - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \operatorname{tg} V \Sigma (\cot^2 V + \cot^2 A)\, yz = 0,$$

V étant l'angle de Brocard de ABC.

L'équation (2) se ramène à

$$x \cot A + y \cot B + z \cot C = 0;$$

elle représente l'axe d'homologie de ABC avec le triangle orthique de ABC, ou l'axe radical des cercles ABC et A'B'C', circonstance facile à prévoir.

Question 975.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 239.)

1° *Une droite* (Δ) *rencontre une strophoïde droite en trois points* A, B, C *et la perpendiculaire à l'axe passant par le point double en un point* K. *Si* P *est la projection du point double* O *sur* (Δ), *et si* δ *désigne la distance du sommet à l'asymptote, on a la relation*

$$OA \cdot OB \cdot OC = OK \cdot OP \cdot \delta.$$

2° *Un cercle* (Γ) *de centre* ω *rencontre la strophoïde en quatre points* A', B', C', D'. *Si* S *est le sommet de la courbe, et si* p *désigne la puissance de* O *par rapport au cercle* (Γ), *on a la relation*

$$OA' \cdot OB' \cdot OC' \cdot OD' \cdot S\omega = \frac{1}{2}\delta \cdot p^2.$$

(E. N. Barisien.)

Solution par MM. Droz Farny, Gillet, Klompers, Retali *et un* anonyme. 1° La strophoïde et la droite (Δ) sont représentées par

$$\rho = \frac{a(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}{\cos\varphi}, \qquad \rho = \frac{d}{\cos(\varphi - \alpha)}.$$

De la seconde équation on déduit

$$\cos(\varphi-\alpha)=\frac{d}{\rho},\quad \sin(\varphi-\alpha)=\frac{\sqrt{\rho^2-d^2}}{\rho};$$

ensuite

$$\sin\varphi=\frac{1}{\rho}[\sqrt{\rho^2-d^2}\cos\alpha+d\sin\alpha],$$

$$\cos\varphi=\frac{1}{\rho}[d\cos\alpha-\sqrt{\rho^2-d^2}\sin\alpha].$$

Substituant dans la première équation, on trouve

$$\rho^6\sin^2\alpha-\cdots-4a^2d^4=0.$$

De là

$$\overline{OA}^2.\overline{OB}^2.\overline{OC}^2=\frac{4a^2d^4}{\sin^2\alpha};$$

or

$$2a=\delta,\quad OP=d,\quad OK=\frac{d}{\sin\alpha},\quad \text{etc.}$$

2° La strophoïde et le cercle (Γ) sont représentés par

$$\rho=\frac{a(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}{\cos\varphi},\quad \rho^2-2\rho d\cos(\varphi-\alpha)+p=0.$$

Éliminant φ entre ces égalités on trouve une équation du 4^{me} degré en ρ^2; le coefficient de ρ^8 est $a^2+d^2-2ad\cos\alpha$ ou $\overline{S\omega}^2$, le terme indépendant est a^2p^4. On en déduit la seconde relation de la question.

M. Poort a résolu la même question en se servant de coordonnées rectangulaires et en représentant la strophoïde par les équations paramétriques

$$x=\tfrac{1}{2}\delta\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=\tfrac{1}{2}\delta\frac{t-t^3}{1+t^2}.$$

Question 977.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 239.)

Par un point fixe M *de l'axe d'une parabole de sommet* O, *on mène une corde quelconque* AB. *Le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* OAB *est une parabole.* (E.-N. Barisien.)

Solution par MM. Gillet, Brocard, Droz-Farny, Mandart. La

circonférence OAB rencontre la parabole en un quatrième point C ; les cordes AB et OC, antiparallèles par rapport à l'axe Ox, étant représentées par

$$y - m(x - a) = 0, \quad y + mx = 0,$$

le cercle OAB a pour équation

$$(y - mx + ma)(y + mx) + \lambda(y^2 - 2px) = 0, \qquad (1)$$

avec la condition $1 + \lambda = -m^2$. L'égalité (1) étant écrite ainsi :

$$m^2(x^2 + y^2) - may - (m^2a + 2p + 2pm^2)x = 0,$$

on trouve pour les coordonnées du centre du cercle

$$y = \frac{a}{2m}, \quad x = \frac{a}{2} + p + \frac{p}{m^2};$$

en éliminant le paramètre variable m on obtient pour le lieu proposé

$$y^2 = \frac{a^2}{4p}\left(x - p - \frac{a}{2}\right).$$

Solution par MM. Cristescu, Hacken, J. Jonesco, Déprez, Soons, Keelhoff, Klompers(*). Soient

$$y^2 = 2px, \quad y = m(x - a), \quad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0,$$

les équations de la parabole, de la corde AB et du cercle OAB. Remplaçons dans les deux dernières x par $\frac{y^2}{2p}$; nous aurons les équations

$$y^2 - \frac{2p}{m}y - 2pa = 0, \quad y^3 + 4p(p - \alpha)y - 8p^2\beta = 0,$$

dont la première a pour racines les ordonnées y_1, y_2 des points A et B, et la seconde les mêmes quantités et l'ordonnée y_3 du quatrième point de rencontre de la parabole avec le cercle. Or, des relations

$$y_1y_2 = -2pa, \quad y_1y_2y_3 = 8p^2\beta,$$

on tire

$$y_3 = -\frac{4p\beta}{a};$$

en exprimant que cette valeur est racine de l'équation du troisième degré en y, on aura l'équation du lieu proposé, etc.

(*) Nous réunissons ici des solutions fondées sur le même principe.
(Rédaction).

Remarques (dues à M. Déprez). 1° L'orthocentre du triangle OAB décrit une parabole, même lorsque le point M est quelconque. 2° Le lieu du centre de gravité de OAB est une parabole. 3° Le centre du cercle des neuf points de OAB parcourt une parabole.

MM. Retali et Buisseret ont résolu la même question.

Question 992.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 279).

On considère une série de limaçons de Pascal ayant même point double O *et même cercle directeur de rayon* R. *1° Une droite donnée* (Δ) *rencontre l'un des limaçons de la série en* A, B, C, D; *on a pour tous ces limaçons*

$$OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD = \text{const.}$$

2° Un cercle donné (Γ) *rencontre l'un des limaçons en quatre points* A′, B′, C′, D′; *on a*

$$OA' \cdot OB' \cdot OC' \cdot OD' = \text{const.}$$ (E.-N. Barisien).

Solution par MM. Droz-Farny, Klompers, Retali, Verdeyen, Colart. 1° L'équation de l'un des limaçons est

$$\rho = 2R\cos\omega + a, \tag{1}$$

a étant un paramètre variable; celle de Δ est

$$\rho\cos(\omega - \alpha) = d. \tag{2}$$

Si l'on élimine ω entre (1) et (2) on obtient

$$\rho^4 - 2a\rho^3 + (a^2 + 2Rd\sin\alpha - R^2\cos^2\alpha) - 2aRd\rho\sin\alpha + R^2d^2 = 0.$$

Les racines de cette équation sont les distances OA, OB, OC, OD; on voit que leur produit a la valeur constante R^2d^2.

2° L'équation de (Γ) étant

$$\rho^2 + d^2 - 2d\rho\cos(\omega - \alpha) - r^2 = 0, \tag{3}$$

si l'on élimine ω entre (1) et (3), on obtient une équation du quatrième degré ayant pour racines OA′, OB′, OC′, OD′; le produit de ces racines est égal à

$$\frac{R^2(d^2 - r^2)}{R^2 + d^2 - 2Rd\cos\alpha}.$$

Remarques. I. La somme $OA + OB + OC + OD$ est constante lorsque les limaçons ont même point double et même paramètre a, le rayon R étant variable. (Verdeyen).

II. Le produit $OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD$ est constant pour toutes les sécantes situées à une même distance de O.

Si le cercle (Γ) a son centre sur l'axe de symétrie des limaçons, on trouve

$$OA' \cdot OB' \cdot OC' \cdot OD' = \frac{R^2 (d^2 - r^2)^2}{(R - d)^2}. \qquad \text{(Droz).}$$

Un correspondant remplace l'équation (2) par celle qu'on obtient en multipliant membre à membre les équations

$$\rho \cos(\omega - \alpha) = d, \quad \rho \cos(\omega + \alpha) = d,$$

lesquelles représentent la droite (Δ) et sa symétrique (Δ') par rapport à $O\varpi$. Nous faisons remarquer que l'équation résultante

$$\rho^2 \cos(\omega - \alpha) \cos(\omega + \alpha) = d^2$$

ne représente pas le système des droites (Δ) et (Δ'). (J. N.).

Question CCCXV.

(Voir N. C. M., t. III, p. 433).

Pour quelles valeurs de n la somme des carrés des n premiers triangulaires, divisée par la somme des n premiers triangulaires, est-elle un carré parfait ? (E. Lucas.)

Solution par M. E. Fauquembergue. Le carré d'un nombre triangulaire de rang K étant

$$\frac{K^4 + 2K^3 + K^2}{4},$$

la somme des carrés des n premiers triangulaires est égale à

$$\frac{S_4 + 2S_3 + S_2}{4},$$

ou

$$\frac{n(n+1)(n+2)(3n^2 + 6n + 1)}{60}.$$

$$\left[S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad S_3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}, \right.$$
$$\left. S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)}{30}\right].$$

La somme des n premiers triangulaires est égale à

$$\frac{S_2 + S_1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Le rapport de la première somme à la seconde est

$$\frac{3n^2 + 6n + 1}{10}.$$

L'équation à résoudre est donc

$$3n^2 + 6n + 1 = 10p^2, \quad \text{ou} \quad 3(n+1)^2 - 2 = 10p^2.$$

On voit que $(n+1)$ doit être pair; soit $n+1 = 2x$, l'équation devient

$$6x^2 - 5p^2 = 1.$$

Elle admet la solution évidente $x = 1$, $p = 1$.

Or, quand une équation de la forme

$$ax^2 - by^2 = 1$$

admet une solution entière, elle en admet une infinité d'autres. Soit, en effet, x, y, une solution, on en obtiendra une nouvelle par les formules

$$x = x_1(ax_1^2 + 3by_1^2), \quad y = y_1(3ax_1^2 + by_1^2).$$

De sorte que dans l'équation

$$6x^2 - 5p^2 = 1,$$

on passera d'une solution x_q, p_q à une autre x_{q+1}, p_{q+1} par les formules

$$x_{q+1} = 3x_q(2x_q^2 + 5p_q^2), \quad p_{q+1} = p_q(18x_q^2 + 5y_q^2).$$

On trouve ainsi, en partant de la solution immédiate $x_1 = 1$, $p_1 = 1$, $x_2 = 21$, $p_2 = 23$; $x_3 = 222201$, $p_3 = 243409$, ... etc.

Il en résulte pour n les valeurs

$$1, 41, 444401, \ldots \text{ etc.}$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

734. Construire et résoudre un trapèze isoscèle, connaissant une base, le côté et l'angle des diagonales.

735. Développer $(2 - \sqrt{-2})^6$.

736. Une personne place à intérêts composés à 4 $\frac{1}{2}$ p. °/. un capital de fr. 762-13; pendant combien d'années à partir de la 12e après le

placement peut-elle recevoir une rente de 2000 fr., de manière à être remboursée entièrement ?

737. Trouver quatre nombres en progression arithmétique, tels que si on les augmente respectivement de 5, 6, 9, 15, les résultats soient en progression géométrique.

738. Construire les traces d'un plan, sachant qu'elles sont respectivement parallèles à des droites données p, sur l'épure, et connaissant après son rabattement sur le plan horizontal le rabattement d'un point du plan cherché dont la cote est donnée. (*Bacc. Dijon*, 1894).

739. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les quatre racines de l'équation

$$x^4 + (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$$

forment une progression arithmétique. (*Bacc. Caen*, 1894).

740. Ranger par ordre de grandeur croissante les racines de l'équation

$$(x^2 - mx - 1)(x^2 + mx - 1) = 0,$$

m était un nombre positif donné. (*Bacc. Besançon*, 1894).

741. Minimum de l'expression

$$\sqrt{x^2 - 2x + 4} + \sqrt{x^2 - 3x + 9}.$$

742. Éliminer x entre les équations

$$(b^2 - a^2 - 1)\, b \cos x + (2b^2 - 1)\, a \sin x = ab,$$
$$(2a^2 - 1)\, b \cos x + (a^2 - b^2 - 1)\, a \sin x = ab,$$

et trouver x lorsque ces équations sont compatibles.

(*Journal de Vuibert.*)

On a la condition

$$a^2 + b^2 = 1 \text{ ou } 4;$$

en posant respectivement

$$a = \cos\alpha,\ b = \sin\alpha, \quad \text{ou} \quad a = 2\cos\beta,\ b = 2\sin\beta,$$

on trouve

$$x = 2k\pi - 3\alpha, \quad \text{ou} \quad x = (2k + 1)\pi - 3\beta.$$

743. Éliminer β entre les équations

$$(x\cos\alpha - c)\sin(\alpha + \beta) = (y\cos\alpha - c)\sin(\alpha - \beta),$$
$$x\cos(\alpha + \beta) = y\cos(\alpha - \beta).$$

Réponse :

$$x + y = 2c\cos\alpha.$$

(*Mathematical Gazette*).

744. Sachant que le nombre $13xy45z$ est divisible par 792, trouver les chiffres x, y, z. (*Journal de Vuibert*).

745. Calculer les angles d'un triangle rectangle ABC, connaissant l'angle des médianes issues des extrémités de l'hypoténuse.

746. Sur une droite AB et sur les parties AC, CB de cette droite comme diamètres on décrit d'un même côté trois demi-circonférences. Démontrer que l'aire comprise entre les trois courbes est égale à celle du cercle qui a pour diamètre la tangente commune aux deux petites circonférences, limitée aux points de contact.

747. Lieu des pôles d'une droite a par rapport aux cercles tangents à deux droites fixes b, c.

Le problème se traite facilement par la géométrie analytique si l'on prend pour axes les bissectrices d, d' de l'angle bc. — On peut le considérer comme un cas particulier de la *transformation de Hirst*.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1064. On donne un triangle ABC et une droite d. Soit Σ l'une quelconque des coniques passant par A, B, C et ayant son centre sur d. Trouver 1° le lieu du pôle de la corde BC de Σ; 2° le lieu de l'intersection des normales menées à Σ en B et C; 3° le lieu du point où la normale à Σ en A coupe une seconde fois la conique. (H. Brocard.)

1065. A une même circonférence on inscrit un triangle ABC et un carré PQRS. Démontrer que les droites de Simson des sommets du carré par rapport au triangle forment un quadrilatère complet dont les milieux des trois diagonales sont le centre et les extrémités d'un diamètre du cercle des neuf points de ABC. (R. Tucker.)

1066. On considère les coniques osculatrices à une conique donnée et passant par ses foyers. Trouver le lieu du point de concours des tangentes en ces points. (E. Duporcq.)

***1067.** Parmi tous les triangles rectangles ABC de même hypoténuse BC, quel est celui dans lequel le produit du côté AB par la bissectrice de l'angle opposé C est un maximum. (Brierley.)

SUR LES CERCLES RADICAUX;

D'après M. Jean J. Duran Loriga(*).

1. Soient O, O′ les centres et R, R′ les rayons de deux cercles donnés. Cherchons le lieu des points M dont les puissances par rapport aux cercles O, O′ sont égales et de signes contraires. En posant $OO' = D$, $MO = l$, $MO' = l'$, on trouve aisément

$$l^2 - R^2 = R'^2 - l'^2 \quad \text{ou} \quad l^2 + l'^2 = R^2 + R'^2.$$

Désignons par N le milieu de OO′, par R″ la distance MN ; l'égalité précédente se transforme aisément en celle-ci :

$$R''^2 = \frac{2(R^2 + R'^2) - D^2}{4}.$$

Le lieu considéré est donc un cercle qui a pour centre le milieu N de OO′, et pour rayon

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2R^2 + 2R'^2 - D^2}.$$

Par analogie avec l'axe radical, nous appellerons ce lieu cercle radical des cercles donnés O, O′.

2. Si les circonférences O, O′ se coupent en deux points réels A, B, ces points appartiennent à la circonférence radicale; car leurs puissances par rapport aux cercles O, O′ sont nulles. De même, la circonférence radicale de deux circonférences tangentes passe par leur point de contact.

Si les cercles O, O′ sont intérieurs l'un à l'autre, on a

$$D^2 < R^2 + R'^2 - 2RR' < 2(R^2 + R'^2);$$

donc le cercle radical est réel. En particulier, le cercle radical de deux cercles concentriques est réel et a le même centre.

Si les cercles O, O′ sont extérieurs l'un à l'autre, le rayon du cercle radical peut être réel, nul ou imaginaire. Pour reconnaître ces circonstances, on prend sur une tangente au point A de la circonférence O une longueur $AB = R'$; on élève sur OB une perpendiculaire $BC = BO$, et l'on aura l'un ou l'autre cas suivant que OC est supérieur, égal ou inférieur à OO′.

(*) Nous résumons ici un bon article élémentaire « Sobre los circulos radicales », qui a paru dans « *El Progreso Matemático* » T. V, 1895.

3. Pour construire le cercle radical de deux cercles donnés O, O' qui n'ont pas de point commun, décrivons une troisième circonférence O'' qui rencontre les premières en F et G, F' et G'. L'axe radical FG des cercles O, O'', et le cercle radical des cercles O', O'' se coupent en deux points H, H' (réels ou imaginaires) appartenant au cercle radical des cercles O, O'. En effet, si P, P', P'' désignent les puissances de H par rapport aux cercles O, O', O'', on a : $P = P''$, $P' = -P''$, d'où $P = -P'$.

Cette construction peut être insuffisante dans la pratique. La suivante est préférable : Les cordes FG, F'G' se coupent en un point K de l'axe radical des cercles O, O'; de K comme centre, avec un rayon égal à la tangente menée de K à la circonférence O, décrivons un cercle ; le rayon du cercle cherché est égal à la tangente (réelle ou imaginaire) menée du milieu N de la ligne des centres OO' au cercle K.

4. D'après ce qu'on a vu ci-dessus, on peut énoncer le théorème suivant : *Étant donnés trois cercles* O, O', O'', *les cercles radicaux des couples* (O, O'), (O, O'') *ont même axe radical que le couple* (O', O'').

La démonstration est immédiate lorsque les cercles radicaux se coupent en des points réels. Dans les autres cas on peut employer la géométrie analytique. En effet, soient

$$S \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0,$$
$$S' \equiv (x-a')^2 + (y-b')^2 - R'^2 = 0,$$
$$S'' \equiv (x-a'')^2 + (y-b'')^2 - R''^2 = 0,$$

les équations de trois circonférences O, O', O''.

On voit d'abord que la circonférence radicale des deux premières a pour équation :

$$S + S' \equiv 2(x^2+y^2) - 2(a+a')x - 2(b+b')y + a^2 + b^2 - R^2 + a'^2 + b'^2 - R'^2 = 0;$$

elle a donc pour centre le point

$$\left(\frac{a+a'}{2}, \frac{b+b'}{2}\right)$$

et le carré du rayon a pour valeur

$$\left(\frac{a+a'}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+b'}{2}\right)^2 - \frac{a^2+b^2-R^2+a'^2+b'^2-R'^2}{2}$$
$$= \tfrac{1}{4}[2R^2 + 2R'^2 - (a-a')^2 - (b-b')^2],$$

ce qui s'accorde avec le n° 1.

Les cercles radicaux des couples (S, S'), (S, S'') ayant pour équations

$$S + S' = 0, \quad S + S'' = 0,$$

leur axe radical est représenté par $S' - S'' = 0$; il coïncide donc avec celui des cercles S', S''.

5. Voici des applications de ce qui précède à la géométrie du triangle.

Sur les côtés d'un triangle ABC comme diamètres décrivons trois cercles P_a, P_b, P_c ; ils ont deux à deux pour axe radical une hauteur AH_a, BH_b, CH_c et pour centre radical l'orthocentre H. Appelons Q_a, Q_b, Q_c les cercles décrits sur les médianes AM_a, BM_b, CM_c comme diamètres. Q_a est le cercle radical de P_b, P_c ; car il passe par leurs points communs A, H_a et a pour centre le milieu de leur distance des centres. De même, Q_b, Q_c sont les cercles radicaux des couples (P_c, P_a), (P_a, P_b). H est un centre radical commun aux six cercles que nous venons de considérer.

Décrivons ensuite trois circonférences U_a, U_b, U_c des milieux des côtés du triangle ABC comme centres avec les rayons M_aA, M_bB, M_cC. Elles ont pour diamètres les médianes du triangle anticomplémentaire A'B'C' (formé par les parallèles menées aux côtés de ABC par les sommets opposés); ce sont donc les circonférences Q_a, Q_b, Q_c du triangle A'B'C'. On en conclut que les cercles U_a, U_b, U_c ont deux à deux pour axe radical la droite symétrique d'une hauteur de ABC par rapport au centre O du cercle circonscrit, et pour centre radical, le point H' symétrique de H par rapport à O ou l'orthocentre de A'B'C'.

Soient V_a, V_b, V_c les circonférences décrites sur B'C', C'A', A'B' comme diamètres ; on peut dire qu'elles ont pour centres les sommets de ABC, pour rayons les côtés opposés ; U_a est le cercle radical de V_b et V_c, U_b celui de V_c et V_a, U_c celui de V_a et V_b. Les cercles V_a, V_b, V_c ont été considérés par M. de Longchamps (J. M. S., 1886, p. 57).

SUR LES TRIANGLES ÉQUILATÉRAUX INSCRITS A UNE CONIQUE,

par M. A. Droz Farny.

De nombreux auteurs ont étudié les triangles équilatéraux inscrits dans une conique à centre. Voici quelques résultats qui complètent l'intéressante note de M. E. Barisien, publiée dans le numéro de janvier de *Mathesis*, p. 14.

Je conserve les mêmes notations.

1. La droite qui joint le centre ω au quatrième point P, enveloppe une développée d'ellipse.

2. Le milieu de ωP a pour lieu l'ellipse

$$\frac{(a^2+3b^2)^2}{a^2(a^2+b^2)^2}x^2+\frac{(3a^2+b^2)^2}{b^2(a^2+b^2)^2}y^2=1.$$

3. Le point L qui divise ωP dans le rapport

$$\omega L : LP = 1 : 3,$$

est le centre de l'hyperbole d'Apollonius correspondant au point ω.

4. Remplaçons dans l'équation de l'ellipse (8), lieu des centres des circonférences ABC, b^2 par $-b^2$, puis faisons

$$a^2=3b^2;$$

l'équation deviendra :

$$4y^2=-b^2.$$

Le lieu se décompose donc en deux droites imaginaires.

Théorème. Chaque point de l'hyperbole dont les asymptotes forment un angle de 60° peut être choisi comme sommet d'un triangle équilatéral inscrit. Les deux autres sommets coïncident avec les points à l'infini de l'hyperbole.

5. Remplaçons dans la même équation (8) b^2 par $-b^2$, puis faisons

$$b^2=3a^2;$$

on trouve pour le lieu des centres

$$4x^2=a^2.$$

Théorème. Dans l'hyperbole dont l'angle des asymptotes est de 120°, le lieu géométrique des centres des circonférences circonscrites aux triangles équilatéraux inscrits dans la conique, se compose de deux droites parallèles

$$X=\pm\frac{a}{2}.$$

Si dans les formules (6) de M. Barisien :

$$A=\frac{c^2x_0}{a^2+3b^2},\quad B=-\frac{c^2y_0}{b^2+3a^2},$$

qui fournissent les coordonnées du centre du cercle, on fait les mêmes changements on trouve :

$$A=-\frac{x_0}{2},\quad B=-\frac{4a^2y_0}{0};$$

B devient indéterminée seulement pour $y_0 = 0$ et alors

$$A = \pm\frac{a}{2}.$$

Il en résulte que les cercles font partie de deux faisceaux dont les centres sont un sommet de l'hyperbole et le foyer non correspondant; d'où le théorème suivant :

Si par un sommet et le foyer non correspondant d'une hyperbole dont l'axe des asymptotes mesure 120°, on fait passer une circonférence quelconque, elle rencontre l'hyperbole en trois autres points, sommets d'un triangle équilatéral.

SUR UNE NOUVELLE DÉMONSTRATION DU POSTULATUM D'EUCLIDE.

Il vient de paraître une brochure intitulée : *Démonstration de l'axiome XI d'Euclide*, par Michel Frolov, membre de la Société mathématique de France (Deuxième tirage complété. Paris, Gauthier-Villars et fils, libraires, quai des Grands Augustins, 55, 1896. Tous droits réservés. In-8° de 22 pages, avec une planche).

Il n'est peut être pas inutile d'analyser ce nouvel essai de démonstration du postulatum d'Euclide(*).

M. Frolov exclut *a priori* la géométrie riemannienne en supposant qu'une droite est déterminée par deux *quelconques* de ses points. Dans cette hypothèse, Legendre a démontré avec rigueur, les deux propositions suivantes :

THÉORÈME I. La somme des angles d'un triangle est égale ou inférieure à deux droits; celle des angles d'un quadrilatère est égale ou inférieure à quatre droits.

THÉORÈME II. Si elle est égale à deux droits dans un seul triangle, ou à quatre droits dans un seul quadrilatère, il en est de même dans tous, et l'on peut établir le postulatum d'Euclide.

(*) En réalité, c'est le 5e des six postulats que le géomètre grec a placés en tête de ses Éléments, après les définitions; viennent ensuite, dans les meilleurs manuscrits et les meilleures éditions, neuf axiomes. Dans d'autres manuscrits et d'autres éditions, les postulats 4, 5, 6 sont devenus les axiomes 10, 11, 12. Ainsi, le postulat ou 11e axiome, c'est la même chose.

M. Frolov essaie de prouver qu'il existe des quadrilatères ayant quatre angles droits, à peu près de la manière suivante (*) :

Définition. On appelle *rhomboïde* une figure ayant ses côtés opposés et, par suite, ses angles opposés égaux.

Il est facile de construire un rhomboïde. Soit AB*b* un triangle quelconque. Sur le côté B*b*, construisons un triangle B*ba* égal à AB*b*, le côté B*a* étant égal à A*b*, le côté *ba* à AB. La figure AB*ab* sera un rhomboïde.

Si l'angle A est droit, il en sera de même de l'angle opposé *a*, et le rhomboïde AB*ab* sera birectangle.

Théorème (C) (pp. 14-15). Considérons deux droites AT, BS faisant avec une autre AB l'angle droit TAB et l'angle aigu SBA. Menons les perpendiculaires AB_1 sur BS, A_1B_1 sur AT, A_1B_2 sur BS, B_2A_2 sur AT, A_2B_2 sur BS et ainsi de suite indéfiniment. D'un point D, pris entre deux des points A_1, A_2, A_3, etc., par exemple entre A_2 et A_3, abaissons une perpendiculaire DC sur BS. Le point C sera entre B_3 et B_4 et DC rencontrera B_3A_3. Menons B_3D. On voit aisément que CD est inférieur à DB_3, qui est inférieur à A_2B_3, lui même plus petit que A_2B_2; on a $A_2B_2 < A_1B_2 < A_1B_1 < AB_1 < AB$. L'angle CDA, supplément d'un angle aigu CDA_3 est d'ailleurs obtus. Donc *la figure* ABCD *n'est pas un rhomboïde, mais un quadrilatère ayant deux angles droits opposés, puis un angle aigu en* B, *un angle obtus en* D.

Conséquences des théorèmes I, II, (C). — I. Tout rhomboïde AB*ab* ayant deux angles opposés droits A,*a* ne peut avoir en B,*b* deux angles obtus, car la somme de ses angles serait supérieure à 4 droits, ce qui est contraire au premier théorème de Legendre.

II. Il ne peut avoir non plus en B,*b* deux angles aigus; car si B était aigu, on prouverait que *b* est obtus comme on l'a fait dans le théorème (C).

III. Donc, *tout rhomboïde qui a deux angles opposés droits, a aussi ses deux autres angles opposés droits*; proposition, qui, d'après le second théorème de Legendre, permet d'établir le postulatum d'Euclide.

***

Le défaut de la prétendue démonstration que nous venons d'analyser est dans la conséquence II du théorème (C). Il n'est pas vrai que si l'an-

(*) Le lecteur est prié de faire les figures.

gle B est aigu dans la figure ABab, on puisse établir, comme dans le théorème (C), que l'angle b est obtus.

Pour le montrer, considérons le rhomboïde ABab. On trouve aisément qu'il jouit de la propriété suivante : Si du point I de rencontre des diagonales Aa, Bb, on abaisse des perpendiculaires IP, IQ sur Ab, Ba, IQ est le prolongement de IP; autrement dit, PQ est une perpendiculaire commune à Ab et Ba, ou bien APQB est rectangle en A, P, Q.

Supposons maintenant que l'on applique à la figure ABQP, où l'angle B est supposé aigu, la construction dont il est question dans le théorème (C). Menons les perpendiculaires AB_1 sur BQ, B_1A_1 sur AP, A_1B_2 sur BQ_1, B_2A_2 sur AP, A_2B_3 sur BQ, B_3A_3 sur AP, A_3B_4 sur BQ, et ainsi de suite indéfiniment. Aucune de ces perpendiculaires ne pourra rencontrer PQ, perpendiculaire à AP et BQ. Donc jamais cette construction indéfinie ne permettra d'arriver au delà de P sur le prolongement Pb de AP, et, *à fortiori*, en b ou au delà.

Dans le théorème (C), on a bien pu prouver que l'angle D était obtus, parce que D était situé entre les deux points A_2 et A_1, *par hypothèse*; dans la conséquence II, on ne peut prouver que b est obtus, parce que b est dans la région de la ligne APb, située au delà de P, sur le prolongement de AP, où ne se trouve aucun des points A_1, A_2, A_3, etc.

La démonstration est donc complètement manquée, ce qui était inévitable, puisque MM. Beltrami et De Tilly ont prouvé que le postulatum d'Euclide est indémontrable, quand on part de la définition classique de la droite (*).

Dans ce qui précède, nous ne nous sommes attachés qu'au point essentiel de M. Frolov. Mais on peut y signaler d'autres passages où il est difficile d'être d'accord avec lui.

Ainsi, dans une note explicative, p. 22, il admet qu'une perpendicu-

---

(*) La forme de l'essai de démonstration de M. Frolov est assez captieuse. Voici, par exemple, le *corollaire* du théorème (C), où il réunit dans une seule phrase, la démonstration (insuffisante sous cette forme) de la possibilité de construire un rhomboïde birectangle en deux sommets opposés, la conséquence II (fausse), donnée plus haut et la conséquence III : COROLLAIRE : *Si dans un quadrangle ayant deux angles opposés droits, on fait tourner l'un d'eux autour de son sommet, en augmentant graduellement son angle aigu et en diminuant de la même manière son angle obtus jusqu'à ce qu'ils deviennent égaux, ces deux angles seront alors nécessairement égaux tous les deux à un droit.*

laire en B à la ligne BS de la figure relative au théorème (*c*), rencontre AT; c'est là une proportion indémontrable équivalente au postulatum d'Euclide lui-même, que l'on veut démontrer.

La préface (4 pages) et l'introduction (4 pages) contiennent des assertions historiques et des considérations sur les définitions que nous sommes loin d'admettre toutes. Riemann n'a pas donné la définition de la droite qui lui est attribuée; Legendre ne s'est pas engagé dans des voies détournées pour démontrer le célèbre postulatum : personne, au contraire, avant Lobatchefsky, n'en a mieux approfondi la nature.

P. MANSION.

NOTES EXTRAITES DE LA CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE.

(Voir *Mathesis*, V, 138, 195, VI, 18, 42).

10. *De la courbe aux trois foyers et de sa tangente* (C. G. Q., VII, pp. 32-36, 123-128 et 214.) Trois points fixes F, F′, F″ sont donnés dans l'espace; un premier fil FMF′ est attaché par ses extrémités aux points F, F′; un second fil FMF″, d'une longueur indépendante de celle du premier, est attaché par ses extrémités aux points F, F″; on suppose qu'un anneau saisissant en même temps les deux fils, se meut de manière que ces fils soient toujours tendus; le point d'intersection des deux fils décrit une courbe considérée par Monge dans ses leçons publiées par le *Journal de l'École normale* de 1795. Le célèbre créateur de la Géométrie descriptive avait avancé que cette courbe est gauche et avait appliqué la méthode de Roberval au tracé de la tangente. Ch. Dupin a fait observer que la courbe est plane et Duhamel a montré que la construction de la tangente est inexacte. Hachette, dans l'article que nous analysons ici, présente, à son tour, une solution de la question. Voici une démonstration synthétique du premier point.

Considérons les quadriques engendrées par deux coniques qui ont un foyer commun F et tournent autour de leurs axes focaux Fx, Fx'. Les directrices d, d' engendrent deux plans D, D′ qui sont respectivement perpendiculaires à Fx, Fx'. Si M est un point commun aux deux quadri-

ques, et que MP, MP′ désignent ses distances aux plans D, D′, on a :

$$\frac{MF}{MP} = e, \quad \frac{MF}{MP'} = e', \quad \text{d'où} \quad \frac{MP}{MP'} = \frac{e'}{e}, \tag{1}$$

e et e' étant les excentricités numériques des courbes méridiennes.

Or le lieu des points dont le rapport des distances à deux plans fixes D et D′ est constant, se compose de deux plans passant par l'intersection des plans D et D′ ; donc les deux quadriques se coupent suivant deux coniques dont l'une ou les deux peuvent être imaginaires. La discussion complète des différents cas qui peuvent se présenter dans le problème de Monge, a été faite par Reiss, *loc. cit.*

11. *Sur quelques courbes remarquables* (C. G. Q., VII, pp. 41-43, extrait d'une lettre de Chasles). Chasles énonce les théorèmes suivants dont la démonstration ne présente guère de difficulté :

La podaire droite ou oblique du centre d'une circonférence par rapport à l'une de ses développantes est une spirale d'Archimède.

La caustique par réflexion du centre d'une circonférence par rapport à une de ses développantes est la développée d'une spirale d'Archimède.

Quand une courbe plane Δ *roule sur une droite fixe* D, *un point quelconque de* D *décrit sur le plan de la courbe mobile* Δ *une développante de celle-ci.*

En particulier, *si un cercle roule sur une droite, un stylet placé en un point fixe de cette droite ou de la droite décrite par le centre du cercle, trace respectivement, une développante du cercle ou une spirale d'Archimède sur le plan du cercle.*

Si une développante de cercle se déplace de manière à passer constamment par les deux points où elle a rencontré, dans sa position initiale, une tangente au cercle, son origine située sur la circonférence de cercle décrira une cycloïde ordinaire.

Si l'on fait glisser le centre d'une spirale d'Archimède sur une droite, et son périmètre par un point fixe de cette droite, le point de la spirale qui est distant du centre d'une quantité égale à la sous-normale, décrit une cycloïde ordinaire.

Quand un cercle roule sur une droite ou sur un second cercle, chacun de ses diamètres enveloppe, respectivement, une cycloïde ou une épicycloïde.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 814.

(Voir *Mathesis* (2), III, p. 56).

Deux triangles sphériques ont leurs côtés proportionnels.

Les angles du triangle dont les côtés sont les plus petits sont-ils toujours plus petits que ceux de l'autre triangle?

Solution par M. P. Mansion. Soit ABC un triangle sphérique ayant pour angles A, B, C et pour côtés opposés ax, bx, cx, x étant une quantité positive; nous aurons

$$\cos A = \frac{\cos ax - \cos bx \cos cx}{\sin bx \sin cx}.$$

On trouve aisément que la dérivée de A par rapport à x est de même signe que l'expression

$$\delta_1 = a - b\cos C - c\cos B.$$

Si δ_1 est positif, A croît avec x, c'est-à-dire en même temps que les côtés.

Nous allons voir qu'il en est toujours ainsi. Pour cela, considérons les deux autres expressions analogues à δ_1, savoir :

$$\delta_2 = b - c\cos A - a\cos C, \quad \delta_3 = c - a\cos B - b\cos A.$$

Le calcul donne pour la dérivée de δ_1, m et n étant des quantités positives,

$$\frac{d\delta_1}{dx} = m\delta_2 + n\delta_3. \qquad (A)$$

Quand on fait tendre x vers 0, les angles du triangle ABC tendent indéfiniment vers les angles A_1, B_1, C_1, du triangle rectiligne ayant pour côtés a, b, c.

En effet, pour $x = 0$, on a successivement, α, β, γ, ε, η, ζ, θ désignant des termes du 3e ou du 4e ordre en x,

$$\lim \cos A = \lim \frac{\cos ax - \cos bx \cos cx}{\sin bx \sin cx} =$$

$$\lim \frac{(1 - \tfrac{1}{2}a^2x^2 + \alpha) - (1 - \tfrac{1}{2}b^2x^2 + \beta)(1 - \tfrac{1}{2}c^2x^2 + \gamma)}{(bx - \varepsilon)(cx - \eta)} =$$

$$\lim \frac{x^2(b^2 + c^2 - a^2) + \zeta}{2bcx^2 + \theta} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos A_1,$$

$$\lim \cos B = \cos B_1; \quad \lim \cos C = \cos C_1.$$

Dans le triangle rectiligne $A_1B_1C_1$, on a

$$a - b\cos C_1 - c\cos B_1 = 0, \quad b - c\cos A_1 - a\cos C_1 = 0,$$
$$c - a\cos B_1 - b\cos A_1 = 0;$$

c'est-à-dire que, pour $x = 0$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$.

Cela posé, faisons, dans le cas où x est positif, toutes les hypothèses possibles sur les signes de δ_2, δ_3.

1° Supposons que δ_2, δ_3 soient positifs. Alors $\frac{d\delta_1}{dx}$ est aussi positif, d'après la relation (A); δ_1 est croissant à partir de sa valeur initiale 0, correspondant à $x = 0$; par suite, δ_1 est positif. Donc si deux des quantités δ_1, δ_2, δ_3 sont positives, il en est de même de la troisième.

2° Soient, s'il est possible, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 = 0$. Alors d'après (A), δ_1 est > 0; mais si l'on a $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, d'après le 1°, δ_3 est > 0, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc cette hypothèse ne peut se présenter.

3° Soient, s'il est possible, $\delta_2 < 0$, $\delta_3 < 0$. Alors, d'après (A), δ_1 est décroissant à partir de sa valeur initiale 0, correspondant à $x = 0$; par suite, δ_1 est négatif. Donc si deux des quantités δ_1, δ_2, δ_3 sont négatives, il en est de même de la troisième. Mais cela est impossible, car il en résulterait que les angles A, B, C seraient tous les trois inférieurs à leur valeur initiale A_1, B_1, C_1; par suite, puisque $A_1 + B_1 + C_1 = 2$ droits, on aurait, dans le triangle sphérique ABC, $A + B + C < 2$ droits, ce qui est absurde.

4° Soient, s'il est possible, $\delta_2 < 0$, $\delta_3 = 0$. Alors, d'après (A), on a encore $\delta_1 < 0$; mais d'après le 3°, si $\delta_1 < 0$, $\delta_2 < 0$, δ_3 est < 0, ce qui est contraire à l'hypothèse. Cette hypothèse ne peut donc se présenter.

5° Soient, s'il est possible $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$, $\delta_3 = 0$. Alors les angles A, B, C, ne varieraient pas avec x, ce qui est impossible; en effet, l'on aurait, pour deux valeurs différentes de x, deux triangles sphériques équiangles inégaux, ce qui est absurde.

6° Soient, s'il est possible, $\delta_2 = 0$, $\delta_3 = 0$. Alors, d'après (A), on aurait $\frac{d\delta_1}{dx} = 0$, ou δ_1 constant. On ne peut supposer δ_1 nul d'après le 5°; ni $\delta_1 > 0$, car, on prouverait comme au 2° que si $\delta_1 > 0$, $\delta_2 = 0$, on a $\delta_3 > 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse; ni $\delta_1 < 0$, car on prouverait comme au 4° que $\delta_1 < 0$, $\delta_2 = 0$, entraîne $\delta_3 < 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il n'y a donc qu'une seule hypothèse possible ; δ_1, δ_2, δ_3 sont tous trois positifs, et A, B, C croissent avec x. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si deux triangles sphériques ont leurs côtés proportionnels, les angles du triangle dont les côtés sont les plus petits sont plus petits que ceux du triangle dont les côtés sont les plus grands.

Ce théorème est utile en géométrie non euclidienne.

Questions 955 et 993.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, pp. 175 et 279).

955. *On donne une parabole et un point fixe* P *de son plan. Par* P, *on mène une corde quelconque* AB. *Le cercle de diamètre* AB *rencontre la parabole en deux nouveaux points* A_1, B_1. *De même, le cercle de diamètre* A_1B_1 *rencontre la parabole en* A_2, B_2. *Et ainsi de suite.*

1° *Chacune des cordes* A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n *passe par un point fixe* P_1, P_2 ..., P_n.

2° *Le lieu du point de rencontre de deux cordes quelconques* A_kB_k, $A_{k'}B_{k'}$ *est une hyperbole équilatère ; en particulier, le lieu du point de rencontre de* AB *et* A_1B_1 *est l'hyperbole d'Apollonius relative au point* P.

3° *Les triangles* PP_1P_2, $P_3P_4P_5$, $P_6P_7P_8$, ... *sont équivalents.*

4° *Lorsque le point* P *est au foyer de la parabole, les points* P_1, P_2 ... *sont sur l'axe de la parabole ; les hyperboles, lieux du point de rencontre des cordes* A_kB_k, $A_{k'}B_{k'}$ *deviennent des droites perpendiculaires à l'axe.*

5° *Lorsque P est au foyer, le cercle de diamètre* AB *et la perpendiculaire à* AB *abaissée du foyer se rencontrent sur deux droites fixes.*

6° *Dans ce même cas, le lieu des points d'intersection du cercle de diamètre* AB *avec la perpendiculaire abaissée du sommet de la parabole sur* AB, *est un cercle.* (E. N. Barisien.)

993. *On donne une parabole* (P) *et un point* M *sur son axe. Par ce point* M, *on mène une corde* AB. *Le cercle de diamètre* AB *rencontre la parabole en deux autres points* C *et* D. *Montrer que :*

1° *La corde* CD *passe par un point fixe lorsque la corde* AB *varie ;*

2° *Les cordes* AB *et* CD *se rencontrent sur une droite fixe ;*

3° *Le cercle de diamètre* AB *enveloppe une cubique.*

Lorsque le point M *est au foyer, la droite fixe devient la directrice et la cubique se décompose en la directrice et un cercle.* (E. N. Barisien.)

955. *Solution analytique par* MM. SCHOUTE (Groningue), BASTIN (Liège), DEPREZ (Charleroi), DROZ-FARNY (Porrentruy), VERDEYEN (Gand), J. JONESCO et V. CRISTESCU (Bucharest) (*).

1° Si l'équation d'une corde de la parabole $y^2 = 2px$ est $y = mx + n$, les ordonnées α, β des extrémités sont racines de l'équation

$$y^2 - \frac{2p}{m}y + \frac{2p}{n} = 0, \quad \text{d'où} \quad \alpha + \beta = \frac{2p}{m}, \quad \alpha\beta = \frac{2pn}{m}.$$

Tirons de là m et n; l'équation de la corde prendra la forme

$$2px - (\alpha + \beta)y + \alpha\beta = 0. \tag{1}$$

Soient maintenant X, Y les coordonnées du point donné P, et α, β les ordonnées des points A, B; la corde AB sera représentée par (1), avec la condition

$$2pX - (\alpha + \beta)Y + \alpha\beta = 0. \tag{2}$$

Si $\left(\frac{y^2}{2p}, y\right)$ désignent les coordonnées de l'un des points A_1, B_1, on trouve en exprimant que l'angle AA_1B (ou AB_1B) est droit :

$$y^2 + (\alpha + \beta)y + \alpha\beta + 4p^2 = 0.$$

Par suite, les ordonnées α_1, β_1 des points A_1, B_1 vérifient les égalités

$$\alpha_1 + \beta_1 = -(\alpha + \beta), \quad \alpha_1\beta_1 = \alpha\beta + 4p^2, \tag{3}$$

et, par analogie avec (1), l'équation de la corde A_1B_1 est

$$2px + (\alpha + \beta)y + \alpha\beta + 4p^2 = 0.$$

Si l'on en retranche (2), on obtient

$$2p(x - X) + (\alpha + \beta)(y + Y) + 4p^2 = 0;$$

par conséquent, pour toutes les valeurs de $\alpha + \beta$, la droite A_1B_1 passe par un point fixe P_1 défini par les égalités

$$y + Y = 0, \quad 2p(x - X) + 4p^2 = 0,$$

et si X_1, Y_1 sont les coordonnées de P_1 on a

$$Y_1 = -Y, \quad X_1 = X - 2p.$$

(*) Les solutions envoyées par nos honorables correspondants diffèrent par des *variantes* que le défaut d'espace nous empêche de reproduire. Pour les diverses parties nous choisissons la variante la plus simple ou la plus élégante.

(*Rédaction.*)

En continuant ainsi on trouve pour A_nB_n :

$$\alpha_n + \beta_n = (-1)^n(\alpha+\beta),\quad \alpha_n\beta_n = \alpha\beta + 4np^2,$$
$$2px + (-1)^n(\alpha+\beta)y + \alpha\beta + 4np^2 = 0,$$
$$X_n = X - 2np,\quad Y_n = (-1)^n Y. \qquad (4)$$

2° Deux cordes consécutives A_nB_n, $A_{n+1}B_{n+1}$ sont antiparallèles par rapport à l'axe de la parabole; car elles sont communes à cette courbe et à une circonférence. On en conclut que les cordes AB, A_2B_2, A_4B_4, ... sont parallèles entre elles, de même que les cordes A_1B_1, A_3B_3, A_5B_5, ...

Considérons deux cordes non parallèles A_kB_k, $A_{k'}B_{k'}$, où k et k' sont de parité différente. Si, entre leurs équations et l'égalité (2), on élimine $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$, on obtient pour le lieu de leur intersection

$$\begin{vmatrix} x+2pk & (-1)^k y & 1 \\ x+2pk' & (1-)^{k'}y & 1 \\ X & Y & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$xy - y[X-(k+k')p] + 2(-1)^k p(k'-k)Y = 0. \qquad (5)$$

Ce lieu est donc une hyperbole équilatère asymptotique à l'axe des x. Si l'on suppose $k=0$, $k'=1$ on obtient l'hyperbole d'Apollonius du point P.

3° Les formules (4) montrent que les points P, P_1, P_2, ... sont situés alternativement sur la parallèle à l'axe des x menée par P et sur la symétrique de cette droite par rapport au même axe; de plus, les projections des droites PP_1, P_1P_2, P_2P_3, ... sur ces parallèles sont constantes et égales à $2p$.

Il résulte de là que les triangles PP_1P_2, $P_2P_3P_4$, $P_4P_5P_6$, ... sont isoscèles et égaux entre eux; que les triangles $P_1P_2P_3$, $P_3P_4P_5$, ... sont inversement égaux aux précédents.

4° Si l'on suppose $Y=0$, on a aussi $Y_n=0$, de sorte que les points P, P_1, P_2, ... sont sur l'axe de la parabole. L'équation (5) se réduit à

$$y(x - X + kp + k'p) = 0;$$

donc le lieu de l'intersection des droites A_kB_k, $A_{k'}B_{k'}$, lorsque k et k' ont une différence impaire, est une droite perpendiculaire à l'axe Ox.

5° Si on fait $X = \frac{p}{2}$, $Y=0$, la condition (2) devient

$$\alpha\beta = -p^2, \qquad (6)$$

et l'équation (1) de AB se transforme en

$$2px - (\alpha + \beta)y - p^2 = 0.$$

La perpendiculaire abaissée de F sur cette droite est représentée par

$$2py + (\alpha + \beta)\left(x - \frac{p}{2}\right) = 0. \qquad (7)$$

La circonférence de diamètre AB a pour équation

$$(y - \alpha)(y - \beta) + \left(x - \frac{\alpha^2}{2p}\right)\left(x - \frac{\beta^2}{2p}\right) = 0,$$

ou, en tenant compte de la relation (6) :

$$x^2 + y^2 - (\alpha + \beta)y - \frac{(\alpha + \beta)^2 + 2p^2}{2p}x - \frac{3}{4}p^2 = 0. \qquad (8)$$

Pour obtenir l'équation du lieu demandé, il reste à éliminer $\alpha + \beta$ entre (7) et (8). Le résultat est

$$\left[\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2\right]\left(x - \frac{3}{2}p\right)\left(x + \frac{1}{2}p\right) = 0;$$

le lieu proprement dit est la droite $x = \frac{3}{2}p$ et la directrice. Ce résultat s'explique facilement :

Si d'un point T de la directrice on mène deux tangentes TA, TB, la corde de contact AB passe par F et est perpendiculaire sur TF, et les deux tangentes sont rectangulaires, etc.

6° La perpendiculaire abaissée du sommet de la parabole sur AB a pour équation

$$2py + (\alpha + \beta)x = 0. \qquad (9)$$

Si l'on élimine $\alpha + \beta$ entre (8) et (9) on trouve

$$x\left(x^2 + y^2 - px - \frac{3}{4}p^2\right) = 0;$$

donc le point d'intersection de la circonférence de diamètre AB avec la perpendiculaire abaissée du sommet sur AB, décrit une circonférence de centre F et de rayon p.

Lorsque dans les n°s 5 et 6 on prend au lieu de F un point quelconque P de l'axe, les deux lieux sont encore respectivement un système de deux perpendiculaires à l'axe et une circonférence (Déprez).

MM. Schoute et Déprez traitent par le calcul la question analogue pour l'ellipse

et arrivent aux mêmes résultats que M. Servais (voir solution ci-après). Le savant professeur de Groningue indique également une démonstration synthétique de ces propositions.

M. Droz Farny établit aussi par la géométrie le n° 6 de la question 955.

955. *Solution géométrique par* M. Cl. Servais(*). Les centres H et C de l'hyperbole équilatère et du cercle passant par les points A, B, A_1, B_1 sont diamétralement opposés sur la conique, lieu des centres des coniques circonscrites au quadrilatère ABA_1B_1(**). Le point C étant le milieu de AB, H est le milieu de A_1B_1. Les points H et C décrivent deux figures inversement semblables ayant pour point double et pour droites doubles le centre O et les axes de la conique (Σ)(***). Les droites AB et A_1B_1 étant également inclinées sur les axes sont deux droites homologues de ces deux figures; mais l'une passe par un point fixe P, l'autre passera donc par un point fixe P_1, correspondant au point P. *Les droites* OP, OP_1 *sont donc également inclinées sur les axes et on a*

$$\frac{OP}{OP_1} = k,$$

k étant une constante indépendante de la position du point P.

Les deux points P et P_1 jouissent des propriétés suivantes : *Si au point* F *milieu de* PP_1 *on élève une perpendiculaire sur laquelle on prend deux longueurs* FG *et* FG' *égales à* PF, *les droites* OG, OG' *sont conjuguées dans une involution, indépendante de la position du point* P.

La circonférence circonscrite au triangle OPP_1 *rencontre les axes de la conique* (Σ) *en deux points situés sur la perpendiculaire élevée au milieu de* PP_1(†).

Il résulte de ce qui précède que les points P, P_2, ... P_{2k} sont sur le diamètre OP et les points P_1, P_3, ... P_{2k+1} sur le diamètre OP_1. Deux points P_{2p}, P_{2q} sont correspondants dans deux figures directement semblables, tandis que P_{2p} et P_{2q+1} sont correspondants dans deux figures inversement semblables. Le rapport de similitude est dans le premier

(*) La parabole est remplacée par une conique quelconque (Σ), sauf en ce qui concerne le 5° et le 6°.

(**) Voir *Mathesis* (2) IV, p. 95.

(***) Idem, p. 54 et 93.

(†) Pour la démonstration, voir *Mathesis* (2), IV, p. 97.

αk^{2q-2p} et dans le second $k^{2q+1-2p}$. Les triangles $P_{2p}P_{2p+1}P_{2p+2}$, $P_{2q}P_{2q+1}P_{2q+2}$ sont donc semblables ainsi que les triangles $P_{2p}P_{2p+1}P_{2p+2}$, $P_{2q+1}P_{2q+2}P_{2q+3}$ (*).

Dans le cas limite où la conique est une parabole, les points P et P_1 sont à égale distance de l'axe, mais de côtés différents. Le symétrique P'_1 de P_1 par rapport à l'axe et le point P décrivant deux figures directement semblables dont le centre de similitude est à l'infini, le segment PP'_1 est donc constant. Dans le cas de la parabole, la projection de PP_1 sur l'axe est constante et les triangles considérés sont égaux.

Soit S l'intersection des droites AB, A_1B_1; les droites PS, P_1S_1 décrivent deux faisceaux inversement égaux; le point S décrit donc une hyperbole équilatère sur laquelle les points P et P_1 sont diamétralement opposés. Si AB est normale en A à la conique (Σ), le cercle C est tangent en A à la conique et le point A_1 coïncide avec A. Ce point est, dans ce cas, l'intersection des cordes AB, A_1B_1; l'hyperbole trouvée est donc l'hyperbole d'Apollonius relative au point P.

Deux cordes $A_{2p}B_{2p}$, $A_{2q}B_{2q}$ sont parallèles; deux cordes $A_{2p}B_{2p}$, $A_{2q+1}B_{2q+1}$ sont également inclinées sur les axes sans être parallèles et se coupent sur une hyperbole équilatère (même démonstration).

Si le point P est sur un axe de la conique (Σ), les diamètres OP et OP_1 coïncident et tous les points P sont sur le même axe. Le triangle PSP_1 est isoscèle; le point S est donc sur la perpendiculaire élevée à l'axe au milieu du segment PP_1.

Supposons que la conique (Σ) soit une parabole dont le foyer est le point P. Les tangentes aux points A et B sont rectangulaires et se coupent au point D sur la directrice. Ce point D et son symétrique D' par rapport au foyer sont les points d'intersection du cercle de diamètre AB avec la perpendiculaire menée du foyer à la corde AB; ils décrivent donc deux droites fixes.

Soient E le sommet de la parabole, F le pied de la perpendiculaire abaissée de E sur AB, K un point d'intersection de cette perpendiculaire avec le cercle de diamètre AB. Représentons par α l'angle PEF, par p la distance EP, par R et C le rayon et le centre du cercle. Nous aurons :

$$PF = p \sin \alpha, \quad CP = R \sin \alpha;$$

(*) Les triangles $P_iP_mP_n$, $P_{i+a}P_{m+a}P_{n+a}$ sont aussi semblables (C. S.).

d'où

$$CF = (p + R)\sin\alpha,$$

$$\overline{KP}^2 = \overline{KF}^2 + \overline{PF}^2 = \overline{CK}^2 - \overline{CF}^2 + \overline{PF}^2,$$

$$\overline{KP}^2 = R^2 - (p + R)^2\sin^2\alpha + p^2\sin^2\alpha$$

ou

$$\overline{KP}^2 = R^2\cos^2\alpha - 2pR\sin^2\alpha.$$

Mais

$$2p = R\cos^2\alpha;$$

donc

$$\overline{KP}^2 = R^2\cos^4\alpha = (2p)^2.$$

Le point K, est, par conséquent, situé sur le cercle décrit du foyer comme centre avec l'ordonnée focale pour rayon.

993. Cette question a été résolue par MM. Klompers (Anvers), Droz-Farny, V. Cristescu, Buisseret et Buysens (Gand), Déprez, P. Bastin, Colart (Huy), Polak (Bruxelles), Bogdan Jonesco (Bucarest), V. Retali (Milan), J. Jonesco (Bucarest).

Les deux premières parties ont été démontrées plus haut.

Avec les notations de la question 955, l'équation du cercle de diamètre AB est

$$(y - \alpha)(y - \beta) + \left(x - \frac{\alpha^2}{2p}\right)\left(x - \frac{\beta^2}{2p}\right) = 0$$

ou

$$x^2 + y^2 - (\alpha + \beta)y - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2p}x + \alpha\beta + \frac{\alpha^2\beta^2}{4p^2} = 0.$$

L'égalité de condition (2) se réduit maintenant à $\alpha\beta = -2pX$.

Si donc on pose $\alpha + \beta = \lambda$, l'équation du cercle prend la forme

$$x^2 + y^2 - \lambda y - \frac{\lambda^2 + 4pX}{2p}x - 2pX + X^2 = 0.$$

Pour l'enveloppe de ce cercle, on trouve facilement

$$py^2 + 2x[(x - X)^2 + y^2 - 2pX] = 0,$$

équation d'une cubique.

Lorsqu'on fait $X = \frac{p}{2}$, on trouve

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)\left(x^2 + y^2 - \frac{3}{2}px\right) = 0;$$

c'est-à-dire la directrice et une circonférence.

A l'occasion de la question 993, M. Droz-Farny indique une solution géométrique de la question 955.

×Question 968.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 215.)

Soient, dans un triangle ABC, H *l'orthocentre et* A', B', C' *les pieds des hauteurs. Posons*

$$P_a = AH.AA', \quad \ldots, \quad P_h = HA.BA' = HB.HB' = HC.HC'.$$

On aura

$$\overline{AH}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{AB}^2 = P_a + P_b + P_c + P_h = 4R^2,$$

$$\frac{1}{P_a} + \frac{1}{P_b} + \frac{1}{P_c} = -\frac{1}{P_h}. \qquad \text{(Droz Farny.)}$$

Solution par MM. Poort (Groningue), Delahaye (Roye), Fairon (Seraing), J. Jonesco. Désignons par O le centre du cercle ABC, par A_1, B_1, C_1 les milieux de BC, CA, AB. Les triangles rectangles OBA_1, OCB_1, OAC_1 donnent

$$R^2 = \overline{BA_1}^2 + \overline{A_1O}^2 = \overline{CB_1}^2 + \overline{B_1O}^2 = \overline{AC_1}^2 + \overline{OC_1}^2;$$

d'où, en observant que $AH = 2OA_2$, ... :

$$4R^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AH}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{BH}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CH}^2. \qquad (1)$$

Si l'on applique aux facteurs qui entrent dans P_a, P_b, P_c, P_h la règle des signes, on peut écrire

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2AB.AC'; \qquad (2)$$

mais les quadrilatères inscriptibles BA'HC', CA'HB' donnent

$$P_a = AH.AA' = AB.AC' = AC.AB'; \qquad (3)$$

donc, d'après les relations (2) et (3) et par analogie :

$$P_a = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, \quad P_b = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}, \quad P_c = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}. \qquad (4)$$

Il en résulte

$$P_a + P_b + P_c = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}. \qquad (5)$$

D'autre part,

$$P_a = AH.AA' = AH\,(AH + HA') = \overline{AH}^2 - P_h,$$

$$P_b = \overline{BH}^2 - P_h, \quad P_c = \overline{CH}^2 - P_h;$$

d'où

$$P_a + P_b + P_c = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 - 3P_h,$$

et en remplaçant $\overline{AH}^2$, $\overline{BH}^2$, $\overline{CH}^2$ par leurs valeurs tirées de (1) :

$$P_a + P_b + P_c = 12R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) - 3P_h; \qquad (6)$$

et en éliminant $a^2 + b^2 + c^2$ entre (5) et (6) :

$$P_a + P_b + P_c + P_h = 4R^2.$$

On a, en tenant compte des signes des segments :

$$\frac{P_h}{P_a} = -\frac{HA'}{AA'} = -\frac{BHC}{BAC};$$

en faisant la somme des égalités analogues on obtient

$$\frac{P_h}{P_a} + \frac{P_h}{P_b} + \frac{P_h}{P_c} = -1,$$

ce qui est la dernière égalité à démontrer.

Solution trigonométrique par MM. E. Colart, E. N. Barisien, V. Cristescu, De Nobele (*Gand*), Déprez. On a

$$AH = 2OA_1 = a \operatorname{cotg} A,$$

d'où

$$\overline{AH}^2 + \overline{BC}^2 = a^2(1 + \operatorname{cotg}^2 A) = \frac{a^2}{\sin^2 A} = 4R^2.$$

Ensuite

$$P_a = ah_a \operatorname{cotg} A = 2S \operatorname{cotg} A = 4R^2 \sin B \sin C \cos A,$$

$$P_b = 2S \operatorname{cotg} B = 4R^2 \sin C \sin A \cos B,$$

$$P_c = 2S \operatorname{cotg} C = 4R^2 \sin A \sin B \cos C,$$

$$P_h = 4R^2 \cos A \cos B \cos C;$$

par conséquent

$$P_a + P_b + P_c - P_h = 4R^2(\sin B \sin C \cos A + \cdots - \cos A \cos B \cos C)$$

$$= -4R^2 \cos(A + B + C) = 4R^2,$$

$$\frac{1}{P_a} + \frac{1}{P_b} + \frac{1}{P_c} = \frac{1}{2S}(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C) = \frac{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}{2S} = \frac{1}{P_h}.$$

M. E. Lemoine déduit très simplement les relations de M. Droz Farny des formules de *Mathesis*, 1892, p. 81-92, nos 130 et 123.

Il est indispensable d'appliquer la règle des signes des segments comptés sur une même droite pour rendre générales les égalités de la question.

*Question 963.

(Voir *Mathesis*, (2) IV, p. 215).

Soit O *le centre du cercle circonscrit au triangle* ABC; *les tangentes en* A,B,C *à ce cercle forment un nouveau triangle* A'B'C'. *On prolonge* A'O *de* $O\alpha = \frac{1}{2}$ A'O, B'O de $O\beta = \frac{1}{2}$ B'O, C'O *de* $O\gamma = \frac{1}{2}$ C'O; *démontrer que les droites* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *se rencontrent sur la circonférence* ABC *en un point* D, *ayant pour coordonnées normales*

$$\frac{\sin A}{3\cot B\cot C - 1}, \quad \frac{\sin B}{3\cot C\cot A - 1}, \quad \frac{\sin C}{3\cot A\cot B - 1},$$

et que chacun des points A,B,C,D *peut être déduit des trois autres, de la même manière que* D *de* A,B,C. (Dobbs).

Solution par MM. P. Bastin *et* Deprez. Les coordonnées normales de O sont

$$\alpha = 2R\cos A, \quad \beta = 2R\cos B, \quad \gamma = 2R\cos C;$$

celles de A' sont

$$\alpha_1 = -a\,\mathrm{tg}\,A = -2R\sin A\,\mathrm{tg}\,A, \quad \beta_1 = b\,\mathrm{tg}\,A = 2R\sin B\,\mathrm{tg}\,A,$$
$$\gamma_1 = c\,\mathrm{tg}\,A = 2R\sin C\,\mathrm{tg}\,A.$$

On en conclut celles du point α qui divise la droite OA' soustractivement dans le rapport 1 : 3, à savoir

$$\alpha'_1 = \frac{3\alpha - \alpha_1}{2} = R(3\cos A + \sin A\,\mathrm{tg}\,A),$$

$$\beta' = R(3\cos B - \sin B\,\mathrm{tg}\,A) = R\,\mathrm{tg}\,A\sin B(3\,\mathrm{cotg}\,B\,\mathrm{cotg}\,A - 1),$$
$$\gamma'_1 = R\,\mathrm{tg}\,A\sin C(3\,\mathrm{cotg}\,C\,\mathrm{cotg}\,A - 1).$$

La droite $A\alpha$ a donc pour équation

$$\frac{y}{\beta'_1} = \frac{z}{\gamma'_1}, \quad \text{ou} \quad \frac{3\,\mathrm{cotg}\,C\,\mathrm{cotg}\,A - 1}{\sin B}y = \frac{3\,\mathrm{cotg}\,B\,\mathrm{cotg}\,A - 1}{\sin C}z.$$

Deux permutations tournantes successives donnent les équations des droites $B\beta$, $C\gamma$. On voit facilement que ces droites passent par un même point D dont les coordonnées normales sont proportionnelles à

$$\frac{\sin A}{3\,\mathrm{cotg}\,B\,\mathrm{cotg}\,C - 1}, \quad \frac{\sin B}{3\,\mathrm{cotg}\,C\,\mathrm{cotg}\,A - 1}, \quad \frac{\sin C}{3\,\mathrm{cotg}\,A\,\mathrm{cotg}\,B - 1}.$$

Le point D appartient à la circonférence ABC; car ses coordonnées vérifient l'équation

$$\frac{\sin A}{x}+\frac{\sin B}{y}+\frac{\sin C}{z}=0.$$

Si l'on prend pour triangle fondamental ABD, le point α conserve son rôle ($O\alpha = \frac{1}{2}A'O$), et la droite αD rencontrant la circonférence ABD en C, on voit que C joue par rapport au triangle ABD le même rôle que D par rapport à ABC.

Remarques (dues à M. Déprez). 1° On peut démontrer par la géométrie la proposition de M. Dobbs. En effet, H désignant l'orthocentre de ABC, menons dans la circonférence ABC les cordes AD_a, BD_b, CD_c parallèles à la droite OH, puis la corde D_aD parallèle à BC; les arcs D_aD_c et AC étant égaux, de même que les arcs D_aB et DC, il en sera de même des arcs BD_c et AD, et la corde D_cD sera parallèle à AB et, par analogie, D_bD le sera à AC. Les angles D_aAB et CAD étant égaux, nous retrouvons d'abord un théorème de géométrie élémentaire que nous complétons ainsi :

Par les sommets A, B, C *d'un triangle on mène trois parallèles qui rencontrent la circonférence circonscrite en* D_a, D_b, D_c; *les droites menées par les points* D_a, D_b, D_c *parallèlement aux côtés* BC, CA, AB *se rencontrent en un point* D *de la circonférence* ABC *et* D *est l'inverse* (*conjugué isogonal*) *du point situé à l'infini sur la direction des parallèles* AD_a, BD_b, CD_c.

La droite OA' rencontre la circonférence ABC en P et Q, les droites AD_a, AD en α', α. Comme les lignes AQ, AP sont les bissectrices de l'angle DAD_a et de son supplément $\alpha A\alpha'$, la division $QP\alpha'\alpha$ est harmonique, et l'on a : $R^2 = O\alpha \cdot O\alpha'$. Mais $O\alpha' = HA = 2A_1O$ (A_1 = milieu de BC), et $R^2 = OA_1 \cdot OA'$; on conclut de là que $O\alpha = \frac{1}{2}A'O$. Donc α est le point considéré par M. Dobbs, etc.

2° Si l'on divise les droites OA', OB', OC' aux points X, Y, Z dans un même rapport, les droites AX, BY, CZ se coupent en un même point U, qui a pour lieu géométrique l'hyperbole équilatère ABCHO (hyperbole de Jerábek; voir *Mathesis*, (I) VIII, p. 81); cette hyperbole est la transformée par inversion trilinéaire de la droite HO. Le point D de M. Dobbs est le quatrième point commun à cette conique et à la circonférence ABC; le milieu de HD est le centre de l'hyperbole.

Question CCCXVI.

(Voir N. C. M., t. III, p. 433).

La somme des puissances semblables des x premiers nombres, augmentée ou diminuée de l'unité, est divisible par $x+2$.

(E. Lucas.)

Solution par M. E. Fauquembergue. De la formule classique, qui sert à calculer la somme des puissances semblables de x nombres en progression arithmétique, on déduit celle-ci :

$$(x+1)^m = 1 + \frac{m}{1}\cdot S_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} S_{m-} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cdot S_{m-3} + \cdots x. \qquad (1)$$

On a aussi l'identité

$$0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3.} + \cdots \pm 1, \qquad (2)$$

obtenue en faisant $x = 1$ dans le développement de $(x-1)^m$; le dernier terme est positif ou négatif suivant que m est pair ou impair.

En combinant ces deux égalités par voie d'addition ou de soustraction, on obtient la relation

$$(x+1)^m \pm 1^m = (x+2) + \frac{m}{1}(S_{m-1} \pm 1) + \frac{m(m-1)}{1.2}\cdot(S_{m-2} \mp 1) + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cdot(S_{m-3} \pm 1) + \cdots;$$

les signes supérieurs correspondent au cas de m impair et les signes inférieurs au cas de m pair.

Faisons successivement $m = 2, 3, 4, 5, \cdots$; nous aurons

$$(x+1)^2 - 1^2 = (x+2) + 2.(S_1 - 1),$$

$$(x+1)^3 + 1^3 = (x+2) + 3.(S_2 + 1) + \frac{3.2}{1.2}\cdot(S_1 - 1)$$

$$(x+1)^4 - 1^4 = (x+2) + 4.(S_3 - 1) + \frac{4.3}{1.2}(S_2 + 1) + \frac{4.3.3}{1.2.3}\cdot(S_1 - 1),$$

$$(x+1)^5+1^5=(x+2)+5.(S_4+1)+\frac{5.4}{1.2}.(S_3-1)$$

$$+\frac{5.4.3}{1.2.3}.(S_2+1)+\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}.(S_1-1),$$

. . . . . .

Ces égalités nous font voir de proche en proche que $x+2$ divise

$$S_1-1,\quad S_2+1,\quad S_3-1,\quad S_4+1,\quad \cdots$$

et ainsi de suite. En effet, $(x+1)^m+1^m$ est divisible par $(x+1)+1$ quand m est impair, et $(x+1)^m-1^m$ est divisible par $(x+1)+1$ quand m est pair.

QUESTIONS D'EXAMEN.

748. Deux tangentes parallèles d'une ellipse interceptent sur la droite menée par un foyer et le point de contact de l'une des tangentes un segment égal au grand axe.

749. Soient MM′, NN′ deux diamètres réels quelconques d'une hyperbole équilatère, P un point quelconque de cette courbe. Démontrer que les angles MPN, M′PN′ sont égaux ou supplémentaires.

QUESTIONS PROPOSÉES.

***1068.** Par trois droites données non situées dans un même plan, mener trois plans formant un trièdre trirectangle. (J. Neuberg.)

1069. Quelle relation doit-il exister entre deux circonférences pour que les deux centres soient les deux foyers de la courbe polaire réciproque de l'une des circonférences par rapport à l'autre?

(Droz Farny.)

1070. Eliminer α et β entre les équations

$$a^2\beta^2+b^2\alpha^2=a^2b^2,$$

$$c^2\alpha^2-(c^2+a^2)\,a^2\alpha+a^4x=0,\quad c^2\beta^2-(c^2-b^2)\,b^2\beta-b^4y=0.$$

(H. Brocard.)

***1071.** Au cercle I, inscrit à un triangle équilatéral ABC, on mène une tangente quelconque, qui coupe les côtés du triangle aux points α,β,γ, de chacun desquels on mène la seconde tangente respectivement aux cercles exinscrits I_a, I_b, I_c. Chercher le lieu des sommets du triangle formé par ces droites. (E. Duporcq).

NOTE SUR UNE PROPRIÉTÉ FOCALE DES CONIQUES A CENTRE,

par M. STUYVAERT, professeur à l'Athénée royal de Gand.

La propriété dont il s'agit est identique au fond à un théorème de M. Laisant présenté au congrès d'Oran (1888, p. 113-118) et cité dans *Mathesis* à l'occasion d'une question posée par M. Gob et résolue (2) I, p. 45.

Le théorème qui fait l'objet de la présente note peut se déduire de celui de M. Laisant et inversement; les démonstrations qui ont été données de ce dernier conduisent donc aussi au premier, notamment la démonstration géométrique très élégante due à M^lle^ Carolina De Haas, de Rotterdam (*Mathesis*, (2) I, p. 46-47), démonstration qui s'applique à l'hyperbole moyennant un simple changement de signe.

THÉORÈME. *Étant donnée une conique à centre dont les foyers sont* F *et* F', *si d'un point* M *on mène les deux tangentes à cette conique, l'une jusqu'à son point de contact* T, *l'autre jusqu'à sa rencontre en* P *avec le diamètre conjugué de* OM, *on a*

$$MP \times MT = MF \times MF'.$$

En effet, si du point P on mène la deuxième tangente, elle est parallèle à MT et son point de contact T' est symétrique de T par rapport au centre.

On sait que le rayon vecteur mené d'un foyer au point de rencontre de deux tangentes fait des angles égaux avec les rayons vecteurs menés aux points de contact.

Si ce point de rencontre s'éloigne à l'infini, c'est-à-dire si les tangentes sont parallèles, on en conclut qu'elles font des angles égaux avec les rayons vecteurs menés d'un foyer aux points de contact. Soit dans ce cas FG parallèle à TM et T'P.

Il résulte de cette même propriété que l'angle PFM est la moitié de l'angle TFT' (de son supplément, dans l'hyperbole), et par conséquent égal à TFG, et que les droites FM et FP font des angles égaux, l'une avec FG ou MT, l'autre avec FT'; donc les triangles FMT et FT'P sont semblables (théorème connu).

Mais les tangentes issues d'un même point font des angles égaux avec les rayons vecteurs aboutissant à ce point et menés des deux foyers, donc

$$\text{angle } FMT = \text{angle } F'MP,$$

et de même

$$\text{angle } F'PM = \text{angle } FPT' = \text{angle } MFT,$$

cette dernière égalité à cause des triangles semblables indiqués plus haut.

Donc enfin, les triangles MFT et MF'P sont semblables et l'on en conclut :

$$MP \times MT = MF \times MF'.$$

APPLICATIONS. **1**. Si Q est le point de contact de MP, et N le point où QT rencontre OM, on a

$$MQ = MP \times \frac{MN}{MO},$$

et l'on en conclut :

$$\frac{MQ \cdot MP}{MF \cdot MF'} = \frac{MN}{MO}.$$

C'est la forme sous laquelle le théorème a été donné par M. Laisant. Comme cas particulier, on a le théorème de M. Gob qui fait l'objet de la *question* 695.

2. Si M est sur le petit axe ou sur l'axe non transverse et si une tangente menée de M touche la conique en T et rencontre l'autre axe en P,

$$MP \cdot MT = MF^2.$$

et MF est la tangente à la circonférence passant par P,T,F.

3. Dans l'énoncé du théorème, le point P peut être déterminé par l'intersection de la deuxième tangente menée de M avec la tangente parallèle à MT.

Donc si M est sur une asymptote, soient MN la tangente limitée en N à l'autre asymptote, T le point de contact, M' le point où la tangente parallèle à MN rencontre la première asymptote ; le théorème donne

$$MF.MF' = MT.MM';$$

mais $MM' = 2MO$ et, d'après un théorème connu, $2MT = MN$; donc

$$MF.MF' = MN.MO.$$

En appliquant la même propriété au point N, et combinant entre eux les résultats obtenus, on arriverait encore à quelques autres relations assez simples.

4. Soit ABCD un parallélogramme circonscrit à une conique à centre,

et soit P le point de contact de AB. Le théorème donne :

$$FA \cdot F'A = FA \cdot FC = AD \cdot AP,$$
$$FB \cdot F'B = FB \cdot FD = BC \cdot BP.$$

D'où, puisque AD = BC,

$$\frac{FA \cdot FC}{FB \cdot FD} = \frac{AP}{BP}.$$

Comme cas particulier de cette propriété, si FA = FB, on a

$$\frac{FC}{FD} = \frac{AP}{BP},$$

donc aussi

$$\frac{F'A}{F'B} = \frac{AP}{BP};$$

donc F'P fait des angles égaux avec F'A et F'B, et, par suite, est parallèle aux tangentes AD et BC.

Exercices. — 1. Étant donnée une conique à centre, trouver le lieu du point M tel qu'en menant de ce point les deux tangentes, prolongeant l'une jusqu'à son point de contact, l'autre jusqu'à la tangente parallèle à la première, le rectangle de ces deux droites soit constant (lemniscate).

2. Étant donnés une tangente fixe à une conique à centre, et les deux foyers, mener deux tangentes parallèles entre elles qui coupent la première en des points équidistants d'un foyer.

NOTES MATHÉMATIQUES.

6. Problème. *Quels sont les nombres entiers x, y, z qui satisfont à l'égalité suivante* :

$$\frac{x}{y} \times z = \frac{x}{y} + z ?$$

Solution. De cette égalité on déduit

$$z = \frac{x}{x - y}.$$

Posons $x = y + u$; il vient

$$z = \frac{y + u}{u} = \frac{y}{u} + 1.$$

Puisque z doit être entier, on doit avoir $y = mu$, d'où

$$z = m + 1, \quad x = (m + 1)u.$$

Ainsi l'égalité demandée sera

$$\frac{(m+1)u}{mu} \times (m+1) = \frac{(m+1)u}{mu} + (m+1).$$

D'où des identités assez curieuses à première vue :

$$\frac{7}{6} \times 7 = \frac{7}{6} + 7, \quad \frac{156}{143} \times 12 = \frac{156}{143} + 12, \text{ etc.} \quad \text{(E. Barbette.)}$$

×7. Théorème. *Un nombre parfait impair* (s'il en existe) *est la somme de deux carrés.*

Sylvester a démontré (*Mathesis*, 1888, p. 57), que dans un tel nombre, les exposants des facteurs premiers sont tous pairs, sauf un, et que le facteur élevé à une puissance impaire est de la forme $4n + 1$.

Or tout nombre premier de la forme $4n + 1$ est une somme de 2 carrés ; donc, etc. (Stuyvaert.)

×8. *Sur les fractions décimales périodiques mixtes.* Soit à convertir la fraction irréductible $\frac{a}{2^m b}$ en fraction décimale, b étant premier avec 2 et 5. Posons

$$\frac{a}{2^m b} = \frac{x}{2^m} + \frac{y}{b} \quad \text{ou} \quad a = xb + 2^m y.$$

On sait, par l'analyse indéterminée du premier degré, trouver des valeurs entières de x et de y vérifiant cette équation et premières respectivement avec 2^m et avec b.

La fraction $\frac{x}{2^m}$, prise en valeur absolue, donnera naissance à une fraction décimale ayant m chiffres ; la fraction $\frac{y}{b}$, prise aussi en valeur absolue, à une fraction décimale illimitée, dont la période aura un nombre c de chiffres dépendant uniquement du nombre b.

La fraction primitive, somme algébrique des deux précédentes, sera la limite d'une fraction périodique mixte ayant m chiffres avant la période qui aura c chiffres, comme on le voit assez aisément en faisant toutes les hypothèses possibles sur le signe de x et celui de y.

Les conclusions précédentes s'appliquent au cas où 2^m est remplacé

par 5°. On peut de plus les étendre à un système de numération quelconque (Extrait d'un mémoire manuscrit de M. N. Sokolof, de Kief, intitulé : *Quelques considérations sur des fractions analogues aux fractions décimales*).

BIBLIOGRAPHIE.

Arithmetic for High Schools and Collegiate Institutes, by J. C. Glashan, Ottawa. Toronto, Rose Publishing Company, 1890 (VIII-360 p. in-12), cartonné. Prix : 50 cents.

Méthode pratique pour la résolution numérique complète des équations algébriques ou transcendantes, par E. Carvallo, Docteur ès sciences, Examinateur d'admission à l'École polytechnique. Paris, Nony, 1896 (32 p. in-4°).

Nouvelle édition de la thèse de doctorat de l'auteur, où il expose, sous une forme vraiment pratique, la méthode de Gräfe pour la résolution numérique des équations. Voir l'analyse que nous avons donnée de la première édition, dans le n° de juillet 1891 de la *Revue des questions scientifiques* et *Mathesis* (2), I, 183).

Leçons de Graphostatique par M. Brikthof, professeur à l'Université de Louvain. Seconde édition. Liége, Miot et Jamar, 1895. Livraison I. Calcul graphique (104 pages in-4° et 130 figures). Livraisons III, IV et V. Graphostatique (312 pages in-4° et 214 figures).

Les livraisons II, VI, VII et VIII sont sous presse ou en préparation. Cet ouvrage, qui vient combler une lacune dans notre enseignement supérieur, se recommande par un bon choix des questions traitées et par une grande clarté.

Cours de Mécanique par J. Massau, ingénieur principal des Ponts et Chaussées, professeur à l'Université de Gand. Tome II. Dynamique. Hydrostatique. Hydrodynamique. Gand, Meyer-Van Loo, 1896. (Autographie in-4° de VIII-312 pages in-4°).

Sommaire. *Dynamique du point matériel.* 1. Généralités. 2. Théorèmes généraux. 3. Mouvement rectiligne. 4. curviligne d'un point libre. 5. ou sur une courbe. 6. sur une surface 7. Mouvement relatif. — *Dynamique des systèmes matériels.* 1. Formules générales. 2. Théorèmes généraux. 3. Moments d'inertie. 4-5. Cas d'un axe fixe, ou d'un point fixe. 6. Mouvement d'un solide quelconque. 7. Choc des corps. — *Hydrostatique.* 1. Théorie générale. 2. Applications. — *Hydrodynamique.* Théorie générale. 2. Liquide pesant et gaz. 3. Tourbillons.

La préface contient l'indication des questions assez nombreuses que l'auteur a traitées d'une manière originale, dans son remarquable ouvrage.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 947.

(Voir *Mathesis*, (2) IV, p. 151).

Étant donnés deux faisceaux homographiques S (ABC ...), S'(A'B'C'...) *faire passer par* S *et* S' *une circonférence telle que deux rayons homologues quelconques rencontrent cette courbe en des points en involution.*

(Droz-Farny).

Solution par M. Cl. Servais. Un cercle passant par S et S' et rencontrant deux rayons homologues SA et SA' aux points A et A', satisfera à la question, si les rayons SA' et S'A sont correspondants dans les faisceaux projectifs S (ABC ...) et S'(A'B'C'...). Tous les cercles passant par les points S et S', déterminent sur les rayons SA et SA' deux séries projectives (AA', $A_1A'_1$, ...); ces ponctuelles sont semblables, puisque la corde AA' se déplace parallèlement à elle-même. Si SA'' est le rayon du faisceau S(ABC...) correspondant au rayon S'A du faisceau S' (A'B'C'...), les deux droites SA' et SA'' décrivent deux faisceaux projectifs, dont SA est un rayon double; l'autre rayon double rencontre S'A' en un point appartenant au cercle demandé.

×Question 953.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 152).

1° *Le nombre* $4n^4$ *est la somme de quatre triangulaires;* 2° *les nombres* $6n^4$, $6n^4+1$, $6n^4+2n^2+1$, $6n^4+4n^2+1$, $6n^4+6n^2+1$ *sont chacun la somme de trois triangulaires.* (de Rocquigny.)

Solution par M. Jean Jonesco. On trouve en posant $T_n = \frac{1}{2}n(n+1)$:

$$(1)\qquad 4n^4 = T_{2n^2+n-1} + T_{2n^2-n-1} + T_{n-1} + T_n;$$

$$(2)\qquad \begin{aligned} 6n^4 &= T_{2n^2+n-1} + T_{2n^2-n-1} + T_{2n^2} \\ &= T_{2n^2+2n-1} + 2T_{2n^2-n-1} = T_{2n^2-2n-1} + 2T_{2n^2+n-1}; \end{aligned}$$

$$(3)\qquad \begin{aligned} 6n^4+1 &= T_{2n^2-2} + T_{2n^2+n} + T_{2n^2-n} \\ &= T_{2n^2+n-2} + T_{2n^2-2n-1} + T_{2n^2+n} \\ &= T_{2n^2-n-2} + T_{2n^2+2n-1} + T_{2n^2-n}; \end{aligned}$$

$$(4)\qquad 6n^4+2n^2+1 = T_{2n^2+1} + T_{2n^2-n-1} + T_{2n^2+n-1};$$

$$(5)\qquad 6n^4-4n^2+1 = T_{2n^2-2} + T_{2n^2+n-1} + T_{2n^2-n-1};$$

$$(6)\qquad 6n^4+6n^2+1 = T_{2n^2+1} + T_{2n^2+n} + T_{2n^2-n}.$$

Question 954(*).

(Voir *Mathesis* (2), IV, p. 152).

Pour tous les points du plan d'une conique à centre, tels que deux des normales abaissées sur l'ellipse soient rectangulaires, 1° la corde joignant les pieds des normales à angle droit enveloppe une ellipse, 2° la corde joignant les deux autres pieds enveloppe une hypocycloïde à quatre points de rebroussement. (E. N. Barisien.)

Solution par M. Cl. Servais. Si une hyperbole équilatère passe par le centre O d'une conique Σ, et a ses asymptotes parallèles aux axes a et b de la conique, les normales à celle-ci, menées par les points A, B, C, D où l'hyperbole la rencontre, concourent en un même point P de l'hyperbole. La conique Σ, l'hyperbole équilatère et les droites AB et CD, déterminent sur chacun des axes a et b, trois couples de points en involution. Donc, si E et F, G et H sont les points d'intersection des droites AB et CD respectivement avec les axes, on a

$$OE.OG = -a^2, \quad OF.OH = -b^2.$$

Soient S le pôle de AB, S_1 et S_2 ses projections sur les axes; on a

$$OS_1.OE = a^2, \quad OS_2.OF = b^2,$$

donc

$$OS_1 = -OG, \quad OS_2 = -OH;$$

autrement dit, le point S est le symétrique par rapport au centre O du quatrième sommet L du rectangle construit sur OG et OH. (Desboves, N. A. M., 1860, p. 266.)

Conséquences. I. Si les tangentes aux points A et B sont rectangulaires, le point S décrit le cercle de Monge et la corde AB enveloppe une conique. La corde CD joint les projections sur les axes, d'un point L de ce cercle; cette droite enveloppe donc une hypocycloïde à quatre points de rebroussement.

II. Si les points A et B coïncident, les normales aux points C et D se coupent au centre de courbure au point A. Le point L coïncide avec A′ diamétralement opposé au point A, et la droite CD joint les projections de A′ sur les axes; cette droite enveloppe donc une développée de conique.

(*) La seconde partie de l'énoncé exigeait une rectification.

III. Les droites OS et CD sont également inclinées sur les axes, OS et BA′ sont parallèles; par conséquent, les quatre points B, C, D, A′ sont sur un même cercle (JOACHIMSTHAL).

IV. Si le point A est fixe, et B, C, D variables, le point L décrit la tangente au point A′ et la droite CD enveloppe une parabole dont le foyer est la projection du centre sur la tangente en A′ (*Théorème connu*).

Ont résolu la même question MM. GILLET (Verviers), DÉPREZ (Charleroi), P. BASTIN (Liège), CRISTESCU (Bucharest), JEAN JONESCO (Bucharest) et DROZ FARNY (Porrentruy).

Pour nos jeunes lecteurs, nous rappelons que les relations entre les cordes AB, CD passant par les pieds A, B, C, D des normales issues d'un point P (α, β) se déduisent analytiquement de l'identité

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\equiv c^2xy-a^2y\alpha+b^2x\beta-\left(\frac{x\mathrm{X}}{a^2}+\frac{y\mathrm{Y}}{b^2}-1\right)\left(\frac{x\mathrm{X}'}{a^2}+\frac{y\mathrm{Y}'}{b^2}-1\right),$$

où X, Y et X′, Y′ sont les coordonnées des pôles des cordes AB, CD. Les égalités $\mathrm{XX}'=-a^2$, $\mathrm{YY}'=-b^2$ qu'on trouve, font dépendre les pôles des deux cordes l'un de l'autre; on en déduit immédiatement que le pôle de CD décrit une kreuzcurve quand le pôle de AB décrit une ellipse concentrique avec l'ellipse donnée.

M. DÉPREZ trouve que le point P et le centre de l'hyperbole d'Apollonius décrivent des sextiques dans les conditions de la question 954.

Question 956.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 175).

Le lieu de la projection d'un foyer d'une ellipse sur les normales à l'ellipse est une courbe fermée dont l'aire est la différence entre l'aire du cercle principal et celle de l'ellipse. (E. N. BARISIEN).

Solution par M. CL. SERVAIS. Soient M et M′ deux points infiniment voisins sur l'ellipse; les tangentes en ces points et la corde $\mathrm{M_1M'_1}$, qu'elles interceptent sur le cercle principal déterminent un triangle Δ. La différence entre l'aire du cercle principal et celle de l'ellipse, est égale à la limite de la somme de tous les triangles Δ. Les perpendiculaires menées aux points $\mathrm{M_1}$ et $\mathrm{M'_1}$ respectivement sur les tangentes en M et M′ passent par un foyer F. Soient $\mathrm{M_2}$ et $\mathrm{M'_2}$ les projections de F sur les normales en M et M′, l'aire du lieu considéré est la limite de la somme de tous les triangles $\mathrm{M_2FM'_2}$. Mais

$$\lim\frac{\Delta}{\mathrm{M_2FM'_2}}=1;$$

donc l'aire du lieu est égale à la différence des aires du cercle principal et de l'ellipse.

Par le même raisonnement on établit que l'aire de la podaire d'un point quelconque O par rapport à la développée d'une courbe fermée Σ est égale à la différence entre l'aire de la podaire de O par rapport à Σ et l'aire de Σ. (J. N.).

×Question 957.

(Voir *Mathesis* (2), IV, p. 175.)

On considère deux ellipses concentriques et homothétiques. Toute tangente à l'ellipse intérieure rencontre l'ellipse extérieure en deux points A *et* B. *Si du point* P *de rencontre des normales en* A *et* B, *on abaisse les deux autres normales à l'ellipse extérieure,* PC *et* PD, *la droite* CD *enveloppe une développée d'ellipse.* (E. N. Barisien.)

Solution par M. Cl. Servais. Soit S le point de rencontre des tangentes aux points A et B. Ce point décrit une ellipse, sur laquelle est situé le symétrique S′ du point S par rapport au centre commun des ellipses considérées. Soient S_1 et S_2 les projections du point S′ sur les axes ; la droite S_1S_2 passe par les points C et D. (Voir question 954, p. 135.) La droite CD enveloppe donc une développée d'ellipse.

Solution par MM. Bastin (Liége), J. Jonesco, Cristescu, Droz-Farny, Déprez, J. Gillet. Soit, pour équation de l'ellipse extérieure,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

k désignant le rapport d'homothétie et φ un angle quelconque ; une tangente à l'ellipse intérieure aura pour équation

$$\frac{x\cos\varphi}{ka}+\frac{y\sin\varphi}{kb}-1=0.$$

Les coordonnées de P étant désignées par α et β, toute conique passant par A,B,C,D sera représentée par

$$\lambda\,(c^2xy-a^2\alpha y+b^2\beta x)-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0.$$

En identifiant cette équation avec celle du système de droites(AB, CD):

$$\left(\frac{x\cos\varphi}{ka}+\frac{y\sin\varphi}{kb}-1\right)(mx+ny-1)=0.$$

on trouve

$$m = -\frac{k}{a\cos\varphi}, \qquad = n - \frac{k}{b\sin\varphi}.$$

On en déduit l'équation de la corde CD :

$$x \cdot bk\sin\varphi + y \cdot ak\cos\varphi + ab\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

La dérivée par rapport à φ, est :

$$x \cdot bk\cos\varphi - y \cdot ak\sin\varphi + ab\cos^2\varphi - ab\sin^2\varphi = 0.$$

Si l'on résout ces deux équations par rapport à x et à y, on obtient :

$$x = -\frac{a\cos^3\varphi}{k}, \quad y = -\frac{b\sin^3\varphi}{k}.$$

Eliminons φ entre ces formules; nous obtenons pour équation de l'enveloppe de CD :

$$\left(\frac{kx}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{ky}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Remarques. I. La droite AB a pour équation

$$\frac{x\cos\varphi}{ka} + \frac{y\sin\varphi}{kb} - 1 = 0.$$

Son pôle par rapport à l'ellipse extérieure a pour coordonnées

$$\frac{a\cos\varphi}{k} \quad \text{et} \quad \frac{b\sin\varphi}{k}.$$

On sait que si l'on projette sur les axes coordonnés le point diamétralement opposé à ce pôle, la droite CD passe par ces projections; on en déduit immédiatement l'équation de CD :

$$\frac{kx}{a\cos\varphi} + \frac{ky}{b\sin\varphi} + 1 = 0.$$

II. La propriété qui fait l'objet de la question subsiste, alors même que les ellipses ne sont pas homothétiques.

La corde AB enveloppant l'ellipse

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1,$$

on trouve pour équation de l'enveloppe de la droite CD

$$\left(\frac{px}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{qy}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Question 984.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 263.)

On considère dans une ellipse toutes les cordes qui joignent les extrémités de deux diamètres conjugués.

1° *Le lieu des projections du centre sur les cordes et le lieu des projections des pôles des cordes sur elles-mêmes ont même aire.*

2° *Le lieu des points de rencontre des normales aux extrémités des cordes est une courbe dont l'aire est les* $\frac{2}{3}$ *de celle de la développée de l'ellipse.*

(E. N. Barisien).

Solution par M. Jean Jonesco. 1° Soient OA, OB deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse ε, C l'intersection des tangentes menées en A et B. On sait que la corde AB enveloppe une ellipse ε' ayant pour demi-axes $\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}$. Appelons P, Q les projections de O, C sur AB. Le point P décrit la podaire de O par rapport à ε'; donc d'après un théorème connu, l'aire de la courbe (P) est égale à la moyenne arithmétique entre les aires des cercles décrits sur les axes de ε' comme diamètres. Cette aire a donc pour expression $\frac{1}{4}\pi(a^2+b^2)$.

La corde AB touche ε' en son milieu M; il en résulte MP = MQ. Par conséquent les points P, Q décrivent des courbes ayant même aire.

2° On peut prendre pour coordonnées des points A, B $(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$, $(-a\sin\varphi, b\cos\varphi)$; les normales en A et B ont alors pour équations

$$\frac{ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} = c^2, \quad \frac{ax}{\sin\varphi} + \frac{by}{\cos\varphi} = -c^2.$$

Tirons de là les valeurs de $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ et faisons la somme des carrés; nous aurons pour l'équation du lieu décrit par l'intersection D des normales

$$2(a^2x^2+b^2y^2)^3 - c^4(a^2x^2-b^2y^2)^2 = 0.$$

Posons $y = \frac{a}{b}y'$, ce qui donne une transformée homographique dela courbe et change l'aire dans le rapport $\frac{a}{b}$; nous aurons

$$2a^2(x^2+y'^2)^3 - c^4(x^2-y'^2)^2 = 0.$$

Passant aux coordonnées polaires, on trouve

$$\rho^2 = \frac{c^4}{2a^2}\cos^2 2\omega;$$

l'aire S′ de la courbe auxiliaire est donnée par

$$S' = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2 d\omega = \frac{c^4}{4a^2}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 4\omega}{2}\, d\omega = \frac{\pi c^4}{4a^2};$$

celle de la courbe proposée est

$$S = \frac{a}{b}S' = \pi\frac{c^4}{4ab}.$$

Or l'aire de la développée de ε a pour mesure $\frac{3}{8}\pi\frac{c^4}{ab}$, etc.

Autre solution très soignée, mais un peu moins simple, par M. V. CRISTESCU.

Questions CCCLXII.

(Voir N. C. M., t. IV, p. 160.)

1° *Si l'équation*

[1] $$y^3 + (p+1)y + 2q = 0,$$

où p et q sont des nombres entiers, a une racine en commun avec l'une ou l'autre des équations

[2] $$\begin{cases} y^2 + (p+1)y + 3q = 0, \\ y^2 - (p+1)y + 3q = 0, \end{cases}$$

l'équation

[3] $$x^3 + px + 2q = 0$$

a une racine entière.

2° *Si l'équation* [1] *a une racine entière, qui ne satisfasse à aucune des équations* [2], *l'équation* [3] *a une racine commensurable.* (S. RÉALIS.)

Solution par E. FAUQUEMBERGUE. I. Soit α une racine entière, commune à l'équation [1] et à la première des équations [2]; les identités

$$\alpha^3 + (p+1)\alpha + 2q = 0,$$
$$\alpha^2 + (p+1)\alpha + 3q = 0$$

donnent

$$p = -3\alpha^2 + 2\alpha - 1, \quad q = \alpha^2(\alpha - 1);$$

et l'équation [3] peut s'écrire

$$x^3 - (3\alpha^2 - 2\alpha + 1)x + 2\alpha^2(\alpha - 1) = 0.$$

On reconnaît aisément qu'elle admet pour racine $\alpha - 1$.

De même si α était racine commune à l'équation [1] et à l'autre équation [2], les identités

$$\alpha^3 + (p+1)\alpha + 2q = 0,$$
$$\alpha^2 - (p+1)\alpha - 3q = 0$$

donneraient

$$p = -(3\alpha^2 + 2\alpha + 1), \quad q = \alpha^2(\alpha + 1),$$

et l'équation [3] deviendrait

$$x^3 - (3\alpha^2 + 2\alpha + 1)x + 2\alpha^2(\alpha + 1) = 0;$$

équation qui admet pour racine $\alpha + 1$.

II. Supposons maintenant que α, racine entière de l'équation [3], ne satisfasse à aucune des équations [2].

Représentons par $f(x)$ le premier membre de l'équation [3]; nous aurons, en tenant compte de l'identité

$$\alpha^3 + (p+1)\alpha + 2q = 0 :$$

$$f(\alpha) = -\alpha, \quad f(\alpha - 1) = -p - 3\alpha^2 + 2\alpha - 1, \quad f(\alpha + 1) = p + 3\alpha^2 + 2\alpha + 1.$$

Les valeurs de $f(\alpha - 1)$ et de $f(\alpha + 1)$ ne sont pas nulles; autrement α serait racine des équations [2], ce qui est contraire à l'hypothèse.

De plus,

$$4f(\alpha) + f(\alpha - 1) + f(\alpha + 1) = 0,$$

relation qui prouve que les trois quantités $f(\alpha)$, $f(\alpha - 1)$, $f(\alpha + 1)$ ne sont pas toutes de même signe.

Donc, l'équation $f(x) = 0$ a au moins une racine réelle comprise, soit entre α et $\alpha - 1$, soit entre α et $\alpha + 1$, soit entre $\alpha - 1$ et $\alpha + 1$. Mais dans ce dernier cas, cette racine ne peut être α. Donc l'équation [3] a toujours une racine incommensurable.

QUESTIONS D'EXAMEN.

750. On donne, dans un même plan, deux points A, B et un système de droites parallèles (d). Soit M le point de l'une de ces droites tel qu'un rayon lumineux AM émanant de A et réfléchi par la droite passe en B. Le lieu de tous les points M est une hyperbole équilatère.

A résoudre par la géométrie analytique ou par la géométrie projective.

751. Soit ABCD un quadrilatère, plan ou gauche, dont deux côtés opposés AB et DC sont égaux. Démontrer que la droite joignant les milieux des côtés AD et BC est perpendiculaire à celle qui unit les milieux des diagonales AC et BD.

752. On donne trois points en ligne droite O, A, B. Un rayon lumineux émanant de A se réfléchit sur une droite quelconque d menée par O ou sur une circonférence quelconque (C) de centre O. Si le rayon réfléchi passe par B, le lieu du point d'incidence M est une circonférence.

(Quetelet, Pagani.)

OM étant la bissectrice de l'angle AMB, la perpendiculaire à OM en M passe par le conjugué harmonique de O par rapport à AB. Si les points O, A, B ne sont pas en ligne droite, le lieu de M est une strophoïde.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1072. En un point quelconque A d'une hyperbole équilatère on construit le cercle Σ symétrique du cercle de courbure par rapport à A; Σ rencontre l'hyperbole en deux nouveaux points B, C. On mène par A, B, C les cordes de Σ parallèles aux côtés opposés du triangle ABC, ou à une asymptote, ou à un axe de l'hyperbole. Trouver le lieu de la seconde extrémité de chacune de ces cordes. (H. Brocard.)

×**1073.** Trouver la condition pour que le système

$$x^2 = a(x+y)(x+z), \quad y^2 = b(y+z)(y+x), \quad z^2 = c(z+x)(z+y),$$

admette une solution non nulle. (J. Neuberg.)

1074. Soit F le foyer de la parabole inscrite au quadrilatère ABCD. Sur la bissectrice intérieure de l'angle AFC on porte

$$FJ = FJ' = \sqrt{FA \cdot FC}.$$

Pour que le quadrilatère soit circonscriptible à un cercle, il faut et il suffit que l'un des points J, J' soit sur la droite joignant les milieux des diagonales. (Sollertinsky.)

1075. Le point de concours des diagonales d'un quadrilatère inscriptible est sur la directrice de la parabole inscrite à ce quadrilatère.

(E. Duporcq.)

CONSTRUIRE UN TRIANGLE DONT LES BISSECTRICES SONT DONNÉES ;

par M. BARBARIN, professeur au lycée de Bordeaux.

Ce problème, d'apparence simple, et qu'un géomètre éminent, E Catalan, proposait jadis comme exercice de géométrie *élémentaire*, a exercé la sagacité d'un grand nombre de mathématiciens. Pascal, dit-on, ne l'avait pas trouvé indigne de lui, mais aucun indice ne peut nous faire soupçonner la nature des recherches qu'il avait entreprises à ce sujet, et rien ne nous est parvenu des résultats auxquels il serait arrivé. Aussi j'ai la conviction d'intéresser les chercheurs en publiant les calculs approfondis et aussi complets que possible auxquels je me suis livré. Il m'a paru simple de traiter d'abord comme problème préliminaire, *la construction d'un triangle dont on connaît un angle et les bissectrices des deux autres. Connaissant les longueurs de trois bissectrices, de nature quelconque, concourantes ou non*, je me suis efforcé de calculer un des angles du triangle, pour réduire ainsi la question, dans sa plus grande généralité, à la précédente.

Le degré final des équations auxquelles j'ai été conduit, est notablement inférieur à celui que plusieurs personnes, à ma connaissance, ont obtenu dans quelques cas particuliers, et par des voies diverses ; il paraît d'ailleurs absolument irréductible dans le cas général, mais il y a des particularités de nature à l'abaisser. Jamais mieux qu'en creusant à fond cette question délicate et difficile, dont l'énoncé est cependant bien trompeur, je n'ai senti ce qu'il y a de vrai et d'encourageant dans cette parole bien connue de D'Alembert : « Allez en avant, et la foi vous viendra. »

I.

Problème préparatoire.

Construire un triangle ABC *dont on donne l'angle* A *et les longueurs des bissectrices des angles* B, C. J'appelle d_a, d_b, d_c les longueurs des bissectrices internes de A, B, C ; d'_a, d'_b, d'_c celles des bissectrices externes ; $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ respectivement les inverses de ces six longueurs ; et je pose

$$B - C = 4\theta \geqq 0, \quad \tfrac{1}{2} A = 90^\circ - \tfrac{1}{3}\omega,$$
$$\tfrac{1}{2}(A - B) = 90^\circ - (\omega + \theta), \quad \tfrac{1}{2}(A - C) = 90^\circ - (\omega - \theta).$$

entre ces éléments, on a les relations

$$(1)\quad \frac{\alpha}{\sin A\cos 2\theta}=\frac{\beta}{\cos(\frac{1}{2}A-2\theta)\sin(\omega-\theta)}=\frac{\gamma}{\cos(\frac{1}{2}A+2\theta)\sin(\omega+\theta)}=$$
$$\frac{\alpha'}{\sin A\sin 2\theta}=\frac{\beta'}{\pm\cos(\frac{1}{2}A-2\theta)\cos(\omega-\theta)}=\frac{\gamma'}{\pm\cos(\frac{1}{2}A+2\theta)\cos(\omega+\theta)};$$

les deux derniers rapports sont positifs, il faut y prendre le signe apparent du dénominateur suivant celui des différences respectives $A-C$, $A-B$; d'ailleurs B est toujours $\geq C$. En particularisant les données, il y a donc quatre problèmes distincts à traiter.

Problème 1. *Données* A, d_b, d_c. Dans les deuxième et troisième rapports, faisons $\operatorname{tg}\theta = x$, puis posons

$$\cos 2\theta = y,\quad \frac{\beta\gamma}{\alpha^2}=n^2,\quad \frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}=p^2;$$

des combinaisons convenables des trois premiers rapports donnent les équations du problème :

$$(2_a)\qquad \gamma(1-x^2+2x\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A)(\operatorname{tg}\omega-x)$$
$$-\beta(1-x^2-2x\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A)(\operatorname{tg}\omega+x)=0,$$

$$(3_a)\qquad 2y^3-2(\cos 2\omega+2n^2\sin^2 A)y^2$$
$$-(1-\cos A)y+(1-\cos A)\cos 2\omega=0,$$

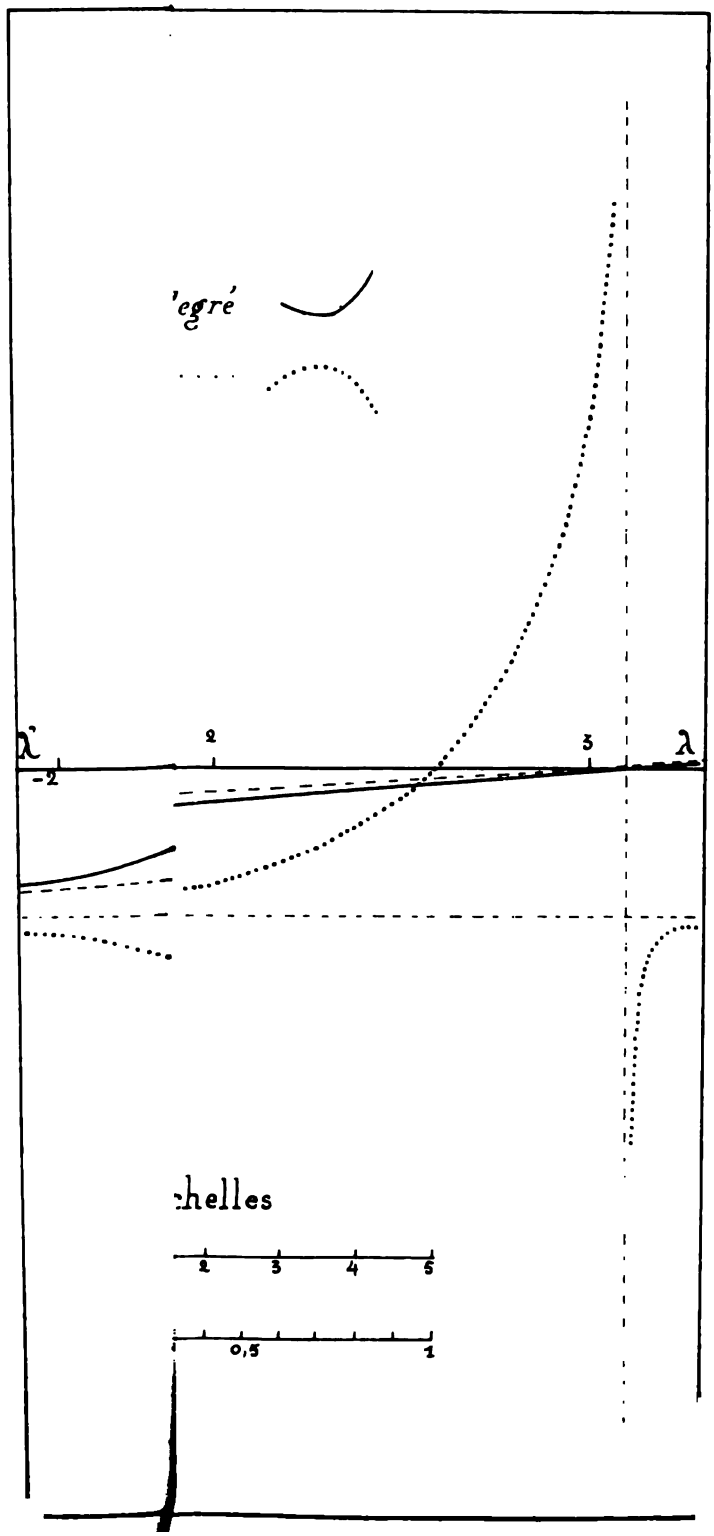
$$(4_a)\qquad 2y^2\sin\tfrac{1}{2}A+2(\cos A-p^2\sin^2 A)y^2$$
$$-2[\sin\tfrac{1}{2}A+\cos 2\omega(1+\cos A)]y+1-\cos A=0.$$

La première donnant x, détermine B et C; l'une des deux autres, où y sera remplacé par sa valeur déduite de x, fait connaître n^2 ou p^2, c'est-à-dire α et d_a; mais en éliminant y entre elles, on formera une équation avantageuse donnant directement α en fonction de A, n, p. Pour l'obtenir, je fais usage des notations suivantes :

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{3}=z,\quad z^2+1=u,\quad 1-z^2=v,\quad u^2-16z^2=t,\quad 4z^2-v^2=w;$$

donc

$$\sin\tfrac{1}{2}A=\cos\frac{2\omega}{3}=\frac{v}{u},\quad \cos 2\omega=\frac{vt}{u^3},\quad \sin A=\frac{4vz}{u^2},\quad \cos A=\frac{w}{u^2},$$
$$1+\cos A=\frac{8z^2}{u^2},\quad 1-\cos A=\frac{2v^2}{u^2}.$$


'egré
λ
2
3
λ
-2
:helles
2
3
4
5
0,5
1

(3_a) et (4_a) deviennent alors respectivement

$$a_0y^3+a_1y^2+a_2y+a_3=0, \quad A_0y^3+A_1y^2+A_2y+A_3=0,$$

$$a_0=u^5, \qquad A_0=vu^4,$$
$$a_1=-vu(ut+32z^2vn^2), \qquad A_1=u(vu^2-16z^2v^2p^2),$$
$$a_2=-v^2u^3, \qquad A_2=-v(u^4+4z^2t),$$
$$a_3=v^3t, \qquad A_3=v^2u^3.$$

Soient :

$$X_2=4u^2+t, \quad X'_2=u^2+t, \quad X_3=u(2u^2+t), \quad X_4=4u^4-t^2,$$
$$Y_1=up^2-2vn^2, \quad Y_2=2u^2n^2-vtp^2;$$

le résultat de l'élimination de y entre (3_a) et (4_a) est l'équation

$$(5_a) \qquad [u^3X_2^2-X_4(X_3+4v^2Y_1)]^2-$$
$$u[u^3X_2X'_2+2(X_3+4v^2Y_1)(u^2t+2vY_2)][X_4X'_2+2X_2(u^2t+2vY_2)]=0,$$

la valeur commune de y étant donnée par

$$(6_a) \qquad y=\frac{v[X_4X'_2+2X_2(u^2t+2vY_2)]}{u^3X_2^2-X_4(X_3+4v^2Y_1)}=$$
$$\frac{v[u^3X_2^2-X_4(X_3+4v^2Y_1)]}{u[u^3X_2X'_2+2(X_3+4v^2Y_1)(u^2t+2vY_2)]}.$$

α, β, γ étant ainsi connus, les côtés du triangle ABC pourront s'obtenir en résolvant le système linéaire

$$2\alpha\cos\tfrac{1}{2}A=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}, \quad 2\beta\cos\tfrac{1}{2}B=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}, \quad 2\gamma\cos\tfrac{1}{2}C=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

Discussion du problème 1. Si A croît en prenant les valeurs

$$0°, \quad 60°, \quad 90°, \quad 120°, \quad 180°,$$

ω et z décroissent en prenant les valeurs respectives

$$135°, \quad 90°, \quad \tfrac{3}{2}45°, \quad 45°, \quad 0,$$

$$1, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sqrt{2}-1, \quad 2-\sqrt{3}, \quad 0,$$

et d'ailleurs $0<x<z$. L'équation (2_a) donne

$$\frac{\beta}{\gamma}=\frac{(z+x)(1-zx)(\operatorname{tg}\omega-x)}{(z-x)(1+zx)(\operatorname{tg}\omega+x)};$$

x variant de 0 à z, $(\beta:\gamma)$ croît constamment de 1 à ∞, quel que soit z.

Donc, B étant $\geq$ C, on a $\beta \geq \gamma$ et $d_c \leq d_b$. L'équation (2_a) a toujours une seule racine acceptable. Donc *les données* A, d_b, d_c *déterminent un triangle et un seul, isoscèle si* $d_c = d_b$. Dans ce triangle, α sera connu par l'une des formules (6_a). Examinons la nature de l'équation (5_a) où z, β et γ sont donnés, mais α inconnu. Le terme du degré le plus élevé en α^{-1} est

$$-64\,uv^4X_2\,[(\beta^2+\gamma^2)\,u-2v\beta\gamma]\,[2u^3\beta\gamma-vt\,(\beta^2+\gamma^2)]^2\,\frac{1}{\alpha^6}$$

et, quels que soient z, β, γ, $X_2 > 0$; donc le coefficient de ce terme est ≤ 0 et l'équation est au plus du 3e degré en $\alpha^{-2} = d_a^2$; elle admet une racine réelle et positive qui n'est autre que

$$\frac{1}{\alpha^2} = d_a^2 = \frac{(y-\cos 2\omega)(2y^2-2\sin^2\tfrac{1}{2}A)}{4y^2\sin^2 A\,.\,\beta\gamma}$$

admissible, car les relations

$$\tfrac{1}{2}(B-C) < 90^\circ - \tfrac{1}{2}A < 2\omega$$

entraînent

$$y > \sin\tfrac{1}{2}A > \cos 2\omega.$$

Les trois bissectrices internes d_a, d_b, d_c *et l'angle* A *sont donc liés par une équation du troisième degré, qui résolue en* d_a *admet une racine positive unique.*

Problème 2. *Données* A, d'_b, d'_c. 1° L'angle moyen n'est pas A; donc $A \geq B \geq C$ ou $B \geq C \geq A$.

En associant les 5e et 6e rapports de (1), posant

$$\frac{\beta'\gamma'}{\alpha^2} = n'^2, \quad \frac{\beta'^2+\gamma'^2}{\alpha^2} = p'^2, \quad Y'_1 = up'^2 + 2vn'^2,$$

$$Y'_3 = -2u^3n'^2 - vtp'^2,$$

la solution du problème est fournie successivement par les équations

(2_b) $$\gamma'\,(1-x^2+2x\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}A)\,(\cot\omega+x) - \beta'\,(1-x^2-2x\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}A)\,(\cot\omega-x) = 0,$$

(5_b) $$[u^2X_2^2 - X_4\,(X_3+4v^2Y'_1)]^2 - u\,[X_2X'_2+2(X_3+4v^2Y'_1)(u^2t+2vY'_3)]\,[X_4X'_2+2X_2(u^2t+2vY'_3)] = 0,$$

(6_b) $$y = \frac{v\,[X_4X'_2+2X_2\,(u^2t+2vY'_3)}{u^2X_2^2 - X_4\,(X_3+4v^2Y'_1)},$$

dont la discussion conduit aux résultats suivants :

Soient deux longueurs l, l' et l'angle A.

$l = l'$, A quelconque, 1 solution : $d'_b = d'_c = l$, triangle isoscèle ;

$l > l'$, $\begin{cases} A > 60°, & 1 \text{ solution : } d'_b = l', d'_c = l \text{ et } A > B > C ; \\ A < 60°, & 1 \text{ solution : } d'_b = l', d'_c = l' \text{ et } A < C < B ; \end{cases}$

$l = \infty$ $\begin{cases} A = B > 60°, \\ A = C < 60°. \end{cases}$

L'équation (5$_b$) ***établit entre les données*** A, d'_b, d'_c, ***et*** d_a ***une équation du 3e degré qui, quand*** A ***n'est pas l'angle moyen, a une racine unique en*** d_a.

2° A est l'angle moyen ; alors $B > A > C$; les équations du problème sont :

$$(2'_b) \qquad (1 - x^2 + 2x \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A)(\cot \omega + x) + \frac{\beta'}{\gamma'}(1 - x^2 - 2x \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A)(\cot \omega - x) = 0,$$

$$(5'_b) \qquad [u^2 X_2^2 - X_4 (X_3 + 4v^2 Y''_4)]^2 - u [X_2 X'_2 + 2 (X_5 + 4v^2 Y''_1)(u^2 l + 2v Y''_3)] \times [X_4 X'_2 + 2 (X_2 u^2 l + 2v Y''_3))] = 0,$$

$$(6'_b) \qquad y = \frac{v [X_4 X'_2 + 2X_2 (u^2 l + 2v Y''_3)]}{u^3 X_2^2 - X_4 (X_3 + 4v^2 Y''_4)},$$

où

$$Y''_4 = up'^2 - 2vn'^2, \quad Y''_3 = 2u^3 n'^2 - vlp'^2.$$

On en déduit, par la variation du rapport $(\beta' : \gamma')$, suivant que A est $>$, $=$ ou $<$ 60°, les résultats suivants :

Soient deux longueurs données l, l' et l'angle A.

$l = l'$ $\begin{cases} A = 60°, \text{ triangle équilatéral.} \\ A \lessgtr 60°, \text{ triangle non isoscèle, } B > A > C ; \end{cases}$

$l > l'$, alors

$$\begin{cases} \text{a un minim. } \mu > 1, & \text{si } A > 60° & B > 60° \geqq A > C & \begin{cases} d'_b = l, & d'_c = l', & 1 \text{ sol.} \\ d'_c = l, & d'_b = l', & 1 \text{ sol.} \end{cases} \\ \text{croît de 1 à } \infty, & \text{si } A = 60° & & \\ \text{croît de 0 à } \infty, & \text{si } A < 60° & B > A \geqq 60° > C & \begin{cases} l = \mu l', & d'_b = l', d'_c = l, & 1 \text{ sol.} \\ l > \mu l', & \text{id.} & & 2 \text{ sol.} \end{cases} \end{cases}$$

L'équation (5$_b$) du troisième degré en α^{-2} peut avoir 0, 1 ou 2 racines positives.

PROBLÈME 3. Données A, d'_b, d_c. L'association des troisième et cinquième rapports donne l'équation en x :

$$(2_c) \qquad (1 - x^2 + 2x \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A)(1 + x \operatorname{tg} \omega) \mp (\beta' : \gamma)(1 - x^2 - 2x \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A)(\operatorname{tg} \omega + x) = 0;$$

le signe du second terme, choisi suivant que A $>$ ou $<$ C, fait voir que le rapport est alternativement toujours croissant ou décroissant dans les limites imposées à x. Par suite, soient deux longueurs données l, l' et l'angle A ; le nombre de solutions correspondantes est indiqué dans ce tableau :

$1^o\ l = l'$.

A $> 120^o$, rien.

A $= 120^o$, 1 solution isoscèle : B $=$ C $= 30^o$.

A $< 120^o$ { A $\geq 60^o$, 1 solution non isoscèle : A $>$ C.
A $< 60^o$, 1 solution non isoscèle : B $>$ A $>$ C.

$2^o\ l \geq l'$.

A $> 120^o$ { $l < l' \cot \omega$, rien.
$l \leqq l' \cot \omega$, 1 solution : $d_c = l$, $d'_b = l'$, A $>$ B $\geq$ C.

A $= 120^o$ 1 solution : $d_c = l$, $d'_b = l'$

A $< 120^o$ {
A $> 60^o$ { 1 solution : $d_c = l$, $d'_b = l'$, A $>$ B $>$ C.
$l' = l \cot \omega$, 1 triangle isoscèle A $>$ B $=$ C.
$l' > l \cot \omega$, 1 triangle $d'_b = l$, $d_c = l'$ A $>$ C.

A $= 60^o$ { 1 solution : $d_c = l$, $d'_b = l'$
1 solution : $d_c = l'$, $d'_b = l$ avec B $>$ A $>$ C.

A $< 60^o$ { 1 solution : $d_c = l$, $d'_b = l'$
1 solution : $d_c = l'$, $d'_b = l$ B $>$ A $>$ C.
$l' = -l \cot \omega$, 1 triangle isoscèle : B $=$ C $>$ A.
$l' < -l \cot \omega$, 1 triangle où B $>$ C $>$ A.
}

Ce tableau montre qu'il peut y avoir, suivant les cas, 0, 1, 2 ou 3 solutions.

Pour calculer maintenant α', inverse de la bissectrice d'_a qui est concourante avec d'_b et d_c, nous associerons les troisième, quatrième et cinquième rapports de (1), après y avoir fait

$$A = 180^o - A', \quad \omega = 135^o - \omega', \quad \theta = 45^o - \theta' ;$$

les équations ainsi obtenues sont de la forme (5_b) et (6_b) quand A $>$ C, de la forme ($5'_b$) et ($6'_b$) quand A $<$ C. Les données A, d'_b, d_c sont donc

liées à d'_a par une relation du troisième degré qui peut avoir 0, 1 ou 2 racines positives quand $A > C$, et une au plus quand $A < C$, si en outre $A < 60°$ et $(d'_c : d'_b) \leqq -\cot\omega$.

Problème 4. *Données* A, d'_b, d'_c. Il faut associer les deuxième et sixième rapports pour avoir x par l'équation

$$\gamma'(1 - x^2 + 2x \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A)(\operatorname{tg}\omega - x) \mp \beta(1 - x^2 - 2x\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A)(1 - x\operatorname{tg}\omega) = 0,$$

dans laquelle le double signe répond à $A >$ ou $< B$. Le rapport $(\beta : \gamma)$ croît toujours si $A > B$; mais si $A < B$, il a un minimum $\mu' > 1$. Il en résulte le tableau que voici :

$1°\ l = l'.$

$A > 120°$, 1 solution non isoscèle $A > B > C$.
$A = 120°$, 1 solution isoscèle $B = C = 30°$.
$A < 120°$, rien.

$2°\ l > l'.$

$> 120°$: 1 solution, $d'_c = l$, $d'_b = l'$. $A > B > C$;
puis, si $l' = l\operatorname{tg}\omega$, 1 solut. isoscèle, $d'_c = l$, $d'_b = l$, $B = C$;
si $l' < l\operatorname{tg}\omega$, 1 solution $d'_c = l$, $d'_b = l$, $A > B > C$.

$= 120°$, 1 solution. $d'_c = l$, $d'_b = l'$, $A > B > C$.

$> 120°$:
- $A > 90°$, si $l \geqq l'\operatorname{tg}\omega$, 1 solut. où $d'_c = l$, $d'_b = l'$, $A > B \geqq C$.
- $90° > A \geq 60°$:
  - $l > \mu' l'$, 2 sol. dist., $d'_c = l$, $d'_b = l'$, $B > A > C$.
  - $l = \mu' l'$, 1 sol. double,
  - $l < \mu' l'$, rien
- $A > 60°$:
  - $l > -l'\operatorname{tg}\omega$, 1 solut. $d'_c = l$, $d'_b = l'$, $B > A > C$;
  - $-l'\operatorname{tg}\omega \geqq l > \mu' l'$, 2 sol. distinctes,
  - $l = \mu' l'$, 1 sol. double,
  - $l < \mu' l'$, rien.

Pour calculer d'_a, bissectrice concourante avec d'_c et d'_b, nous introduirons les mêmes angles auxiliaires A', ω', θ' que dans le problème 3, et nous obtiendrons les équations $(5'_b)$, $(6'_b)$ quand $A > B$, les équations $(5'_b)$, $(6'_b)$ quand $A < B$; chacune d'elles détermine suivant les cas, 0, 1 ou 2 triangles.

Théorème I. Les discussions qui précèdent nous permettent donc de formuler un théorème général : *La connaissance d'un triangle où on donne un angle et une bissectrice quelconque de chacun des deux autres*

angles dépend d'une équation du troisième degré. Entre cet angle et les longueurs de trois bissectrices quelconques concourantes, existe une relation du troisième degré où les racines positives sont en même nombre que les racines réelles et acceptables de la précédente, si on y prend pour inconnue la bissectrice qui appartient à l'angle donné.

THÉORÈME II. *Relations entre l'angle* A *et trois bissectrices quelconques non concourantes.* Si dans chacun des quatre problèmes précédemment traités, on substitue à la bissectrice envisagée pour A celle qui lui est perpendiculaire, on a quatre questions nouvelles se rapportant chacune à un groupe de bissectrices non concourantes. Par exemple, le groupe α, β, γ du problème 1 est remplacé par le groupe α', β, γ. Il existe une relation entre ces quantités et A; on peut la découvrir par la même méthode qui a conduit à la relation (5_a), en associant les deuxième, troisième et quatrième rapports de (1). Posons

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha'^2} = N^2, \quad \frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha'^2} = P^2,$$

et observons que

$$\frac{d'_a}{d_a} = \frac{\alpha}{\alpha'} = \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}A + C\right) = \operatorname{cotg} 2\theta; \tag{7}$$

on a donc

$$n^2 = N^2\left(1-\frac{1}{y^2}\right), \quad p^2 = P^2\left(1-\frac{1}{y^2}\right),$$

et éliminant alors n^2p^2 et y entre ces deux équations et les équations (3_a), (4_a), on parvient à l'équation du quatrième degré au plus en α' :

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{c}[vu^2(X_2-4uY_1)^2-(X_3-4v^2Y_1)(vX_1+4uY_1)]^2\\ -u[2X_3-4v^2Y_1)(vu^2t+8z^2Y'_3)+vu^2X'_2(X_2-4uY_1)]\times\\ [2(X_2-4uY_1)(vu^2t+8z^2Y'_3)+X'_2(vX_1+4uY_1)]\end{array}\right\}=0$$

dans laquelle

$$Y_1 = uP^2-2vN^2,\ Y'_3 = -2u^2N^2-vtP^2,\ Y_4 = -2(u^4+4z^2t)N^2-vu^2P^2.$$

Donc, entre un angle et les longueurs de trois bissectrices non concourantes, il existe une relation du quatrième degré qui a autant de racines positives que l'équation en x correspondante admet de racines réelles et acceptables.

II.

Problème proposé.

Construire un triangle ABC *dont on donne les longueurs des bissectrices des angles* A, B, C.

Je puis maintenant aborder l'examen de la question de la façon la plus avantageuse. Soient l, l', l'' les trois longueurs données; elles peuvent se rapporter à trois bissectrices concourantes ou non; le problème se subdivise donc.

1. Premier cas : l, l', l'' *sont longueurs des bissectrices concourantes.* Ces bissectrices, comme on l'a vu plus haut, forment quatre groupes, et, suivant celui qui est donné, les équations à résoudre sont les suivantes, dans l'ordre indiqué :

si $l'' = d_a$, $l' = d_b$, $l = d_c$ (5$_a$), (2$_a$) ou (6$_a$)

$l'' = d_a$, $l' = d'_b$, $l = d'_c$ ... } (5$_b$), (2$_b$) ou (6$_b$), soit (5$_b'$), (2$_b'$) ou (6$_b'$),

$l'' = d'_a$, $l' = d'_b$, $l = d_c$ ... } (5$_b$), (2$_c$) ou (6$_b$), soit (5$_b'$), (2$_c$) ou (6$_b'$),

$l'' = d'_a$, $l' = d_b$, $l = d'_c$ ... } (5$_b$), (2$_d$) ou (6$_b$), soit (5$_b'$), (2$_d$) ou (6$_b'$).

Comparons les éléments des équations (5$_a$), (5$_b$), 5$_b'$); les polynomes X y sont les mêmes, et soumis aux mêmes calculs. Les polynomes Y''_1 et Y''_3 ont même forme que Y_1 et Y_3, donc (5$_b'$) est identique à (5$_a$); Y'_1 et Y'_3 ne diffèrent de Y_1 et Y_3 qu'en ce que $-n'^2$ remplace n^2, donc (5$_b$) se déduit de (5$_a$) en changeant le signe de n^2 ou de ll'.

Ainsi, étant données l, l', l'', il faudra résoudre l'une des équations (5$_a$) ou (5$_b$) pour connaître z et A; puis une équation du groupe (2) ou du groupe (6) appropriée au cas où l'on est, fera connaître θ et par conséquant B, C.

Discutons l'équation (5$_a$). Les polynomes X, Y qu'elle renferme sont de degrés pairs en z^2, donc en y faisant $z^2 = Z$, chacun d'eux a en Z un degré égal à son indice.

L'équation est donc du *quatorzième degré* en Z. Si on la développe, ainsi que la dérivée, par rapport à $v = 1 - Z$, on reconnaît qu'elle admet

la racine double $v^2 = 0$. Son degré s'abaisse donc au *douzième*. Elle a la forme

$$(9)\quad (1-Z)(A_0 Z^{12} + A_1 Z^{11} + A_2 Z^{10} + \cdots + A_{10} Z^2 + A_{11} Z + A_{12}) = 0$$

et ses coefficients jouissent d'une propriété remarquable. Comme les polynômes X sont réciproques en Z, si on divise le premier membre par Z^{14} et qu'on pose $\frac{1}{Z} = Z'$, l'équation (5_a) se transforme précisément en (5_b) où Z' a pris la place de Z ; donc l'équation (5_a) et, par suite, l'équation (9), reste identique à elle-même, sauf substitution de $-n^2$ à n^2. Il en résulte cette double remarque :

Les coefficients équidistants des extrêmes dans les équations (5) *et* (9) *ordonnées ne diffèrent que par le signe de* n^2. *Si* $Z = Z_1$ *est une racine de* (5_a), $Z' = \frac{1}{Z_1}$ *est racine de* (5_b) *et réciproquement.*

En particulier, les coefficients extrêmes de (9) sont

$$A_0 = 320\,(p^2 + 2n^2)^2\,(1 - p^2 - 2n^2),$$
$$A_{12} = 320\,(p^2 - 2n^2)^2\,(1 - p^2 + 2n^2),$$

donc si $p^2 \pm 2n^2 = 1$, c'est-à-dire si l, l', l'' satisfont à la relation

$$\frac{1}{l} \pm \frac{1}{l'} = \pm \frac{1}{l''}$$

l'équation (9) a une nouvelle racine infinie ou nulle ; et s'abaisse au *onzième degré*. Soit $Z = Z_1$ une racine positive et < 1 de l'équation (9) ; il y correspond un angle déterminé A ; les équations du groupe (6_a) (6_b) donnent chacune une valeur de y ou de y' qui pour être acceptable, doit être aussi positive et < 1. Si les longueurs données l, l', l'' satisfont à ces conditions, chacun des problèmes 1, 2, 3, 4 fournira des solutions correspondantes.

Soit $Z = Z_2$ une racine de (9) > 1. D'après ce qui précède, $Z' = \frac{1}{Z}$ est racine de (5_b), positive et < 1 ; il y correspond encore un angle A, pour lequel (6_b) donne une valeur de y ou y' ; si les longueurs données l, l', l'' permettent que cette valeur soit positive et < 1, les seconds cas des problèmes 2, 3, 4 fourniront aussi des solutions correspondantes. Suivant les différentes valeurs de z, on pourra ainsi avoir le nombre de solutions indiqué dans ce tableau :

Z	1er Probl.	2e Probl.	3e Probl.	4e Probl.	Total. Maximum.
$Z=0$	1	0, 1	1	1	4
$0<Z<2-\sqrt{3}$	1	1	0, 1	1, 2	5
$Z=2-\sqrt{3}$	1	1	1	1	4
$2-\sqrt{3}<Z<\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	1, 2, 3	1, 2	1, 2, 3	7
$Z=\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	1	1	0, 1, 2	5
$\frac{1}{\sqrt{3}}<Z<1$	1	1, 2, 3	2, 3	0, 1, 2	7
$Z=1$	1	1, 2	2	0, 1	6

Transformations de l'équation (9). Malgré la symétrie des calculs, les coefficients $A_0, \ldots, A_{12}$ sont des fonctions assez complexes de u^2 et p^2; aussi le développement de l'équation (9) est-il fastidieux. C'est pourquoi il y a avantage à introduire une nouvelle inconnue, le rapport $\frac{v}{u}$ que nous désignerons par λ et qui n'est autre que $\sin\frac{1}{2}A$. Reprenons la formation de (5_a). Nous avons en vertu de cette notation,

$$t = u^2(4\lambda^2-3), \quad X'_2 = u^2(4\lambda^2-2), \quad Y_1 = u(p^2-2\lambda u^2),$$
$$X_2 = u^2(4\lambda^2+1), \quad Y_3 = u^2[2u^2-(4\lambda^2-3)\lambda p^2];$$
$$X_3 = u^2(4\lambda^2-1),$$
$$X_4 = u^2(4\lambda^2-1)(5-4\lambda^2);$$

par conséquent, (5_a) et (6_a) deviennent respectivement

$$\Delta^2 - \Delta'\Delta'' = 0, \tag{10}$$

$$y = \frac{\lambda\Delta'}{\Delta} = \frac{\lambda\Delta}{\Delta''}, \tag{11}$$

pourvu qu'on pose

$$\Delta = (4\lambda^2+1)^2 - (4\lambda^2-1)(5-4\lambda^2)[-8\lambda^2u^2+4\lambda^2(p^2+1)-1],$$
$$\Delta' = (4\lambda^2-1)(5-4\lambda^2)(4\lambda^2-2)+$$
$$2(4\lambda^2+1)[-8p^2\lambda^4+2(3p^2+2)\lambda^2+4u^2\lambda-3],$$
$$\Delta'' = (4\lambda^2-2)(4\lambda^2+1)+$$
$$2[-8\lambda^2u^2+4(p^2+1)\lambda^2-1][-8p^2\lambda^4+2(3p^2+2)\lambda^2+4u^2\lambda-3].$$

L'équation (10) est du 14e degré en λ. Désignons-la par $F(\lambda) = 0$;

$$F(1) = 320(p^2 - 2n^2)^2(1 + 2n^2 - p^2),$$
$$F(-1) = 320(p^2 + 2n^2)^2(1 - 2n^2 - p^2),$$

donc elle admet pour racines ± 1, qui correspondent, en effet, à la racine $z = 0$ on $z = \infty$ qui a été trouvée si

$$\frac{1}{l} \pm \frac{1}{l'} = \pm \frac{1}{l''}.$$

Du reste, l'équation (10) s'abaisse aussi au douzième degré, puisque les coefficients de λ^0 et λ sont nuls. Le coefficient de λ^2 a pour valeur $4(n^4 - p^2 + 1)$; il est nul lorsque

$$(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2) = 0,$$

c'est-à-dire si deux bissectrices ont même longueur; mais nous verrons plus loin que dans ce cas particulier l'équation se décompose. Enfin le coefficient de λ^{14} est 32^2n^4; il n'est jamais nul, aucune autre simplification de ce côté. En résumé, le problème dépend généralement d'une équation du douzième degré en λ ayant la forme (10). Pour chaque racine réelle positive et < 1 de cette équation, l'une des équations (11) détermine y et la discussion s'achève comme précédemment.

Deuxième cas : *l, l', l'' sont les longueurs de bissectrices non concourantes.* On pourra faire également quatre hypothèses. Dans chacune d'elles, Z et λ sont déterminées par des équations du seizième degré en général, sauf simplifications particulières. Par exemple, l'équation (8) qui donne Z en fonction de α', β, γ jouit des mêmes propriétés que (6_a). Les coefficients équidistants des extrêmes y sont égaux au signe près de n^2. A chacune de ses racines positives et < 1 répondent, par les équations du groupe (2) ou du groupe (6) qui correspondent au problème traité, des solutions en nombre conforme à celui du tableau de la page précédente.

III.

Principaux cas particuliers.

I. *Triangle ayant deux bissectrices égales.* Théorème. 1° *Tout triangle ayant deux bissectrices internes égales est isoscèle.*

2° *Tout triangle ayant deux bissectrices externes égales n'est isoscèle que si ces droites sont renfermées ensemble dans le troisième angle, qui*

n'est pas alors l'angle moyen. Mais si cet angle est l'angle moyen, le triangle n'est plus nécessairement isoscèle, sauf le cas où l'angle proposé est de 60°.

3° *Tout triangle ayant deux bissectrices, l'une interne, l'autre externe, égales, n'est jamais isoscèle, sauf si l'angle correspondant à la troisième bissectrice est égal à* 120°.

Ces propositions se déduisent aisément des équations générales.

1° Si $d_b = d_c$, (2_a) n'a d'autre racine que $x = 0$, donc $B = C$. Alors (3_a) donne

$$n^2 \sin^2 A - \cos^2 \tfrac{1}{2} A \sin^2 \omega = 0 ;$$

et, par suite,

$$4 \sin^2 \tfrac{1}{2} B \mp 4n \sin^2 \tfrac{1}{2} B - 3 \sin \tfrac{1}{2} B \mp 2n = 0$$

provient de (5_a), si on observe que

$$\sin \tfrac{1}{2} B = \sin \tfrac{1}{3} \omega = \frac{z}{\sqrt{u}} .$$

En substituant dans l'équation du troisième degré les nombres

$$0, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 1, \quad +\infty,$$

on a les résultats

$$\pm 2n, \quad \pm n - 1, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 1 \mp 2n, \quad +\infty,$$

où les signes se correspondent. La 2e équation n'a donc pas de racine acceptable; la 1re seule en a une moindre que $\frac{1}{\sqrt{2}}$. donc

$$\tfrac{1}{2} B \text{ étant } \lessgtr 30^\circ \text{ quand } n \text{ est } \lessgtr 1,$$

$$A \text{ est } \gtrless 60^\circ \text{ suivant que } \frac{d_a}{d_b} \text{ est } \gtrless 1.$$

2° Si $d'_b = d'_c$, (2_b) donne encore $x = 0$ et $B = C$. Alors (3_b) conduit aux équations

$$4 \cos^2 \tfrac{1}{2} B \mp 4n \cos^2 \tfrac{1}{2} B - 3 \cos \tfrac{1}{2} B \pm 2n = 0.$$

Si $n > \frac{1}{2}$, la première seule a une racine acceptable, donnant un triangle isoscèle où $A < 60^\circ$.

Si $n < \frac{1}{2}$, la première a une racine acceptable, donnant un triangle isoscèle où $A > 60°$; la 2e également, avec $A < 60°$.

Si $n = \frac{1}{2}$, la première donne une solution limite $A = 180°$, la deuxième un triangle isoscèle où $A = 36°$, $B = C = 72°$.

Mais $(2'_b)$ n'admet $x = 0$ pour racine que si $A = 60°$ (triangle équilatéral); elle n'a point de racine quand $A > 60°$. Elle n'en admet qu'une positive, et conduisant à un triangle non isoscèle si $A < 60$.

3° Si	$d'_b = d_c$,	$A < 120°$,	1 solution non isoscèle,
		$A = 120°$,	1 solution isoscèle,
		$A > 120°$,	rien ;
si	$d_b = d'_c$,	$A > 120°$,	1 solution non isoscèle,
		$A = 120°$,	1 solution isoscèle,
		$A < 120°$,	rien.

Ces propositions sont aisées à confirmer au moyen d'une construction géométrique dont le principe m'a été suggéré par M. De Grainville, ingénieur de la Marine.

Soient BB', CC' les deux bissectrices envisagées respectivement dans les angles B, C(*). Par le pied de chacune sur le côté opposé ou son prolongement, qu'on mène une parallèle à l'autre jusqu'à sa rencontre avec la bissectrice externe de l'angle A ; on obtiendra ainsi deux points B'', C''. BB'B'' et CC'C'' sont des triangles isoscèles, et AB''BB', AC''CC' sont des quadrilatères inscriptibles. Si $BB' = CC'$ sont des bissectrices de même nature, renfermées ensemble dans l'angle A ou ses suppléments, BCB'' C'' est aussi quadrilatère inscriptible, ayant deux côtés opposés égaux ; ceci entraîne $B = C$.

Si BB' et CC', bissectrices externes, sont renfermées, la première dans le supplément de A, et la deuxième dans A, ce qui arrive quand $B > A > C$, les points B'', C'' sont du même côté de A et $AC'' \lesseqgtr AB''$ suivant que $A \lesseqgtr 60°$. Donc si BB' et CC' sont égales, il en est de même de CC'' et BB''; mais ceci ne peut se produire si $A > 60°$.

Lorsque $A < 60°$, cela peut arriver quand BC'' est parallèle à CB'', mais le triangle n'est pas isoscèle. Mais si $A = 60°$, BB'B'' et CC'C'' étant équilatéraux, B''C'' doit être parallèle à BC, ce qui entraîne $B = C = A$.

Supposons enfin BB' bissectrice externe et CC' bissectrice interne ; la

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

bissectrice interne de A étant substituée dans la construction précédente à la bissectrice externe, ABB'B'' et ACC'C'' sont encore quadrilatères inscriptibles; donc $BB' = CC'$ entraîne $BB'' = CC''$; mais alors le quadrilatère inscriptible BCB''C'' est un trapèze isoscèle où les diagonales BC, B''C'' sont égales; le triangle ABC peut être quelconque, à moins que le trapèze ne devienne un carré; ce qui a lieu si

$$B = C = 30°, \quad A = 120°.$$

Quand BB' est bissectrice interne, et CC' externe, on a les mêmes conclusions que ci-dessus.

II. *Triangle où l'angle* $A = 60°$. L'équation (10) admettant la racine $\frac{1}{2}$, on a

$$(p^2 - n^2)(p^2 + 2n^2 - 2)^2 = p^2 + 2n^2,$$

ou

$$(\beta + \gamma)^2 \alpha^4 = [(\beta + \gamma)^2 - 2\alpha^2]^2 (\beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma).$$

Cette équation, bicarrée en α, détermine la bissectrice d_a en fonction de d_b et d_c; d'ailleurs

$$\alpha\sqrt{2} \leqq \beta + \gamma \leqq 2\alpha.$$

L'équation (11) donne alors

$$y = \frac{(\beta + \gamma)^2 - 2\alpha^2}{2\alpha^2},$$

et, d'ailleurs, un calcul direct des rapports (1) conduit à

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma}\sqrt{3}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{\beta\sqrt{3}}{2\gamma - \beta}, \quad \operatorname{tg} C = \frac{\gamma\sqrt{3}}{2\beta - \gamma};$$

comme

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \operatorname{tg} 2\theta,$$

la relation entre α, β, γ détermine une relation de même forme entre α', β, γ.

On trouvera les relations entre α, β', γ' si dans (10) on change le signe de n^2. Donc

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{(\beta' - \gamma')\sqrt{3}}{\beta' + \gamma'}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{\beta'\sqrt{3}}{2\gamma' - \beta'}, \quad \operatorname{tg} C = \frac{\gamma'\sqrt{3}}{2\beta' - \gamma'},$$

$$y = \frac{(\beta' - \gamma')^2 - 2\alpha^2}{2\alpha^2},$$

$$(\beta' - \gamma')^2 \alpha^4 = [(\beta' - \gamma')^2 - 2\alpha^2]^2 (\beta'^2 + \gamma'^2 + \beta'\gamma'),$$

avec

$$\alpha\sqrt{2} \leqq \beta' - \gamma' \leqq 2\alpha.$$

III. *Triangle où l'angle* $A = 90°$. $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ étant racine de (10), on a entre n^2 et p^2 la relation

$$3(1 + n^2\sqrt{2} - p^2)^2 - (1 + 2p^2 - 2n^2\sqrt{2})(p^2 + 2n^2\sqrt{2} - 1)^2 = 0,$$

puis

$$y^2 = \frac{3}{2(1 - 2n^2\sqrt{2} + 2p^2)};$$

il faut d'ailleurs que l'on ait,

$$p^2 \leqq \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}, \quad n^2 \leqq \frac{1+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}};$$

on a ainsi les relations entre α, β, γ qui conduiront à celles entre α', β, γ.

En changeant dans ce qui précède les signes de n^2, on aura les relations de même forme entre α, β', γ' puis entre α', β', γ'.

IV. *Triangle où l'angle* $A = 120°$. Alors $\lambda = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est racine de (10); la relation entre n^2 et p^2 devient

$$(2+3n^2\sqrt{3}-3p^2)^2 - [(2+3p^2-3\sqrt{3}n^2)\sqrt{3}n^2+1](1+4n^2\sqrt{3}) = 0,$$

et θ est déterminé par

$$y = \frac{\sqrt{3}(1 + 4n^2\sqrt{3})}{2(2 + 3n^2\sqrt{3} - 3p^2)},$$

ce qui exige

$$n^2 \leqq \frac{1}{6}, \quad p^2 \leqq \frac{1}{3};$$

de ces relations entre α, β, γ on déduira comme plus haut celles qui se rapportent aux autres combinaisons.

V. *Triangle où* $A = 0$. Dans le triangle limite où $A = 0$, on peut avoir deux cas :

1° $B > C$; alors $B = 180°$, $C = 0$, $b = a + c$,

$$\alpha = \frac{b+c}{2bc}, \quad d_b = 0, \quad d_c = \frac{2ab}{a+b}, \quad d'_a = 0, \quad d'_c = 0, \quad \pm d'_c = \frac{2ac}{a-c}.$$

2° $B = C = 90°$, $a = 0$, $b = c$;

mais il peut aussi arriver que AB, AC étant parallèles, on ait $d_a = \infty$; alors

$$d'_a = \infty\,,\ d_b = d'_c,\quad d_c = d'_b \quad \text{et} \quad \frac{d_b}{d_c} = \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{B}{2} = \operatorname{tg}(45^\circ - \theta).$$

Le cas limite $A = 180^\circ$ présente des résultats analogues, puisqu'on y a $B = 0$, $C = 0$.

IV.

Construction des racines des équations (2) et (10).

1° *Équations* (2). Les racines de toute équation (2) peuvent se construire par l'intersection de deux hyperboles ayant des asymptotes parallèles. Ainsi l'équation (2_a) est le résultat de l'élimination de Y entre les deux équations

$$1 - x^2 = 2x\,Y \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A,$$
$$\gamma(Y+1)(\operatorname{tg}\omega - x) = \beta(Y-1)(\operatorname{tg}\omega + x);$$

il y a trois figures possibles, accusant chacune une seule racine positive et moindre que 1, et correspondant respectivement à $A > 60^\circ$, $A = 60^\circ$, $A < 60^\circ$.

2° *Équation* (10). Les racines de toute équation (10) peuvent se construire par l'intersection des courbes

$$Y = \frac{\Delta''}{\Delta},\ \text{du 8° degré},\quad Y = \frac{\Delta}{\Delta'},\ \text{du 7° degré}.$$

Soit Y l'ordonnée d'un point commun ; son abscisse λ détermine A, et par $y_1 = (\lambda : Y_1)$ on détermine la valeur correspondante de θ.

Proposons-nous de construire ces courbes. Nous observerons d'abord qu'elles sont tangentes au point $\lambda = 0$, $Y = -1$, avec la droite $Y = 2n^2\lambda - 1$ pour tangente commune. La deuxième passe par les points de rencontre des asymptotes parallèles à OY dans la première, avec $O\lambda$. — La courbe $Y = (\Delta'' : \Delta)$ a également une asymptote parallèle à $O\lambda$, c'est $Y = -p^2$.

La courbe $Y = (\Delta : \Delta')$ a une asymptote oblique ayant pour équation

$$Y = \frac{2n^2\lambda}{p^2+1} - 1,$$

et qui passe par conséquent au point de contact des deux courbes.

Prenons un cas particulier numérique, où $p^2 = 2$, $n^2 = \frac{1}{2}$; $\lambda = 1$ sera racine commune. Faisant dans les équations des substitutions numériques convenables, nous aurons les résultats consignés dans le tableau suivant :

λ	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-0,24$	$-0,23$	$-0,2$	0
Δ''	$-\infty$	$-$	-140	$-$	-7	$-$	$+$	$+$	4
Δ	$+\infty$	36	-20	$-$	4	$+$	$+$	$-$	-4
Δ'	$-\infty$	$-$	-44	$-$	-4	$+$	$+$	$+$	4
$\frac{\Delta''}{\Delta}$	-2	$-\infty$	$+7$	$+\infty$	$-\frac{7}{4}$	0	$+\infty$	$-$	-1
$\frac{\Delta}{\Delta'}$	$-\infty$	-0	$\frac{5}{11}$	$+0$	$-\infty$	$+$	$+0$	$-$	-1
λ	$\frac{1}{4\sqrt{2}}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$0,9$	1	3	$+\infty$
Δ''	$-$	$-$	1	$+$	$+$	$+$	-4	$+$	$+\infty$
Δ	$-$	$+$	4	$-$	$+$	$+$	4	$+$	$-\infty$
Δ'	$+$	$+$	4	$+$	$+$	$-$	-4	$-$	$-\infty$
$\frac{\Delta''}{\Delta}$	$+\infty$	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$	$-\infty$	$+0$	-1	$+\infty$	-2
$\frac{\Delta}{\Delta'}$	-0	$+$	$\frac{1}{\text{max.}}$	-0	$+\infty$	$-$	-1	-0	$+\infty$

La courbe du 8me degré a 7 asymptotes parallèles à Oy et coupe 5 fois $O\lambda$. — La courbe du 7me degré a 2 asymptotes parallèles à Oy et coupe 7 fois $O\lambda$. — Elles présentent la disposition du dessin ci-joint, qui accuse ici, outre la racine $\lambda = 1$, deux racines positives et < 1, l'une comprise entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$, l'autre entre $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et 1.

*DU MEILLEUR SYSTÈME DE NUMÉRATION ET DE POIDS ET MESURES (*);

par M. l'abbé E. Gelin, professeur au Collège Saint-Quirin à Huy.

Proposons-nous de rechercher quel est le meilleur système de numération et de poids et mesures.

Observons d'abord que la base du système de numération ne doit être ni trop petite ni trop grande; car avec une base trop petite, il faudrait trop de chiffres pour représenter des nombres même peu élevés, et, avec une base trop grande, il faudrait des tables d'addition et de multiplication trop étendues. Il importe aussi, soit au point de vue purement arithmétique, soit au point de vue de l'établissement d'un système de poids et mesures qui soit en harmonie avec le système de numération, que la base et ses puissances soient d'un fractionnement ou d'une divisibilité facile.

On voit que les seuls nombres qui remplissent ces conditions sont 8, 10, 12, et parmi ceux-ci, 8 nous semble le meilleur, pour les raisons suivantes :

1. Dans la base 8, le nombre des chiffres nécessaires pour écrire les nombres ne serait guère plus considérable que dans les bases 10 ou 12.

En effet, on peut, dans la base 8, écrire, avec le même nombre de chiffres que dans la base 10, ou seulement avec un chiffre de plus, tous les nombres jusqu'à $77\ 777\ 777\ 777_8$ ou $8\ 589\ 934\ 591_{10}$. De même, on peut écrire, avec le même nombre de chiffres que dans la base 12, ou seulement avec un chiffre de plus, tous les nombres jusqu'à $7\ 777\ 777_8$ ou $2\ 097\ 151_{10}$ ou $851\ 767_{12}$, et, avec un ou deux chiffres de plus, tous les nombres jusqu'à $7\ 777\ 777\ 777\ 777_8$ ou $549\ 755\ 831\ 887_{10}$ ou $8a\ 668\ 139\ 767_{12}$.

2. Dans la base 8, les opérations sont notablement plus simples et partant plus sûres que dans les bases 10 ou 12.

En effet, le système octaval, comparé au système décimal, réduit les

(*) Note extraite de la nouvelle édition, actuellement en prépapation, du *Traité d'Arithmétique* de l'auteur.

tables d'addition et de multiplication de plus de $\frac{4}{10}$, tandis que système duodécimal les augmente de plus de moitié.

3. Les puissances successives de 8 offrent, *proportionnellement à leu valeur*, plus de diviseurs que les mêmes puissances de 10 ou de 12.

En effet, les puissances 8^n, 10^n, 12^n ont, respectivement,

$$3n+1, \quad n^2+2n+1, \quad 2n^2+3n+1$$

diviseurs. Or on a, comme on le prouve aisément,

$$3n+1 : n^2+2n+1 > 8^n : 10^n, \quad 3n+1 : 2n^2+3n+1 > 8^n : 12^n$$

Et ces inégalités subsistent encore si l'on omet le diviseur 1, qu n'est d'aucun emploi.

4. La multiplication ou la division la plus simple et la plus réduit de toutes, celle dont le résultat s'éloigne le moins de l'objet à multiplie ou diviser, est la multiplication ou la division par 2. Or, dans le systèm octaval, la multiplication et la division par 2 sont extrêmement simples

En effet, la multiplication binaire successive de l'unité donne la séri de nombres

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2018, \ldots$$

lesquels, dans le système octaval, s'écrivent simplement :

$$1, 2, 4, 10, 20, 40, 100, 200, 400, 1000, 2000, 4000, \ldots$$

c'est-à-dire chacun avec un seul des chiffres significatifs 1, 2, 4 ; et l division binaire engendre la série de fractions

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \ldots$$

ou

$$'5, \ '25, \ '125, \ '0625, \ '03125, \ '015625, \ '0078125, \ '00390625, \ '001953125, \ldots$$

lesquelles, dans le système octaval, s'écrivent simplement :

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{100}, \frac{1}{200}, \frac{1}{400}, \frac{1}{1000}, \ldots$$

ou

$$'4, \ '2, \ '1, \ '04, \ '02, \ '01, \ '004, \ '002, \ '001, \ldots$$

c'est-à-dire chacune avec un seul des chiffres significatifs 1, 2, 4.

5. La multiplication et la division binaire étant, comme il vient d'être dit, la plus simple et la plus réduite de toutes, il s'ensuit que la base 8 est la plus convenable pour la formation d'un système régulier

et uniforme de poids et mesures. Le système décimal n'admet pas de série régulière, non plus que le système duodécimal; car, dans le système décimal, on passe de l'unité à la moitié, de la moitié au cinquième, du cinquième au dixième; et, dans le système duodécimal, on passe de l'unité à la moitié, de la moitié au tiers, du tiers au quart, du quart au sixième, du sixième au douzième. Tous ces fractionnements offrent des disparités choquantes, et sont loin de présenter à l'esprit la clarté, la commodité et la perfection de la série binaire pure, dégagée de toute autre espèce de fractionnement.

6. La division ternaire n'est pas naturelle, parce qu'elle est matériellement difficile. Aussi, si l'on emploie quelquefois le tiers, c'est plutôt pour lui appliquer la division binaire, en le partageant en sixièmes et en douzièmes, et non en neuvièmes et en vingt-septièmes. La division binaire, au contraire, est si véritablement instinctive que, dans le langage usuel, on ne nomme guère d'autres fractions que les demis, les quarts et les demi-quarts, et que, pour exprimer une quantité égale à un tiers, ou qui en approche, on préfère dire *un bon quart*.

Et si l'on jette un coup d'œil sur les systèmes de poids et mesures anciens et modernes, autres que le système métrique, on reconnaît aisément que malgré l'existence de la numération décimale, les différents peuples ont le plus généralement employé les multiples et les sous-multiples binaires, souvent même sans mélange d'aucune autre sorte de division. Bien plus, dans le système métrique, créé non par la nature mais par l'art et imposé non par l'usage mais par la loi, les mesures décimales ont leur double et leur moitié. A la Bourse, même dans les pays à monnaies décimales, les transactions sur un grand nombre de fonds s'opèrent par $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, et, pareillement, le prix du change varie suivant l'échelle 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ pour cent. Les taux usuels d'intérêt et d'escompte varient aussi de quart en quart de franc. La série de nos monnaies d'argent, par manque de logique décimale, comprenait autrefois la pièce de $2\frac{1}{2}$ francs, moitié de celle de cinq francs, et la pièce d'un quart de franc; la série des monnaies d'or comprenait la pièce de 40 francs. Tant il est naturel de revenir au fractionnement ou à la progression binaire en ce qui concerne les poids et mesures.

7. Enfin, n'omettons pas d'observer que l'on pourrait également *compter sur ses doigts* dans la numération octavale. On pourrait, en

effet, faire servir de compteurs les deux pouces, que la nature, d'ailleurs, a formés à part, et les huit autres doigts fonctionneraient comme signes des huit premiers nombres.

Il semble résulter, des considérations qui précèdent, que le système octaval serait le meilleur système de numération et de poids et mesures (*).

SUR UN SYSTÈME DE CONIQUES

par M. J. Neuberg.

On appelle *système de coniques* une suite indéfinie de coniques satisfaisant à quatre conditions communes, ou telles que chacune de ces courbes est déterminée par la valeur attribuée à un même paramètre.

Si μ courbes du système passent par un point donné et que ν courbes touchent une droite donnée, on dit que le système a pour *caractéristiques* les nombres μ, ν ou pour symbole (μ, ν).

Dans l'étude d'un système, il y a lieu de rechercher les *coniques dégénérées*. On appelle ainsi les courbes constituées soit par deux droites (distinctes ou confondues), soit par deux points (distincts ou confondus). On peut aussi, s'il y a lieu, *séparer* les ellipses, les hyperboles, les paraboles; voir si le système comprend des circonférences ou des hyperboles équilatères.

Nous avons étudié récemment (voir les *Wiskundige Opgaven*, 1896, question 127) le système des coniques passant par les intersections des côtés non homologues d'un triangle fixe et de l'un quelconque de ses triangles de Kiepert. La présente note s'occupe d'un autre système, qui comprend comme cas particulier la suite des cercles de Tucker.

1. On donne un triangle ABC et un point M de son plan. Soit $A_1B_1C_1$ l'un quelconque des triangles homothétiques à ABC par rapport à M. Désignons par :

X_1, X_2 les points de rencontre de BC avec A_1B_1, A_1C_1 ;
Y_1, Y_2 » » CA » B_1C_1, B_1A_1 ;
Z_1, Z_2 » » AB » C_1A_1, C_1B_1.

Ces six points appartiennent à une même conique U.

(*) Lire, sur cette question, l'intéressant ouvrage de M. Colenne, *Le système octaval ou la numération et les poids et mesures réformés*. Paris, 1845. (E. G.)

Nous allons étudier le système (U), le rapport de similitude des triangles ABC, $A_1B_1C_1$ étant supposé variable.

Représentons par α, β, γ les coordonnées barycentriques absolues de M par rapport au triangle de référence ABC, de sorte que $\alpha+\beta+\gamma=1$. Les droites B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 auront pour équations

$$x=\frac{\alpha}{k},\quad y=\frac{\beta}{k},\quad z=\frac{\gamma}{k},$$

le *paramètre variable* k étant égal au rapport $(AM : AA_1)$. Les points de la figure auront pour coordonnées

$A_1, B_1, C_1 \cdots k-\beta-\gamma, \beta, \gamma;\ \alpha, k-\gamma-\alpha, \gamma;\ \alpha, \beta, k-\alpha-\beta.$
$X_1, Y_1, Z_1 \cdots 0, k-\gamma, \gamma;\ \alpha, 0, k-\alpha;\ k-\beta, \beta, 0.$
$X_2, Y_2, Z_2 \cdots 0, \beta, k-\beta;\ k-\gamma, 0, \gamma;\ \alpha, k-\alpha, 0.$

Pour simplifier l'écriture nous avons multiplié les coordonnées absolues de ces points par le même facteur k.

Exprimons maintenant qu'une conique représentée par

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy=0$$

passe par les points X_1, X_2. Les équations des droites AX_1, AX_2 étant

$$y=\frac{k-\gamma}{\gamma}z,\quad z=\frac{k-\beta}{\beta}y,$$

nous devons avoir

$$A'y^2+A''z^2+2Byz\equiv\rho\left(y-\frac{k-\gamma}{\gamma}z\right)\left(z-\frac{k-\beta}{\beta}y\right),$$

où ρ est un facteur de proportionnalité. Nous prendrons

$$\rho=1,\ A'=-\frac{k-\beta}{\beta},\ A''=-\frac{k-\gamma}{\gamma},\ 2B=\frac{(k-\beta)(k-\gamma)}{\beta\gamma}+1.$$

Il résulte de là que les six points X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 sont situés sur une même conique ayant pour équation(*)

$$U\equiv\Sigma\left(1-\frac{k}{\alpha}\right)x^2+\Sigma\left[\left(1-\frac{k}{\beta}\right)\left(1-\frac{k}{\gamma}\right)+1\right]yz=0. \qquad (1)$$

Comme k entre au second degré, on a $\mu=2$.

(*) Nous désignons par une même lettre le premier membre d'une équation et le lieu de l'équation.

Remarquons que

$$U \equiv k^2 \Sigma \frac{yz}{\beta\gamma} - k\Sigma \frac{x}{\alpha} \Sigma x + \Sigma^2 x, \tag{2}$$

$$U \equiv k^2 \Sigma \frac{yz}{\beta\gamma} - \left(k\Sigma \frac{x}{\alpha} - \Sigma x\right) \Sigma x. \tag{3}$$

8. Le groupe des points X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 est susceptible d'une autre définition. En effet, soit $A_2B_2C_2$ le triangle formé par les droites Y_2Z_1, Z_2X_1, X_2Y_1 suffisamment prolongées, et soit $M_aM_bM_c$ le triangle ayant pour côtés les polaires de M par rapport aux angles BAC, CBA, ACB; les sommets M_a, M_b, M_c sont situés respectivement sur MA, MB, MC. Les quadrilatères $A_1Y_2AZ_1$, $B_1Z_2BX_1$, $C_1X_2CY_1$ étant des parallélogrammes, les droites Y_2Z_1, Z_2X_1, X_2Y_1 sont parallèles à M_bM_c, M_cM_a, M_aM_b et divisent les droites MA, MB, MC dans le même rapport; donc *les triangles* $M_aM_bM_c$, $A_2B_2C_2$ *sont homothétiques par rapport à* M.

Au moyen des coordonnées des points X_1, X_2, ..., on trouve facilement les équations des droites B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 et de l'axe d'homologie des triangles ABC, $A_2B_2C_2$:

$$-x + \frac{k-\beta}{\beta} y + \frac{k-\gamma}{\gamma} z = 0, \quad \frac{k-\alpha}{\alpha} x - y + \frac{k-\gamma}{\gamma} z = 0,$$

$$\frac{k-\alpha}{\alpha} x + \frac{k-\beta}{\beta} y - z = 0, \quad \frac{k-\alpha}{\alpha} x + \frac{k-\beta}{\beta} y + \frac{k-\gamma}{\gamma} z = 0.$$

La dernière peut s'écrire

$$k\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma}\right) - (x + y + z) = 0;$$

on voit que l'axe d'homologie est parallèle à la polaire trilinéaire de M.

9. Pour abréger l'écriture, posons

$$V \equiv \Sigma \frac{yz}{\beta\gamma}, \quad P \equiv \Sigma \frac{x}{\alpha}, \quad I \equiv \Sigma x;$$

l'équation de U prend la forme

$$U \equiv Vk^2 - PIk + I^2 = 0. \tag{4}$$

A la valeur $k = 0$ correspond la droite de l'infini ($I = 0$) comptée doublement. L'hypothèse $k = \infty$ donne $V = 0$; le triangle $A_1B_1C_1$ est maintenant confondu avec ABC; mais comme le triangle $A_2B_2C_2$ reste déterminé et coïncide avec $M_aM_bM_c$, la conique U devient tangente aux

côtés du triangle $M_aM_bM_c$ en A, B, C. Nous désignerons par V cette position particulière de U.

Toutes les coniques du système (U) *sont homothétiques.* En effet, elles passent par deux points fixes à l'infini qui sont déterminés par les équations $V = 0$, $I = 0$.

Une conique quelconque U et la conique V ont pour sécantes communes la droite de l'infini et l'axe d'homologie $(kP - I = 0)$ des triangles ABC, $A_2B_2C_2$.

Deux courbes du système (U) qui correspondent à des valeurs de k égales et de signes contraires, ont pour sécante commune l'axe d'homologie $(P = 0)$ des triangles ABC, $M_aM_bM_c$.

Si l'on fait passer les côtés du triangle $A_1B_1C_1$ par M, on a $k = 1$, et l'équation de U devient

$$V - PI + I^2 = 0.$$

Le cas où les côtés du triangle $A_2B_2C_2$ passent par M mérite une attention particulière. Le triangle $A_1B_1C_1$ est alors symétrique de ABC par rapport à M; nous désignerons cette position par $A_0B_0C_0$ et la conique correspondante par U_0. M est le centre de U_0. On a $k = \frac{1}{2}$ et l'équation de U_0 est

$$V - 2PI + 4I^2 = 0.$$

Par tout point N (x, y, z) du plan ABC il passe deux coniques U. Ces courbes se réduisent à une seule lorsque l'équation $U = 0$ admet deux valeurs égales de k. Le lieu des points N où cette circonstance se produit, est, abstraction faite des points à l'infini communs à toutes les coniques U, la courbe du second ordre représentée par

$$P^2 - 4V = 0, \text{ ou } \Sigma\frac{x^2}{\alpha^2} - 2\Sigma\frac{yz}{\beta\gamma} = 0.$$

Cette ligne touche les côtés de ABC en leurs points de rencontre avec AM, BM, CM. Elle est doublement tangente à chacune des courbes U, la corde de contact $(kP - 2I = 0)$ ayant une direction fixe; car on peut écrire

$$4U \equiv (4V - P^2)k^2 + (Pk - 2I)^2.$$

La conique $P^2 - 4V = 0$ est l'*enveloppe* des courbes U.

4. Toutes les coniques U étant homothétiques, leur genre dépend

uniquement de la position de M, et il suffit de déterminer celui de V, ou de chercher dans quel cas les intersections des lignes V et I sont réelles ou imaginaires. En éliminant z entre les équations $V = 0$, $I = 0$, on obtient

$$\alpha y^2 + \beta x^2 + (\alpha + \beta - \gamma)\, xy = 0.$$

Le genre dépend donc du signe de la quantité

$$E = (\alpha + \beta - \gamma)^2 - 4\alpha\beta \equiv \Sigma\alpha^2 - 2\Sigma\beta\gamma.$$

L'équation $E = 0$ exprime que le point M appartient à l'ellipse de STEINER de ABC (qui touche les côtés de ABC en leurs milieux); les inégalités $E > 0$, $E < 0$ expriment respectivement que M est extérieur ou intérieur à cette ellipse. Donc les courbes U sont des paraboles, des hyperboles ou des ellipses suivant que le point M est sur l'ellipse de STEINER, extérieur ou intérieur à cette ellipse.

Les coniques U sont des circonférences lorsque V est la circonférence circonscrite au triangle ABC; M est alors le point de LEMOINE de ce triangle, et l'on obtient le système des cercles de TUCKER.

Pour avoir des hyperboles équilatères il suffit que V passe par l'orthocentre H de ABC. Cette condition donne

$$\alpha \cot A + \beta \cot B + \gamma \cos C = 0;$$

donc M doit se trouver sur la polaire trilinéaire de H (*).

5. Le centre de U vérifie les équations

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

qu'on ramène facilement à

$$\frac{k}{x}\left(\frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma}\right) - \frac{1}{x} = \frac{k}{\beta}\left(\frac{z}{\gamma} + \frac{x}{\alpha}\right) - \frac{1}{\beta} = \frac{k}{\gamma}\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta}\right) - \frac{1}{\gamma}, \qquad (5)$$

en supposant $\Sigma x = 1$. Egalons les quantités (5) à une inconnue auxiliaire m; nous aurons

$$\frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = \frac{mx + 1}{k}, \quad \frac{z}{\gamma} + \frac{x}{\alpha} = \frac{m\beta + 1}{k}, \quad \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = \frac{m\gamma + 1}{k}. \qquad (6)$$

De là on déduit

$$x = \frac{mx(-x + \beta + \gamma) + x}{2k}, \ldots; \qquad (7)$$

(*) Comparer *Steiner*, Œuvres complètes, t. II, p. 432.

puis en faisant la somme $x+y+z=1$:

$$m\Sigma\alpha(-\alpha+\beta+\gamma)+1=2k. \tag{8}$$

Tirons de (8) la valeur de m pour la substituer dans les formules (7); en posant

$$\alpha_1=\frac{\alpha(-\alpha+\beta+\gamma)}{\Sigma x(-\alpha+\beta+\gamma)},\quad \beta_1=\frac{\beta(\alpha-\beta+\gamma)}{\Sigma x(-\alpha+\beta+\gamma)},\ldots$$

on obtient pour les coordonnées absolues du centre de U :

$$x=\frac{(2k-1)\alpha_1+\alpha}{2k},\quad y=\frac{(2k-1)\beta_1+\beta}{2k},\quad z=\frac{(2k-1)\gamma_1+\gamma}{2k}. \tag{9}$$

Les égalités (9) donnent, pour $k=\frac{1}{2}$, le centre M de U_0; l'hypothèse $k=\infty$ correspond à la conique V, qui a pour centre le point $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$.

La forme des coordonnées montre que le centre de U et les points A_1, B_1, C_1 décrivent des ponctuelles semblables.

On trouve immédiatement l'équation du lieu du centre en éliminant m et k entre les relations (6). L'équation ainsi obtenue

$$\begin{vmatrix} \frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma} & \alpha & 1 \\ \frac{z}{\gamma}+\frac{x}{\alpha} & \beta & 1 \\ \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta} & \gamma & 1 \end{vmatrix}=0$$

se ramène facilement à

$$\begin{vmatrix} x & \alpha & \alpha^2 \\ y & \beta & \beta^2 \\ z & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}=0, \tag{10}$$

si l'on retranche de la première colonne la troisième multipliée par $\Sigma\frac{x}{\alpha}$. Le lieu est donc une droite m joignant M au point $(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$, qui est le centre de la conique défini par la valeur $k=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

Il est intéressant d'étudier la transformation (M, m). Par exemple, si la droite m tourne autour d'un point fixe (x, y, z), le point M (α, β, γ) parcourt la cubique représentée par l'équation (10). Si le point M parcourt une droite donnée (v_1, v_2, v_3), la droite m (u_1, u_2, u_3) enveloppe une

courbe dont l'équation résulte de l'élimination de α, β, γ entre les égalités

$$v_1\alpha_1 + v_2\beta + v_3\gamma = 0,\ u_1\alpha + u_2\beta + u_3\gamma = 0,\ u_1\alpha^2 + u_2\beta^2 + u_3\gamma^2 = 0.$$

6. Pour trouver les coniques dégénérées, nous exprimons que les points X_1, Y_1, Z_1 sont sur une même droite μ_1 ; les points X_2, Y_2, Z_2 seront nécessairement sur une seconde droite μ_2. On obtient, au moyen des coordonnées de X_1, Y_1, Z_1, la condition

$$(k-\alpha)(k-\beta)(k-\gamma) + \alpha\beta\gamma = 0.$$

Une valeur de k est nulle, elle se rapporte à la droite de l'infini. Deux autres, racines de l'équation

$$k^2 - (\alpha+\beta+\gamma)k + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0, \qquad (11)$$

ont pour expression

$$k = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma-2\gamma\alpha-2\alpha\beta}.$$

Elles sont imaginaires quand M est intérieur à l'ellipse de Steiner.

Elles se réduisent à une seule $k = \frac{1}{2}$ si M est sur cette ellipse; comme la courbe U est alors du genre parabole, nous pouvons énoncer le théorème suivant, déjà signalé par Steiner (*Œuvres complètes*, t. II, p. 432) et retrouvé par M. Lemoine (*Congrès de Nancy*, 1886, p. 95) :

Tout triangle $A_0B_0C_0$ *symétrique d'un triangle donné* ABC *par rapport à un point de l'ellipse de Steiner est triplement homologique à* ABC ; *l'un des axes d'homologie est à l'infini, et les deux autres sont parallèles entre eux.*

Cherchons les enveloppes des axes d'homologie μ_1, μ_2 lorsque M parcourt l'ellipse de Steiner. Soit

$$u_1x + u_2y + u_3z = 0$$

l'équation de μ_1. En exprimant qu'elle est vérifiée par les coordonnées des points X_1, Y_1, Z_1 pour $k = \frac{1}{2}$ on obtient

$$(1-2\gamma)u_2 + 2\gamma u_3 = 0,\quad 2\alpha u_1 + (1-2\alpha)u_3 = 0,\quad (1-2\beta)u_1 + 2\beta u_2 = 0.$$

Tirant de ces égalités les valeurs de α, β, γ et posant $\alpha+\beta+\gamma = 1$, on trouve

$$\frac{u_1}{u_1-u_2} + \frac{u_2}{u_2-u_3} + \frac{u_3}{u_3-u_1} = 2, \quad \text{ou} \quad \frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \frac{u_3}{u_1} = 3.$$

Telle est l'équation de l'enveloppe de μ_1. Cette courbe est de la

troisième classe et du quatrième ordre. On trouve de même, pour l'enveloppe de μ_2,

$$\frac{u_1}{u_1-u_3}+\frac{u_2}{u_2-u_1}+\frac{u_3}{u_3-u_2}=2, \quad \text{ou} \quad \frac{u_1}{u_3}+\frac{u_2}{u_1}+\frac{u_3}{u_2}=3.$$

Cherchons encore l'enveloppe de la parallèle équidistante de μ_1 et μ_2. Si cette droite a pour coordonnées u_1, u_2, u_3, on trouve, en la faisant passer par les milieux des segments X_1X_2, Y_1Y_2, Z_1Z_2 :

$$u_2\left(\tfrac{1}{2}+\beta-\gamma\right)+u_3\left(\tfrac{1}{2}-\beta+\gamma\right)=0, \quad \text{ou} \quad \beta-\gamma=\frac{u_3+u_2}{2(u_3-u_2)},$$

$$\gamma-\alpha=\frac{u_1+u_3}{2(u_1-u_3)}, \quad \alpha-\beta=\frac{u_2+u_1}{2(u_2-u_1)}.$$

La somme de ces égalités donne l'équation cherchée,

$$\frac{u_1+u_2}{u_1-u_2}+\frac{u_2+u_3}{u_2-u_3}+\frac{u_3+u_1}{u_3-u_1}=0, \quad \text{ou} \quad \Sigma\left(\frac{u_1}{u_2}+\frac{u_2}{u_1}\right)=6.$$

7. Supposons maintenant le point M extérieur à l'ellipse de Steiner. L'équation (11) donne deux valeurs réelles

$$k=\tfrac{1}{2}+\sqrt{E}, \quad k'=\tfrac{1}{2}-\sqrt{E};$$

soient $A_1B_1C_1$, $A_1'B_1'C_1'$ les triangles correspondants, et μ_1, μ_2, μ_1', μ_2' les droites correspondantes $X_1Y_1Z_1$, $X_2Y_2Z_2$. Comme les systèmes de droites $\mu_1\mu_2$, $\mu_1'\mu_2'$ représentent deux coniques homothétiques, μ_1 et μ_1' sont parallèles ainsi que μ_2 et μ_2'. La relation $k+k'=1$ se traduit par l'égalité

$$\frac{1}{AA_1}+\frac{1}{AA_1'}=\frac{1}{AM}=\frac{2}{AA_0};$$

donc les points A_1, A_1' sont conjugués harmoniques par rapport à A, A_0.

Écrivons l'équation (11) ainsi :

$$(k^2-k)(\alpha+\beta+\gamma)^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0;$$

elle exprime que le point M se meut sur une ellipse concentrique et homothétique à l'ellipse de Steiner, lorsque les triangles $A_1B_1C_1$ qui donnent lieu à des coniques dégénérées conservent la même grandeur. On a donc le théorème suivant :

A tout point M *il correspond deux triangles* $A_1B_1C_1$, $A_1'B_1'C_1'$ *qui sont homothétiques à* ABC *par rapport à* M *et triplement homologiques à ce*

triangle. Lorsque M *décrit une ellipse* E' *concentrique et homothétique à l'ellipse de Steiner, les triangles* $A_1B_1C_1$, $A_1'B_1'C_1'$ *se déplacent sans changer de grandeur, et leurs sommets se meuvent sur des ellipses homothétiques à l'ellipse* E' *par rapport à* A, B *ou* C.

Nous rencontrons encore ici plusieurs *transformations* qui présentent un certain intérêt, telles que : (M, μ_1), (M, μ_2), (μ_1, μ_2), (μ_1, μ_1'), etc. Pour ne pas nous écarter trop de notre sujet nous ne nous y arrêterons pas.

On trouve aussi les coniques dégénérées en cherchant les valeurs de k qui annulent le discriminant de la forme quadratique U.

8. Cherchons maintenant l'équation tangentielle de U.

L'équation en coordonnées ponctuelles est

$$\Sigma A x^2 + 2\Sigma B yz = 0,$$

avec les valeurs

$$A = 1 - \frac{k}{\alpha}, \quad A' = 1 - \frac{k}{\beta}, \quad A'' = 1 - \frac{k}{\gamma},$$

$$2B = A'A'' + 1, \quad 2B' = A''A + 1, \quad 2B'' = AA' + 1.$$

On en déduit l'équation tangentielle

$$\Sigma(A'A'' - B^2)^2 u_1^2 + 2\Sigma(B'B'' - AB)u_2u_3 = 0,$$

où

$$4(A'A'' - B^2) = -(A'A'' - 1)^2 = -\frac{k^2}{\beta^2\gamma^2}(k - \beta - \gamma)^2,$$

$$4(B'B'' - AB) = AA'A''(A - 2) + A(A' + A'' - 2) + 1$$

$$= \frac{k^2}{\alpha\beta\gamma}[k^2 - k(\beta + \gamma) + \eta - \alpha^2], \quad \eta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha.$$

Nous l'écrivons ainsi

$$U' = \Sigma\alpha^2(k - \beta - \gamma)^2 u_1^2 - 2\Sigma\beta\gamma[k^2 - k(\beta + \gamma) + \eta - \alpha^2]u_2u_3 = 0.$$

Par conséquent, le symbole du système (U) est (2, 2).

En faisant $k = \infty$ on trouve l'équation tangentielle de V. L'hypothèse $k = 0$ mérite un examen particulier. Si l'on fait

$$\alpha u_1 = v_1, \quad \beta u_2 = v_2, \quad \gamma u_3 = v_3,$$

l'équation prend la forme

$$\Sigma(\beta + \gamma)^2 v_1^2 - 2\Sigma(\eta - \alpha^2)v_2v_3 = 0.$$

Résolvons-la par rapport à v_1 ; il vient

$$(\beta + \gamma)^2 v_1 = (\eta - \gamma^2)v_2 + (\eta - \beta^2)v_3 \pm \sqrt{R},$$

$$R = [(\eta - \gamma^2)v_2 + (\eta - \beta^2)v_3]^2 - (\beta + \gamma)^2[(\gamma + \alpha)^2 v_2^2 + (\alpha + \beta)^2 v_3^2 - 2(\eta - \alpha^2)v_2v_3].$$

En observant que

$$(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=\eta+\gamma^2,\quad (\beta+\gamma)(\alpha+\beta)=\eta+\beta^2,$$

on trouve

$$R=-4\eta\gamma^2v_2^2-4\eta\beta^2v_3^2+8\eta\beta\gamma v_2v_3.$$

Par conséquent, dans le cas considéré, l'équation $U'=0$ se ramène à

$$(\beta+\gamma)^2v_1=(\eta-\gamma^2)v_2+(\eta-\beta^2)v_3\pm 2(\gamma v_2-\beta v_3)\sqrt{-\eta},$$

ou à

$$\alpha(\beta+\gamma)^2u_1+\beta(\sqrt{-\eta}\pm\gamma)^2u_2+\gamma(\sqrt{-\eta}\mp\beta)^2v_3=0. \quad (12)$$

Elle représente deux points J, J′ situés à l'infini et ayant pour coordonnées

$$\begin{aligned} &J\ldots\alpha(\beta+\gamma)^2,\quad \beta(\sqrt{-\eta}+\gamma)^2,\quad \gamma(\sqrt{-\eta}-\beta)^2;\\ &J'\ldots\alpha(\beta+\gamma)^2,\quad \beta(\sqrt{-\eta}-\gamma)^2,\quad \gamma(\sqrt{-\eta}+\beta)^2. \end{aligned}$$

L'équation $\eta=0$ représente l'ellipse minimum circonscrite à ABC. Lorsque M est extérieur à cette courbe, on a $\eta<0$ et les points J, J′ sont réels et distincts; ils définissent deux directions δ, δ'. En général, il existe deux coniques U qui touchent une même droite donnée; lorsque celle-ci est parallèle à δ ou δ', il n'existe plus qu'une conique proprement dite qui la touche, l'autre conique étant remplacée par la droite de l'infini (comptée deux fois); car si u_1, u_2, u_3 vérifient l'égalité (12), l'équation $U'=0$ admet une racine nulle et une racine différente de zéro. Les points J, J′ coïncident lorsque M est situé sur l'ellipse η.

La conique U touche le côté BC (au point de rencontre avec AM) si le coefficient de u_1^2 est nul dans l'équation $U'=0$, ce qui exige $k=\beta+\gamma$.

On obtient l'enveloppe des courbes de notre système en égalant à zéro le discriminant de U′ par rapport à k; l'équation à laquelle on parvient se décompose en deux facteurs dont l'un correspond aux points fixes à l'infini qui appartiennent à toutes les courbes du système; l'autre correspond à l'enveloppe proprement dite que nous avons déjà obtenue ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE.

The Elements of Algebra with numerous Exercises for viva voce and writing work, by J. A. Mc Lellan, M. A. LL. D, director of Normal School and Institute of Ontario. Toronto, Canada Publishing Company (limited) (328 p. in-12). Cartonné.

Lezioni di calcolo infinitesimale dettate da E. Pascal, Professore nella R. Università di Pavia. Parte I. Calcole differenziale (In-18 de IX-316 p. avec 10 figures). Parte II. Calcolo integrale (In 18 de VI-318 p. avec 15 fig.). Milano, Hoepli, 1895. Prix : 6 francs.

Très bon résumé d'analyse infinitésimale, où les questions de principe surtout sont traitées avec soin et que nous signalons particulièrement aux professeurs de mathématiques spéciales.

Sommaire : I. 1. Fonctions réelles d'une variable réelle. 2. Dérivée. 3. Développement en série des fonctions. 4. Maxima et minima. 5. Formes indéterminées. Déterminants fonctionnels et wronskiens. 6. Applications géométriques. II. 1. Intégrales définies et indéfinies. 2 Conditions d'intégrabilité. 3. Calcul des intégrales indéfinies et définies. 4. Intégrales multiples. 5. Intégration des différentielles totales. 6. Applications géométriques. 7. Équations différentielles. (P. M.).

Curso de Analyse infinitesimal por F. Gomes Teixeira, Director et Professor na Academia Polytechnica do Porto, etc. Calculo differencial. 3ª Ediçâo. Porto, Typographia occidental; 1886 (In-8° de 383 pages).

Le Cours du savant professeur de Porto a été récemment couronné par l'Académie royale des sciences de Lisbonne. Comme nous l'avons dit antérieurement, cet ouvrage est l'un des quatre ou cinq manuels d'analyse infinitésimale (ceux de Jordan, Lipschitz, Peano) les plus remarquables publiés depuis une vingtaine d'années.

Sommaire : *Introduction*. 1. Nombres irrationnels, négatifs, imaginaires (70 pages). 2. Les fonctions élémentaires (51 pages). *Calcul différentiel*. 1. Infiniment petits, dérivées. 2. Dérivées du premier ordre. 3. Applications géométriques. 4. Dérivées d'ordre quelconque. 5-6. Formule de Taylor, applications analytiques et géométriques. 7. Fonctions définies par des séries ; singularités des fonctions. 8. Fonctions d'une variable imaginaire. (P. M.)

Elementi di Aritmetica ad uso del ginnasio superiore, delle scuole normali e degl' Istituti tecnici per A Faifofer, Professore nel Liceo Marco Foscarini ; 14ª edizione. Venezia, Tipografia Emiliana, 1895 (In-12° de 312 pages). Prix : fr. 2,50.

Elementi di Algebra ad uso degl' Istituti tecnici e dei Licei per A. F., etc.; 11ª edizione (In-8° de 400 pages). Prix : 3 fr.

Elementi di Geometria, etc.; 10ª edizione (550 pages, in-12°). Prix : 4 francs.

Elementi di Geometria, ad uso dei Licei, etc.; 4ª edizione (393 p., in-12°). Prix : 3 francs.

Mathesis a rendu compte autrefois des excellents manuels d'arithmétique, d'algèbre et de géométrie de M. Faifofer. Nous les signalons de nouveau à l'attention de nos lecteurs, particulièrement la géométrie dont le dernier ouvrage est un extrait à l'usage des lycées.

Depuis douze ans, M. Faifofer n'a cessé d'apporter des améliorations de détail à toutes les pages de ses *Éléments* de Géométrie, de manière à les rendre de plus en plus méritoires au point de vue scientifique et pédagogique. Parmi les chapitres de la dixième édition sur lesquels il convient d'appeler l'attention des lecteurs compétents, il faut citer les suivants : (8) *Polygones équivalents*. L'auteur, qui a eu le grand mérite de faire connaître autrefois au public savant les difficultés que présente la théorie de l'équivalence, l'a traitée ici avec simplicité et rigueur, croyons-nous. (9) *Théorie des proportions*, euclidienne pour le fond, mais avec tous les développements nécessaires pour qu'elle soit accessible aux commençants. (12) *Théorie* générale *des figures semblables*, exposée d'une manière originale comme un cas particulier d'une correspondance ponctuelle univoque où les angles des segments correspondants sont égaux. (14) *Cyclométrie*. Ce sujet difficile est traité avec une rigueur toute moderne, pour le fond et la forme. (P. M.)

Cours de Géométrie analytique à l'usage des Élèves de la classe de Mathématiques spéciales et des candidats aux Écoles du Gouvernement; par B. Niewenglowski, docteur es sciences, inspecteur de l'académie de Paris. Tome III. Géométrie dans l'espace, avec une note sur les transformations en géométrie, par Émile Borel, maître de conférences à la faculté des sciences de Lille. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1896. Un vol., grand in-8° de 572 pages. Prix : 12 francs.

Nous avons déjà rendu compte des tomes I et II de cet important ouvrage. (Voir *Mathesis*, (2) V, p. 89).

Pour que le lecteur puisse apprécier la marche suivie par l'auteur et la richesse des matériaux réunis dans ce volume, nous reproduisons les titres des chapitres, en signalant par ci et par là des questions spéciales.

I. Coordonnées (Interprétation des équations; distance de deux points et angle de deux directions, en coordonnées rectangulaires ou obliques; coordonnées polaires, sphériques, cylindriques). II. Transformation des coordonnées. III. Plan et ligne droite (Les problèmes sur les distances et les angles sont traités pour des axes quelconques. Coordonnées d'une droite. Rapport anharmonique). IV. Points, droites et plans imaginaires. V. Sphère (Équation en cordonnées obliques. Cercle de l'infini; plan isotrope. Inversion). VI. Courbes gauches : tangente, plan osculateur, courbures. VII. Plans tangents (Équation du plan tangent en coordonnées homogènes. Exprimer qu'un plan ou une droite touchent une quadrique. Plan tangent à une surface définie à l'aide de deux paramètres). VIII. Lieux géométriques. — Génération des surfaces ou des lignes (Cylindres, cônes, etc. Surfaces de translation). IX. Notions sur les surfaces réglées (Point central,

ligne de striction, paramètre de distribution). X. Enveloppes. XI. Notions sur les systèmes de droites. — Complexes, congruences. XII. Figures homothétiques. XIII. Classification des quadriques rapportées à des coordonnées ponctuelles (Classification par les directions asymptotiques, par la décomposition du premier membre de l'équation en carrés). XIV. Théorie du centre. XV. Plans diamétraux. — Diamètres. XVI. Plans principaux. — Cordes principales. — Axes. Equation en S. (Discussion de l'équation en S par les méthodes de MM. Kronecker et Walecki, de Cauchy, de Jacobi. Équations des axes). XVII. Réduction de l'équation du second degré, les axes étant rectangulaires (Par la transformation des coordonnées ou par l'usage des invariants). XVIII. Pôles et plans polaires. XIX. Polaires réciproques (Polaire d'une surface quelconque, d'une surface développable, d'une courbe). XX. Propriétés des diamètres conjugués dans les quadriques à centre. XXI. Cônes du second ordre (Cônes supplémentaires. Cône équilatère). XXII. Plans tangents (formes réduites). — Sphère de Monge. — Lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à une quadrique. XXIII. Normales (Cubique des pieds des normales. Pôle normal et pôle tangentiel. Surface normopolaire. Synormale. Formules de Desboves). XXIV. Génératrices rectilignes (Hyperboloïde et paraboloïde de raccordement). XXV. Sections circulaires. XXVI. Discussion d'une équation numérique du second degré (Méthode des contours apparents. Équation résolue par rapport à l'une des variables. Discussion d'une équation tangentielle du second degré). XXVII. Détermination des quadriques. (Conditions linéaires, conditions multiples. Paramètres de grandeur, paramètres de position). XXVIII. Intersection de deux quadriques (Quadriques bitangentes, inscrites, circonscrites, ayant une droite commune, ayant deux génératrices rectilignes communes. Faisceau ponctuel ou tangentiel. XXIX. Focales. — Quadriques homofocales. XXX. Éléments d'une section plane d'une quadrique (Axes et foyers de la section). XXXI. Application des imaginaires à la géométrie analytique à trois dimensions (Notions très sommaires sur les quaternions).

Additions. — Conditions pour que six points d'un plan soient sur une conique ou dix points sur une quadrique. Nouvelle démonstration du théorème de Pascal. Sur la définition de l'angle de deux demi-droites. Homologie; Tétraèdres homologiques. Une application de la théorie des génératrices rectilignes (surface de Steiner). Étude de la cubique lieu des foyers des coniques inscrites à un quadrilatère, emploi des coordonnées symétriques.

La note qui termine le volume (pp. 481-558), est fort intéressante et instructive; elle reproduit (avec quelques modifications) des conférences faites par M. Borel, pendant l'hiver 1894-95, à la faculté des sciences de Lille. Voici en quels termes l'auteur expose le but qu'il a poursuivi : « Galois, en montrant l'importance qu'a en algèbre la théorie des groupes de substitutions, a ouvert une voie nouvelle à la science. C'est un géomètre norwégien déjà illustre, M. Sophus Lie, qui, en créant sa théorie des groupes de transformations, a introduit dans le domaine de l'analyse et de la géométrie l'idée de groupe convenablement modifiée et étendue.

« Le but de cette note n'est pas d'exposer les idées de M. Lie; l'importance et

l'étendue du mouvement auquel elles ont donné naissance rendraient cette tâche trop lourde, si d'ailleurs c'en était ici le lieu. Notre but, bien plus modeste, est de nous en inspirer le plus possible dans une étude élémentaire des transformations les plus simples de la géométrie; c'est pourquoi nous avons tenu à rappeler au début de cette note les noms des deux géomètres qui ont jusqu'ici le plus contribué à mettre en évidence l'utilité de la notion de groupe ».

Les trois volumes qui composent le cours de M. Niewenglowski nous paraissent représenter assez bien l'enseignement de la géométrie analytique tel qu'il est fait aujourd'hui dans les grands établissements français, avec les changements importants introduits dans les vingt dernières années. (J. N.)

Recueil complémentaire d'exercices sur le Calcul infinitésimal, par M. F. TISSERAND, Membre de l'Institut, etc. Deuxième édition augmentée de nouveaux exercices sur les variables imaginaires par P. PAINLEVÉ, Professeur-adjoint à la Faculté des Sciences de Paris. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1896 (In-8° de XXIII-524 pages in-8). Prix : 9 francs.

La première édition du livre de M. Tisserand a paru en 1877 comme complément du Recueil classique de Frenet, si justement estimé des maîtres et des élèves. Le livre de Frenet s'adressait aux candidats aux Écoles et à la Licence; celui de M. Tisserand, à ceux qui se destinaient à la Licence ou à l'Agrégation.

Il était divisé en trois parties : I. Calcul différentiel (55 exercices). II. Calcul intégral (41 exercices). III. Applications du calcul intégral à la solution de questions diverses concernant les courbes et les surfaces (70 exercices).

Les programmes de la Licence et de l'Agrégation ont été élargis depuis 1877 et contiennent notamment la Théorie des fonctions d'une variable imaginaire fondée par l'illustre Cauchy. A la prière de l'auteur, M. Painlevé a introduit dans la nouvelle édition du livre de M. Tisserand une quatrième partie relative à la théorie des fonctions (intégrales définies, résidus, périodes, inversion d'intégrales, points critiques de diverses équations différentielles; 27 exercices, près de 100 pages). En outre, M. Painlevé a ajouté 7 nouveaux exercices à la seconde partie, 13 à la troisième, tous des plus intéressants, et présentés, comme ceux de la quatrième partie « avec le talent qui caractérise le jeune et brillant professeur de la Faculté des Sciences de Paris ».

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 961.

(Voir *Mathesis* (2), IV, p. 176).

Soient A_1, B_1, C_1 *les pieds des hauteurs d'un triangle* ABC, *et* A_2, B_2, C_2 *les milieux des hauteurs.*

1° *Les circonférences circonscrites aux triangles* $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$,

$A_2B_2C_1$ *passent par l'orthocentre et respectivement par les milieux des côtés* BC, CA, AB. 2° *Ces triangles sont inversement semblables à* ABC, *le rapport de similitude ayant pour valeur :*

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\cos^2 B+\cos^2 C-2\cos B\cos C\cos A}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2\cos^2 B+2\cos^2 C-\sin^2 A},\ \text{etc.}$$

3° *Les centres* α, β, γ *des cercles circonscrits à ces triangles sont les sommets d'un triangle ayant pour orthocentre le centre du cercle des neuf points de* ABC. 4° *Les droites* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *concourent en un même point, qui les divise dans le rapport* 4 : 1 *et qui partage dans le rapport* 2 : 3 *la droite allant de l'orthocentre* H *de* ABC *au centre* O *de* ABC. 5° *Le point de Lemoine de* ABC *est le centre de gravité des points* A_2, B_2, C_2 *chargés des masses* a^2, b^2, c^2. (J. Neuberg.)

Solution par M. Droz Farny. 1. Soient D, E et F les points milieux des côtés BC, CA et AB. Les droites DC_2 et DB_2 étant respectivement parallèles à AB et à AC sont perpendiculaires la première à CH, la seconde à BH; les points B_2, C_2, A_1 appartiennent donc à la circonférence décrite sur HD comme diamètre.

2. L'angle $C_2B_2A_1$ est égal à C_2HA_1, donc égal à B; de même l'angle $B_2C_2A_1$ est égal à C. Les sommets A et A_1 étant séparés par B_2C_2, les triangles $A_1B_2C_2$ et ABC sont inversement semblables.

On sait que dans un quadrilatère, la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales augmentée de quatre fois le carré de la droite qui joint les milieux de ces diagonales.

Appliquons ce théorème au quadrilatère BCB_1C_1. Comme

$$B_1C_1 = a\cos A,\quad B_1C = a\cos C,\quad \text{etc.},$$

on a successivement

$$a^2(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+1)=a^2(\sin^2 B+\sin^2 C)+4\overline{B_2C_2}^2,$$

$$\frac{B_1C_2}{a}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+1-\sin^2 B-\sin^2 C}$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{\cos^2 B\cos^2 C+\sin^2 B\sin^2 C-2\cos B\cos C\sin B\sin C+\cos^2 B+\cos^2 C+1-\sin^2 B-\sin^2 C},$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{2\cos^2 B\cos^2 C+\cos^2 B+\cos^2 C-2\cos B\cos C\sin B\sin C},$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{\cos^2 B+\cos^2 C-2\cos B\cos C\cos A}\qquad (1)$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+1-(1-\cos^2 B)-(1-\cos^2 C)}$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{2\cos^2 B+2\cos^2 C-(1-\cos^2 A)}$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{2\cos^2 B+2\cos^2 C-\sin^2 A}.\qquad (2)$$

3. α étant le milieu de HD, le triangle $\alpha\beta\gamma$ est homothétique au triangle DEF, H étant le centre d'homothétie et $1/2$ le rapport de similitude, $\beta\gamma$ est parallèle à EF, donc à BC. Or la perpendiculaire abaissée de α sur BC divise DA_1 et par suite OH en parties égales. L'orthocentre de $\alpha\beta\gamma$ coïncide donc avec le centre O_9 du cercle d'Euler de ABC.

4. D'après ce qui précède, les triangles $\alpha\beta\gamma$ et ABC sont en homothétie inverse. Le rapport de similitude étant $1/4$, les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ se coupent en un point qui les divise dans le rapport de 1 à 4.

La transversale $A\alpha$ coupe HO au point x et rencontre OD prolongée en un point g tel que $Dg = AH = 2OD$; on a donc

$$\frac{H\alpha}{\alpha D} = 1, \quad \frac{OD}{Og} = \frac{1}{3},$$

et en appliquant le théorème de Ménélaüs au triangle HOD coupé par la transversale $x\alpha g$ on trouve : $2Ox = 3xH$.

5. Attribuons aux points A_2, B_2, C_2 les masses $4a^2$, $4b^2$, $4c^2$.

La masse $4a^2$ peut être remplacée par deux masses $2a^2$, $2a^2$ placées en A, A_1. La masse $2a^2$ placée en A_1 équivaut aux masses $a^2 + b^2 - c^2$, $a^2 + c^2 - b^2$ placées en B, C ; car les distances A_1B, A_1C sont proportionnelles aux quantités $a^2 + c^2 - b^2$, $a^2 + b^2 - c^2$. En opérant de même sur les masses $4b^2$, $4c^2$, on voit que le système des masses attribuées aux points A_2, B_2, C_2 a même centre de gravité que les masses $4a^2, 4b^2, 4c^2$ attribuées aux points A, B, C. Ce centre est le point de Lemoine de ABC.

On peut déduire la même propriété du théorème suivant :

Étant donnés deux triangles quelconques ABC, $A_2B_2C_2$, *on peut toujours trouver trois masses* m_1, m_2, m_3 *telles, qu'étant placées soit en* A, B, C, *soit en* A_2, B_2, C_2 *elles aient le même centre de gravité. Ces masses sont proportionnelles aux aires des trois triangles* IB_2C_2, IC_2A_2, IA_2B_2 *dont les côtés* IA_2, IB_2, IC_2 *sont égaux et parallèles aux droites* AA_2, BB_2, CC_2. (NEUBERG, *Sur les projections et contreprojections d'un triangle fixe*, p. 51).

Dans la question actuelle, les droites IA_2, IB_2, IC_2 sont proportionnelles à a^{-1}, b^{-1}, c^{-1} et les angles compris sont égaux à A, B, C ; donc

$$m_1 : m_2 : m_3 = \frac{\sin A}{bc} : \frac{\sin B}{ca} : \frac{\sin C}{ab} = a^2 : b^2 : c^2.$$

M. Déprez a résolu la même question ; pour trouver le rapport de similitude

des triangles ABC, $A_1B_1C_1$, il calcule le diamètre DH du cercle circonscrit à $A_1B_1C_1$ au moyen du triangle rectangle A_1HD.

Autre solution par M.J. Jonesco, qui fait intervenir les équipollences.

Si l'on prolonge HD de DL = HD, on trouve immédiatement HL au moyen du triangle HCL dans lequel HC = 2R cos C, CL = 2R cos B, angle HCL = A.

(J. N.)

Question 962.

(Voir *Mathesis* (2), IV, p. 176.)

Étant donnée une parabole (P), *d'un point* M *on mène les normales* MA, MB, MC *qui rencontrent la courbe pour la deuxième fois en* A', B', C'.

On demande 1° *le lieu des points* M *tels que les normales en* A', B', C' *concourent en un même point* M' ; 2° *le lieu des points* M' ; 3° *le lieu du centre et* 4° *l'enveloppe de la circonférence circonscrite à* A'B'C'. (J. Gillet.)

Solution par MM. Cristescu, Barisien et J. Jonesco. Soient $y^2 = 2px$ l'équation de (P) ; (α, β), $(\alpha'\beta')$ les coordonnées de M, M' ; (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), (x'_3, y'_3) les coordonnées des points A, B, C, A', B', C'. Les normales en A', B', C' concourant en un même point (α', β'), on sait que y'_1, y'_2, y'_3 sont les racines de l'équation

$$y^3 - 2p(\alpha' - p)y - 2p^2\beta' = 0. \qquad (1)$$

D'autre part, l'équation de la normale AA' étant

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1),$$

si l'on y remplace x, y par les coordonnées $(y'^2_1 : 2p)$, y'_1 de A' et x_1 par $(y_1^2 : 2p)$, on trouve

$$y'_1 = -\left(y_1 + \frac{2p^2}{y_1}\right);$$

on en conclut les valeurs analogues de y'_2 et y'_3. Comme y_1, y_2, y_3 sont les racines de

$$y^3 - 2p(\alpha - p)y - 2p^2\beta = 0, \qquad (2)$$

il est facile de calculer les fonctions symétriques

$$\Sigma y'_1 = -\Sigma y_1 + 2p^2\Sigma\frac{1}{y_1},$$

$$\Sigma y'_1y'_2 = \Sigma y_1y_2 + \frac{2p^2}{y_1y_2y_3}\Sigma y_1^2y_2 + 4p^4\Sigma\frac{1}{y_1y_2},$$

$$y'_1y'_2y'_3 = y_1y_2y_3 + \frac{8p^3}{y_1y_2y_3} + \frac{2p^2}{y_1y_2y_3}\Sigma y_1^2y_2^2 + \frac{4p^4}{y_1y_2y_3}\Sigma y_1^2,$$

au moyen des coefficients de (2). On trouve ainsi que y_1, y'_1, y'_2 sont aussi racines de l'équation

$$y^3 - \frac{2p}{\beta}(\alpha - p)\,y^2 - 2p\,(\alpha + 2p)\,y + \frac{2p^2}{\beta}(2\alpha^2 + \beta^2) = 0. \quad (3)$$

Si l'on identifie les équations (1) et (3), on trouve

$$\alpha - p = 0, \quad \alpha' - 4p = 0, \quad \beta' = -\frac{1}{\beta}(\beta^2 + 2p^2). \quad (4)$$

Donc le lieu des points M est la droite $\alpha - p = 0$, et le lieu des points M' est la droite $\alpha' - 4p = 0$.

La circonférence de Joachimsthal relative aux points A', B', C' est, comme on sait, représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 - (p + \alpha')\,x - \tfrac{1}{2}\beta' y = 0.$$

Elle devient, si l'on tient compte de (4),

$$x^2 + y^2 - 5px + \frac{1}{2\beta}(2p^2 + \beta^2)\,y = 0. \quad (5)$$

Le centre de la circonférence A'B'C' se trouve donc toujours sur la droite

$$x - \frac{5p}{2} = 0.$$

Le cercle A'B'C' passant par le sommet de la parabole et ayant son centre sur une droite fixe passe par un second point fixe : Son enveloppe se compose donc de deux points fixes.

M. Droz Farny a résolu la même question en prenant pour point de départ l'équation du cercle A'B'C' donnée par M. Barisien dans le J.M.S, 1893 :

$$x^2 + y^2 - \frac{\beta^2(\alpha + 4p) + 2p\,(\alpha - p)^2}{\beta^2}\,x - \frac{2\alpha p - \beta^2 - 4p^2}{2\beta}\,y + \frac{p\,(\alpha - p)\,(2\alpha^2 + \beta^2)}{\beta^2} = 0,$$

et en exprimant que ce cercle passe par le sommet de la parabole.

Question 964.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 214.)

Soit ABCD *un quadrilatère convexe quelconque. Sur les côtés* AB, DC *on construit les triangles isoscèles* EAB, FCD, *ayant même angle à la base* φ; *sur les deux autres côtés* BC, DA *on construit les triangles isoscèles* BCG, DAH *ayant même angle à la base* $\frac{1}{2}\pi - \varphi$; *les quatre triangles ainsi construits sont dirigés à la fois vers l'extérieur ou vers*

l'intérieur du quadrilatère. Démontrer : 1° *Que les droites* EF, HG *sont perpendiculaires et dans le rapport sin* $\varphi : \cos\varphi$; 2° *Qu'elles enveloppent deux paraboles lorsque* φ *varie;* 3° *Que leur point de concours décrit une cubique.* (J. NEUBERG.)

Solution par M. DROZ FARNY. — LEMME. Soit un triangle ABC. Construisons sur les côtés AC et AB comme bases deux triangles isoscèles ACB', ABC' ayant respectivement les angles φ et $\frac{1}{2}\pi - \varphi$ à la base, et dirigés à la fois vers l'extérieur ou vers l'intérieur du triangle donné. On joint les sommets B' et C' au milieu α du côté BC. Les droites $\alpha B'$ et $\alpha C'$ sont orthogonales et dans le rapport de sin φ à cos φ.

En effet, en représentant par β et γ les milieux des côtés AC et AB, les deux lignes brisées $B'\beta + \beta\alpha$ et $\alpha\gamma + \gamma C'$ ont leurs côtés respectivement deux à deux perpendiculaires et dans le rapport de sin φ à cos φ ; il en sera donc de même de leurs résultantes $\alpha B'$ et $\alpha C'$.

I. Dans le quadrilatère, représentons par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les milieux des côtés AB, BC, CD, DA et par M le milieu de la diagonale AC. D'après le lemme précédent, on a, dans le triangle MEG :

$$angle\ EMG = \tfrac{1}{2}\pi, \quad EM : MG = \sin\varphi : \cos\varphi.$$

De même, dans le triangle FMH a :

$$angle\ FMH = \tfrac{1}{2}\pi, \quad FM : MH = \sin\varphi : \cos\varphi.$$

Comme *angle* $HMG = \frac{1}{2}\pi + EMH = EMF$, les triangles EMF et HMG sont semblables et par conséquent :

$$EF : HG = \sin\varphi : \cos\varphi,$$

et ces droites sont perpendiculaires.

II. Comme

$$E\alpha = \alpha A.tg\varphi, \quad F\gamma = \gamma D.tg\varphi,$$

les points E et F décrivent sur les médiatrices $E\alpha$ et $F\gamma$ deux ponctuelles semblables. EF enveloppe donc une parabole admettant comme tangentes particulières $E\alpha$, $F\gamma$ et $\alpha\gamma$. Même raisonnement pour HG.

III. Il s'agit de chercher le lieu des sommets des angles droits circonscrits à deux paraboles données P et P'.

Cherchons le nombre des points du lieu qui se trouvent sur une tangente Δ quelconque à P.

Une tangente variable quelconque t à P rencontre Δ en un point T ;

une perpendiculaire t' à t en ce point enveloppera une certaine courbe, transformée orthotangentielle de P et qui sera dans ce cas une parabole Q (Voir *d'Ocagne*, Coordonnées parallèles et axiales).

Toutes les fois que t' sera tangente commune à Q et P', le point T sera un point du lieu sur Δ ; or les deux courbes étant chacune de la deuxième classe, cela se présentera trois fois, abstraction faite de la tangente infinie commune qui ne répond pas à la question. Le lieu cherché est donc une cubique.

M. Déprez résout la même question par le calcul et fait les remarques suivantes : 1° Les milieux des droites EF, HG se meuvent sur des droites ; 2° les côtés du quadrilatère EGFH enveloppent des coniques ; les milieux de ces côtés décrivent des hyperboles.

A ces remarques on peut ajouter les suivantes : Le produit $\alpha E.\beta G$ étant constant, α et β sont les points de fuite des ponctuelles projectives engendrées par E, G ; donc 1° EG enveloppe une conique ayant pour centre le milieu de $\alpha\beta$; 2° le milieu de EG décrit une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à αE, βG. (J.N.).

Question 965.

(Voir *Mathesis*, (2) IV, p. 215).

Le lieu des points tels que si l'on mène trois tangentes à la parabole semi-cubique $ky^2 = x^3$, le cercle passant par les points de contact ait son centre sur l'axe de symétrie, est une ligne droite. — Si le cercle des points de contact a son centre sur la perpendiculaire à l'axe menée par le point de rebroussement de la parabole semi-cubique, le lieu du point d'émission des tangentes se compose de deux droites. (E. N. Barisien.)

Solution par M. J. Gillet (Verviers).

Écrivons l'équation de la parabole sous la forme

$$x^3 - 3ay^2 = 0, \tag{1}$$

et soit

$$x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + p = 0 \tag{2}$$

l'équation du cercle qui passe par les points de contact des tangentes à (1) issues du point P (α,β).

La polaire de P (α,β) par rapport à (1) a pour équation :

$$\alpha x^2 - 2a\beta y - ay^2 = 0. \tag{3}$$

Rendons les équations (1) et (3) homogènes par l'introduction d'une variable z; on obtient

$$x^3 - 3ay^2z = 0, \quad \alpha x^2 - 2a\beta yz - ay^2 = 0 :$$

en éliminant z, on aura l'équation du faisceau des droites qui joignent l'origine aux points de contact des tangentes issues du point P. On trouve

$$3\alpha x^2y - 2\beta x^3 - 3ay^3 = 0 ; \tag{4}$$

les coefficients angulaires μ de ces droites sont donc les racines de l'équation

$$3a\mu^3 - 3\alpha\mu + 2\beta = 0. \tag{5}$$

D'autre part, si l'on opère de la même manière sur les équations (1) et (2), on obtient pour équation du faisceau des droites joignant l'origine aux points d'intersection de la parabole et de la circonférence :

$$px^6 + 6amx^4y^2 + 6anx^3y^3 + 9a^2x^2y^4 + 9a^2y^6 = 0; \tag{6}$$

d'où, pour équation aux coefficients angulaires :

$$9a^2\mu^6 + 9a^2\mu^4 + 6an\mu^3 + 6am\mu^2 + p = 0. \tag{7}$$

Pour que trois des droites (6) coïncident avec les droites (4), il faut que le premier membre de (7) soit divisible par le premier membre de (5). En commençant la division, et en annulant le reste obtenu, on a pour conditions :

$$m = -\frac{3\alpha(a+\alpha)}{2a}, \quad n = \frac{\beta(a+2\alpha)}{\alpha}, \quad p = \frac{4\beta^2(a+\alpha)}{\alpha}.$$

En introduisant ces valeurs dans (2), on aura l'équation du cercle qui passe par les points de contact.

Tout ce qui précède a été indiqué par M. E. Bourrienne dans la ***Revue de Mathématiques spéciales***, de Niewenglowski, tome I, page 323.

On aura les lieux demandés dans la question soit en posant $m = 0$, soit en posant $n = 0$.

Lorsque $m = 0$, le centre du cercle est sur la perpendiculaire à l'axe de symétrie, menée par le point de rebroussement; le lieu du point P (x, β) se compose des deux droites

$$x = 0, \quad x + a = 0.$$

Si $n = 0$, le cercle a pour centre un point de l'axe de symétrie et le point P parcourt l'une des droites

$$\beta = 0, \quad 2\alpha + a = 0.$$

Solution peu différente par M. V. Cristescu ; autre solution par M. J. Jonesco.

Question 966.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 215).

On considère la podaire d'une cardioïde par rapport à son point de rebroussement. Si a désigne la distance du point de rebroussement au sommet de la courbe, le périmètre de cette podaire est $\frac{3}{2}\pi a$ *et son aire est* $\frac{15}{32}\pi a^2$. *La développée de cette podaire a un périmètre équivalent à* $\frac{3}{2}a$ *et une aire dont l'expression est* $\frac{3}{64}\pi a^2$. (E. N. Barisien.)

Solution par M. Fairon (*Seraing*). I. Si l'on prend pour pôle le point de rebroussement, l'équation de la cardioïde est

$$\rho = a\cos^2\tfrac{1}{2}\omega,$$

l'angle ω variant de 0 à 2π. Soit α l'angle que la tangente à cette courbe au point $M(\rho, \omega)$ fait avec l'axe polaire ; on trouve, en appliquant la formule

$$d\alpha = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}\,d\omega,$$

que $d\alpha = \frac{1}{2}d\omega$. Appelons s_1, ρ_1, ω_1 l'arc et les coordonnées d'un point N de la podaire, correspondant au point M de la cardioïde, et soit s l'arc de cette dernière courbe. Le triangle rectangle OMN donne

$$\rho_1 = \rho\sin V = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}, \quad \omega_1 = \alpha - \frac{\pi}{2},$$

V étant l'angle que fait la tangente MT à la cardioïde avec le rayon vecteur OM. On tire de ces égalités

$$d\rho_1 = \frac{\rho d\rho\,(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')}{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\rho d\rho d\alpha}{d\omega\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} = \frac{\rho d\rho d\alpha}{ds},$$

$$\rho_1 d\omega_1 = \frac{\rho^2 d\alpha}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} = \frac{\rho^2 d\alpha d\omega}{ds}.$$

2. Nous aurons donc

$$ds_1^2 = d\rho_1^2 + \rho_1^2 d\omega_1^2 = \rho^2 d\alpha^2 \left[\frac{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}{ds}\right] = \rho^2 d\alpha^2,$$

$$ds_1 = \rho d\alpha = \tfrac{3}{2}\rho d\omega.$$

Le périmètre de la podaire est donc

$$\frac{3}{2}\int_0^{2\pi} a\cos^2\frac{1}{2}\omega d\omega = \frac{3a}{4}\int_0^{2\pi}(1+\cos\omega)d\omega = \frac{3\pi a}{2}.$$

Nous aurons aussi

$$\rho_1^2 d\omega_1 = \frac{\rho^4}{\rho^2+\rho'^2}d\alpha = a^2\cos^6\frac{1}{2}\omega d\alpha = \frac{3}{2}a^2\cos^6\frac{1}{2}\omega d\omega.$$

Par conséquent, l'aire de la podaire est

$$\frac{3}{4}a^2\int_0^{2\pi}\cos^6\frac{1}{2}\omega d\omega = \frac{3a^2}{32}\int_0^{2\pi}(1+\cos\omega)^3 d\omega = \frac{15\pi a^2}{32}.$$

3. Soient α_1 l'angle que la tangente en N à la podaire fait avec OX, R_1 le rayon de courbure de cette courbe ; on voit aisément que

$$\alpha_1 = 2\alpha - \omega;$$

d'où

$$d\alpha_1 = 2d\alpha - d\omega = 2d\omega.$$

Donc

$$R_1 = \frac{ds_1}{d\alpha_1} = \frac{\frac{3}{2}sd\omega}{ad\omega} = \frac{3}{4}\rho\cos^2\frac{1}{2}\omega.$$

L'arc de développée équivalant à la différence des rayons de courbure menés par ses extrémités à la podaire considérée, la moitié du périmètre s'obtiendra en donnant à ω les valeurs 0, puis π ; le périmètre total égale donc

$$2.\frac{3}{4}a\left[\cos^2\frac{1}{2}\omega\right]_\pi^0 = \frac{3a}{2}.$$

4. Il résulte d'une propriété des podaires que la normale en N passe au milieu K de OM et détermine le triangle isoscèle ONK. Portons sur cette normale, dans le sens NK, une longueur $ND = \frac{3}{4}\rho$; le point D appartient à la développée de la podaire. Menons DP, KQ perpendicu-

laires à OX et, O étant l'origine, soient (x, y), (x', y') les coordonnées rectangulaires de D et K; soit β l'angle DKQ :

$$\beta = \frac{\pi}{2} - 2\omega_1 + \omega = \frac{3\pi}{2} - 2\alpha + \omega = \frac{3\pi}{2} - (2\alpha - \omega);$$

$$x = \mathrm{OQ} - \mathrm{OP} = x' - \tfrac{1}{4}\rho \sin\beta = \tfrac{1}{2}\rho\cos\omega - \tfrac{1}{4}\rho\sin\beta;$$

$$y = y' - \tfrac{1}{4}\rho\cos\beta = \tfrac{1}{2}\rho\sin\omega - \tfrac{1}{4}\rho\cos\beta.$$

Si ρ_2 et ω_2 sont les coordonnées polaires de D, on aura

$$\rho_2^2 = x^2 + y^2 = \frac{5}{16}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^2\cos\omega = \frac{a^2}{16}\cos^4\frac{1}{2}\omega\left(9 - 8\cos^2\frac{1}{2}\omega\right);$$

de plus

$$\operatorname{tg}\omega_2 = \frac{y}{x} = \frac{2\cos\omega - \cos 2\omega}{2\sin\omega - \sin 2\omega}; \quad \omega_2 = \operatorname{arc\,tg}\frac{2\cos\omega - \cos 2\omega}{2\sin\omega - \sin 2\omega}$$

d'où

$$d\omega_2 = 12\frac{\sin^2\frac{1}{2}\omega\, d\omega}{9 - 8\cos^2\frac{1}{2}\omega}.$$

Donc

$$\rho^2 d\omega_2 = \tfrac{3}{4}a^2\cos^4\tfrac{1}{2}\omega\sin^2\tfrac{1}{2}\omega d\omega = \tfrac{3}{4}a^2(\cos^4\tfrac{1}{2}\omega - \cos^6\tfrac{1}{2}\omega)\,d\omega.$$

L'aire de la développée est ainsi

$$\frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\left(\cos^2\frac{1}{2}\omega - \cos^6\frac{1}{2}\omega\right)d\omega =$$

$$\frac{3}{32}a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos\omega)^2\,d\omega - \frac{3}{64}a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos\omega)^3\,d\omega = \frac{3a^2\pi}{64}.$$

×Question 980.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 240).

On donne deux plans P, P′ ***et deux droites quelconques*** D, D′. ***On projette un point quelconque*** M ***de*** P ***en*** M′ ***sur*** P′ ***au moyen d'une droite rencontrant*** D ***et*** D′; M′ ***est la projection gauche de*** M. ***Démontrer que deux figures correspondantes tracées ainsi dans les plans*** P, P′ ***restent encore l'une la projection gauche de l'autre lorsque l'un des plans*** P, P′ ***tourne autour de l'intersection de ces plans.*** (A. Transon.)

Solution par M. Hacken. Soient T et T′ les traces sur les plans P et P′ d'une droite quelconque rencontrant MM′. Supposons que le plan P′ tourne autour de l'intersection des deux plans et que les points T′ et M′ viennent respectivement en T″ et M″ quand le plan P′ aura pris sa

nouvelle position P''. Je dis que TT'' et MM'' se coupent. En effet, TM, T'M' rencontrent l'intersection des plans en un même point, ce point ne change pas de place dans le mouvement de P' : les droites TM, T''M'' se coupent donc et MM'', TT'' pareillement puisqu'elles sont situées dans un même plan (le plan des droites TM, T''M'').

Il en résulte que D rencontrant les projetantes, la droite joignant la trace de D sur P au point où sera venue se placer la trace de D sur P' quand P' occupera la position P'', rencontrera encore les droites joignant les points de la figure du plan P aux points correspondants de la figure de P' quand P' prendra la position P''. La même chose peut se dire de D'. Les deux figures se déduisent donc encore l'une de l'autre, par le procédé indiqué, dans leurs nouvelles positions relatives.

Question 982.

(Voir *Mathesis*, (2) IV, p. 263).

Le lieu de la projection du centre d'un cercle osculateur à une parabole, sur la droite qui joint le point d'osculation au foyer est une parabole égale à la parabole donnée. Trouver le lieu analogue dans l'ellipse.

(E. N. Barisien.)

Solution par M. Déprez. Si la normale menée en un point M d'une conique rencontre l'axe focal en N, on obtient le rayon de courbure Mω en menant sur MN une perpendiculaire NP, qui rencontre le rayon vecteur en P; la perpendiculaire élevée en P sur MF passe par ω. Donc P est la projection de ω sur MF.

1° Lorsque la courbe est une parabole, les angles NMF, FNM sont égaux, de même que leurs compléments NPF, FNP; donc NF = FM = FP et les points M, P sont symétriques par rapport à F. Il en résulte que P décrit une courbe égale à la parabole donnée.

2° Considérons une conique à centre, par exemple une ellipse ayant pour foyers F, F'. Soit T le point où la tangente menée en M rencontre l'axe focal.

La division harmonique FF'NT étant projetée sur MF en F, P, Q, M parallèlement à MT, on a (MQ = MF')

$$\frac{1}{MP} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{MF} + \frac{1}{MF'}\right), \quad \text{d'où} \quad MP = \frac{MF.MF'}{a}.$$

Donc, si l'on adopte pour pôle le foyer F et pour axe polaire FF', l'équation du lieu de P est

$$\rho = \frac{MF\,(a - MF)}{a} = \frac{b^2 c\,(a\cos\omega - c)}{a\,(a - c\cos\omega)^2}.$$

Ont résolu la même question MM. J. Jonesco et H. Mandart.

×Question 996.

(Voir *Mathesis*, (2) IV, p. 280).

La base BC ***d'un triangle*** ABC ***est divisée harmoniquement aux points*** D, E. ***Étudier la variation de*** $\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2$. (J. Neuberg).

Solution par M. Klompers. Soit O le milieu de BC. Lorsque D parcourt le segment OB, E parcourt le segment infini de BC situé au-delà de B par rapport à C.

La somme $\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 = u^2$ varie donc d'une manière continue depuis $+\infty$ jusqu'à $2\overline{AB}^2$, qui représente un minimum. De même si l'on fait parcourir à D le segment OC, u^2 varie de $+\infty$ à $2\overline{AC}^2$ qui est encore un minimum.

Note. M. J. Jonesco a donné une bonne solution par les équipollences.

Pour traiter la question par le calcul, désignons par h la hauteur AH, et par d, x, y les distances de O aux points H, D, E, ces distances étant soumises à la règle des signes; nous aurons

$$u^2 = 2h^2 + (d - x)^2 + (d - y)^2 = 2h^2 + 2d^2 - 2d\,(x + y) + (x^2 + y^2).$$

On sait que $xy = \overline{OB}^2 = \frac{1}{4}a^2$; donc

$$u^2 = 2h^2 + 2d^2 - \tfrac{1}{2}a^2 + (x + y)\,(x + y - 2d).$$

Pour obtenir toute la variation de u^2, il suffit de faire parcourir à D le segment BC ou de faire varier x de $-\frac{1}{2}a$ à $\frac{1}{2}a$. Comme la valeur absolue de $x + y$ passe par un minimum pour $x = y$, on voit que u^2 croît de $2\overline{AB}^2$ à l'infini pour décroître jusqu'à $2\overline{AC}^2$. (J. N.).

×Question 998.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 280).

Quatre droites a, b, c, d prises trois à trois, forment quatre triangles; on sait que les centres α, β, γ, δ, *des cercles circonscrits à ces triangles appartiennent à une même circonférence.*

Si l'on donne ces centres, on peut trouver une infinité de quadrilatères correspondants abcd. Démontrer que les côtés de ces quadrilatères pivotent autour de quatre points fixes et que les sommets se meuvent sur des circonférences égales à la circonférence $\alpha\beta\gamma\delta$. (J. Neuberg).

Solution par MM. T. Klompers et Droz Farny. Rappelons d'abord ces trois propositions connues :

1° Les circonférences circonscrites aux quatre triangles formés par les côtés *a*, *b*, *c*, *d* d'un quadrilatère complet, pris trois à trois, se coupent en un même point O.

2° Les centres α, β, γ, δ des quatre circonférences circonscrites à ces triangles appartiennent à une même circonférence, passant par le point O commun aux quatre premières.

3° Si, d'un point de la circonférence circonscrite à un triangle, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés et qu'on les prolonge chacune d'une longueur égale à elle-même, les trois points ainsi obtenus sont sur une même droite qui passe par l'orthocentre du triangle.

Cela posé, il est aisé de reconnaître que les sommets du quadrilatère complet *abcd* sont les symétriques du point O par rapport aux six droites qui joignent, deux à deux, les quatre points α, β, γ, δ.

Supposons que l'on donne ces derniers sur une même circonférence et que le point O se meuve sur cette courbe ; à chaque position de ce point correspond un quadrilatère complet *abcd*; les sommets décrivent des circonférences égales à celle qui est donnée et symétriques de celle-ci par rapport aux droites qui passent par deux des points α, β, γ, δ.

En vertu du 3°, on peut dire que les côtés du quadrilatère complet variable *abcd* pivotent autour de quatre points fixes, savoir : les orthocentres des quatre triangles formés par une diagonale et deux côtés du quadrilatère inscrit $\alpha\beta\gamma\delta$.

Ces points fixes sont les sommets d'un quadrilatère égal au quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$.

Question DXCIX.

(Voir N. C. M., t. VI, p. 526).

Trouver les valeurs, entières et positives, qui vérifient l'équation

$$x^3 + 2 = y^2. \qquad \text{(Gerono).}$$

Solution par M. E. Fauquembergue. Mettons l'équation sous la forme

$$x^3 = y^2 - 2.1^2.$$

On sait que tout diviseur de $y^2 - 2z^2$ peut être représenté soit par $p^2 - 2q^2$, soit par $2p^2 - q^2$, et que d'ailleurs ces deux formes se réduisent à une seule, en vertu de l'identité

$$p^2 - 2q^2 = 2(p - q)^2 - (p - 2q)^2.$$

Posons donc

$$x = p^2 - 2q^2,$$

d'où $$x^3 = (p^3 + 6pq^2)^2 - 2(3p^2q + 2q^3)^2.$$

Il faudrait identifier cette valeur de x^3 avec $y^2 - 2$, et, pour cela, que l'on eût $3p^2q + 2q^3 = \pm 1$; ce qui est impossible.

Donc l'équation proposée n'admet aucune racine entière positive; et il est facile de s'assurer qu'elle n'admet que -1 comme racine entière négative.

QUESTIONS D'EXAMEN.

753. Les diagonales AC, BD d'un quadrilatère ABCD se coupent en E; les côtés opposés AB, CD se rencontrent en F. Démontrer que les triangles EAD, EBC sont dans le même rapport que les triangles FAD, FBC.

A déduire de ce que EF est partagée harmoniquement par AD, BC.

754. D'un point M du plan d'une ellipse on mène des tangentes à cette courbe; les normales correspondantes se coupent en N. De N on mène les deux autres normales; les tangentes correspondantes se rencontrent en M'. Lorsque M décrit une hyperbole ayant pour asymptotes les axes de l'ellipse, M' parcourt une hyperbole ayant les mêmes asymptotes. (Barisien.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

1076. On considère une ellipse E et un cercle Σ. D'un point quelconque M de Σ on mène à E les tangentes dont les points de contact sont P et Q. Le cercle circonscrit au triangle MPQ rencontre l'ellipse en deux autres points P′ et Q′ : les tangentes à E en P′ et Q′ se rencontrent en M′.

1° Le lieu de M′ est en général un cercle, lorsque le point M se déplace sur Σ.

2° Si Σ passe par le centre de E, le lieu de M′ est une ligne droite.

3° Réciproquement, si le point M au lieu de parcourir le cercle Σ, décrit une droite Δ, le lieu de M′ est un cercle passant par le centre de O.

4° En général, le point M′ est situé sur le cercle circonscrit au triangle MPQ. (E. N. Barisien.)

1077. On considère l'hyperbole équilatère ayant pour centre un point donné et bitangente à une conique donnée. Quand cette dernière tourne autour de son centre, le pôle de la corde de contact reste invariable. Démontrer et généraliser cette proposition. (E. Duporcq.)

***1078.** Soient : O, I, I_a, I_b, I_c les centres du cercle circonscrit et des cercles inscrit et exinscrits à un triangle ABC, et R, r, r_a, r_b, r_c les rayons de ces cercles. Les quatrièmes tangentes communes à deux des cercles I_a, I_b, I_c forment un triangle $A_1B_1C_1$. Démontrer que le cercle inscrit à $A_1B_1C_1$ a même centre que le cercle circonscrit au triangle $I_aI_bI_c$ et qu'il a pour rayon

$$r_1 = 2R + r = \frac{r + r_a + r_b + r_c}{2}.$$ (J. Neuberg.)

1079. Deux cubiques placées dans le même plan se coupent en trois points A, B, C en ligne droite. Par un point arbitraire O on mène les droites OA, OB, OC qui vont couper ultérieurement les deux courbes respectivement aux points A_1, A_2, A'_1, A'_2, B_1, B_2, B'_1, B'_2, C_1, C_2, C'_1, C'_2. Démontrer que lorsque O varie, dans le plan des deux cubiques, le triangle conjugué commun des deux coniques $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$, $A'_1A'_2B'_1B'_2C'_1C'_2$ reste toujours le même. (Retali.)

Rectification. P. 134, au lieu de question 953, (2) IV, p. 152, lisez 933, (2) IV, p 104.

LES CERCLES DE CHASLES.

Notes par M. A. Droz Farny.

Dans les numéros de juin, juillet et novembre 1895, de ***Mathesis***, M. E.-N. Barisien a publié une suite de propriétés très curieuses des cercles de Chasles, ces cercles concentriques à une ellipse et ayant pour rayons respectifs $(a+b)$ et $(a-b)$.

Ce travail m'ayant vivement intéressé, la plupart de ces propositions m'étant inconnues, j'ai désiré reprendre une à une toutes ces belles questions. Dans cette étude de longue haleine, j'ai rencontré quelques petites erreurs, inévitables dans des développements exigeant souvent de longs et pénibles calculs, et quelques propriétés peut-être nouvelles de ces cercles si importants.

C'est le résultat de mes recherches que je me permets de soumettre aux lecteurs de ***Mathesis***.

Je tiens à remercier ici M. le Capitaine Barisien, pour la bonne grâce avec laquelle il a examiné mes diverses corrections, ainsi que pour les excellents conseils qu'il a bien voulu me donner.

I.

Voici les rectifications dont il a été question ci-dessus :

Question 6, ***page*** 133. Au lieu de : égale à OM, lire : égale à MN.

Question 26, ***page*** 160. Dans le n° 1, au lieu de

$$b^4x^2+a^4y^2=a^4b^2,$$

lire :

$$b^4x^2+a^4y^2=a^2b^4,$$

et dans le n° 3, au lieu de

$$(x^2+y^2)^2=b^2y^2+\frac{a^4x^2}{b^2},$$

lire :

$$(x^2+y^2)^2=a^2x^2+\frac{b^4y^2}{a^2}.$$

Question 32, ***page*** 160. Au lieu de

$$U=\pi ab+4\pi ab\frac{a-b}{a+b},$$

lire :

$$U=\pi ab+2\pi(a-b)^2,$$

c'est-à-dire deux fois l'aire de Σ plus deux fois l'aire de Σ'.

Question 58, *page* 242. Au lieu de Δ rencontre le cercle V, lire : Δ rencontre le cercle V′ ; et de même, au lieu de Δ′ rencontre le cercle V′, lire : Δ′ rencontre le cercle V.

Question 74, *page* 245. Au lieu de

$$(b^4x^2 + a^2y^2)^2,$$

mettre

$$(b^4x^2 + a^4y^2)^2.$$

Question 83, *page* 246. Remplacer la valeur de l'aire par la suivante :

$$U = \frac{\pi a^2 (a^2 + 5b^2)}{2b^2} \pm \pi ab.$$

Question 84, *page* 246. Remplacer la valeur de l'aire par la suivante :

$$U = \frac{\pi b^2 (b^2 + 5a^2)}{2a^2} \pm \pi ab.$$

Question 89, *page* 247. Au lieu de $(5a + 11b)$, mettre $(5a \pm 11b)$.

Question 91, *page* 247. Remplacer la valeur de l'aire par la suivante :

$$U = \pi b^2 - \frac{\pi (a \mp b)(9a \mp 25b)}{32}.$$

Question 102, *page* 249 (Nouvelle rédaction) : Le centre de gravité de (T) décrit un cercle dont l'aire est le neuvième de celle de Σ′.

L'orthocentre du triangle T décrit le cercle Σ′.

Question 109, *page* 249. Mettre à la place des numéros 2 et 3 :

2° $\beta\gamma \cdot \alpha p = 2$ (Aire quadrilatère OQαR).

3° $$\frac{\text{Aire } pqr}{\text{Aire } \alpha\beta\gamma} = \frac{ab}{(a+b)^2}.$$

Question 110, *page* 249. Dans le n° 2, remplacer la droite βγ par la droite *pq*.

II.

Les propriétés suivantes des cercles de Chasles m'ont été communiquées par M. E. Barisien.

1. Le lieu du centre du cercle C (de la question 26) est l'ellipse

$$a^4x^2 + b^4y^2 = \frac{a^2b^2(a+b)^2}{4}.$$

2. Le lieu du centre du cercle γ est l'ellipse

$$a^2x^2 + b^2y^2 = \frac{a^2b^2(a-b)^2}{4}.$$

3. La tangente en N au cercle Σ et la droite ON′ se rencontrent sur la quartique

$$(x^2 - y^2)^2 = (a+b)^2(x^2+y^2).$$

La tangente en N au cercle Σ' et la droite ON se rencontrent sur la quartique

$$(x^2 - y^2)^2 = (a-b)^2(x^2+y^2).$$

4. La tangente en N au cercle Σ et la tangente en N′ au cercle Σ' se rencontrent sur la kreuzcurve

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1.$$

5. La droite Δ, qui est aussi l'axe de la parabole W (N^{os} 58 et 86) et la droite Δ', axe de la parabole W′, enveloppent l'hypocycloïde à quatre rebroussements

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (a \pm b)^{\frac{2}{3}}.$$

6. Le milieu de la distance des sommets des paraboles W et W′ décrit une courbe ayant pour aire

$$U = \frac{21}{32}\pi ab.$$

III.

Qu'il me soit permis d'ajouter quelques remarques ou questions que j'ai rencontrées pendant mon travail.

1. La question 36 admet une généralisation intéressante. Un point et une courbe sont donnés; on demande celle des normales de la courbe dont la distance au point donné est un maximum ou un minimum.

En prenant le point donné comme origine d'un système de coordonnées orthogonales, on trouve aisément la relation :

$$(1 + y'^2)^2 + (y - xy')y'' = 0.$$

Il en résulte que la normale cherchée touche la développée de la courbe au pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la normale.

2. Il est de même facile de généraliser la question 37.

Il existe huit droites qui sont tangentes à une conique A et normales à une seconde conique B.

En effet, la conique A, courbe de seconde classe, et la développée de B, courbe de quatrième classe, admettent huit tangentes communes. On démontre en outre que les pieds des huit normales sont sur une courbe unicursale du 4^{me} degré dont les points doubles sont le centre de B et les points à l'infini de ses axes.

Si quatre des pieds des normales sont sur un cercle, les quatre autres pieds appartiennent de même à un cercle.

3. Trouver un point M d'une ellipse E tel, que le segment de la tangente compris entre les axes soit un minimum ?

Le point cherché est le même que celui de la question 36; ses coordonnées sont :

$$x = \sqrt{\frac{a^3}{a+b}}, \quad y = \sqrt{\frac{b^3}{a+b}},$$

et la longueur minimum de la tangente est égale au rayon $(a+b)$ du cercle Σ.

4. L'ordonnée du point M coupe l'ellipse ε de la question 78 en deux points S et S′ tels que :

$$MS = MS' = b.$$

5. On considère le cercle de centre M et de rayon MN et le cercle analogue correspondant à l'extrémité m du diamètre Om conjugué à OM :

1° Le cercle appartenant au même faisceau et passant par l'origine a son centre au milieu de Mm;

2° Le centre de ce cercle est sur l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2};$$

3° Ce cercle enveloppe une anallagmatique du 4^{me} ordre, la podaire du centre de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2;$$

4° L'origine a par rapport aux deux cercles M et m des puissances dont la somme est nulle.

6. Appelons Δ la droite qui joint les projections de N sur les axes de E, et Δ′ celle qui unit les projections de N′.

Δ coupe les axes en α et α'.

Δ′ coupe les axes en β et β'.

Les droites $\alpha'\beta$ et $\alpha\beta'$ se coupent au point de Frégier de M; x' et y' étant les coordonnées de M, on aura pour les coordonnées de ce point :

$$x = \frac{c^2}{a^2+b^2}x', \quad y = -\frac{c^2}{a^2+b^2}y'.$$

Le lieu de ce point est l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{c^2}{a^2+b^2}\right)^2,$$

qui est quadruplement tangente à la développée de E; les tangentes aux points de contact inclinées de 45° sur les axes sont circonscrites au cercle concentrique à E et de rayon

$$\frac{a^2-b^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}.$$

Cette ellipse peut être aussi considérée comme étant le lieu des points milieux des segments des normales de E compris entre les axes.

7. Si d'un point du cercle Σ (ou Σ′) on mène des tangentes à l'ellipse E, les normales à cette courbe aux deux points de contact se croisent sur Σ′ (ou Σ).

Si du même point on abaisse sur E les deux autres normales, la droite qui joint leurs pieds enveloppera l'hypocycloide

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=(a\pm b)^{\frac{2}{3}}.$$

Cette droite, d'après la proposition nouvelle 5 de M. Barisien, est donc l'axe d'une des paraboles W ou W′.

Le pôle de cette droite décrit la kreuzcurve

$$\frac{a^4}{x^2}+\frac{b^4}{y^2}=(a\pm b)^2.$$

*SUR LE MOINDRE MULTIPLE,

par M. STUYVAERT, professeur à l'Athénée de Gand.

L'étroite corrélation qui existe entre la théorie du plus grand commun diviseur et celle du moindre multiple, dans l'arithmétique élémentaire, fera toujours préférer les méthodes d'exposition qui permettent de traiter ces chapitres successivement ou même simultanément.

Dans la plupart des traités, la théorie du moindre multiple (calculé en fonction du p. g. c. d.) repose sur la décomposition des nombres en facteurs premiers, ou bien sur le théorème : *Tout nombre qui divise un produit de deux facteurs et qui est premier avec l'un d'eux, divise l'autre.*

Comme, d'ailleurs, ce théorème conduit naturellement à diverses propriétés des nombres premiers, l'étude de ceux-ci se trouve intercalée entre le chapitre du p. g. c. d. et celui du moindre multiple, et ces chapitres sont ainsi éloignés l'un de l'autre, au détriment de la logique.

Il ne doit certainement pas manquer de méthodes pour remédier à cet inconvénient. Voici, entre autres, une suite de propositions que l'on établit aisément.

1° Théorie du p. g. c. d. de deux et de plusieurs nombres, avec les propriétés habituelles, notamment : *les quotients obtenus en divisant deux nombres par leur p. g. c. d. sont premiers entre eux.*

2° *Tout multiple commun M de deux ou de plusieurs nombres est divisible par leur moindre multiple m.*

Car si $M = mq + r$, chacun des nombres proposés devra diviser r qui est inférieur à m.

3° *Un multiple commun de deux ou de plusieurs nombres sera leur moindre multiple si les quotients obtenus en le divisant par les nombres proposés sont premiers entre eux.*

Car si

$$Q = \frac{M}{A}, \quad Q' = \frac{M}{B}, \quad Q'' = \frac{M}{C} \ldots,$$

sont premiers entre eux et si M n'est pas le moindre multiple, le moindre multiple sera, d'après le théorème précédent, un diviseur de M, par exemple $\frac{M}{a}$.

On voit qu'alors Q, Q', Q'' ont un diviseur commun a, ce qui est contraire à l'hypothèse.

4° *Le moindre multiple de deux nombres est égal à leur produit divisé par leur p. g. c. d.*

Car si D = p. g. c. d. (A, B) et si A = DQ, B = DQ', DQQ' est un multiple commun de A et de B et les quotients obtenus en divisant DQQ' respectivement par A et B, sont Q' et Q premiers entre eux. D'ailleurs $DQQ' = \frac{AB}{D}$.

Remarques. On voit sans peine que l'on peut, dans ces démonstrations, éviter la notation des fractions, celle-ci pouvant être regardée comme une pétition de principes.

Pour des commençants il est moins nécessaire de rapprocher les deux théories du p. g. c. d. et du moindre multiple, car l'analogie même de ces théories peut être une cause de confusion.

Si l'on a suivi l'ordre ci-dessus indiqué, on peut, dans la suite, modifier utilement certaines démonstrations. On aura successivement :

Si deux nombres sont premiers entre eux, leur moindre multiple est leur produit. Donc, *tout nombre divisible par deux autres premiers entre eux, est divisible par leur produit.*

Tout nombre A qui divise un produit BC et qui est premier avec B, divise C. Car BC étant divisible par A et B premiers entre eux, est divisible par AB, donc A divise C.

On aura déjà remarqué, lors de la définition de deux nombres premiers entre eux, que *tout nombre A qui est premier avec B est premier avec les diviseurs de B* (réduction à l'absurde).

Tout nombre A premier avec les facteurs B, C, ... d'un produit est premier avec ce produit. Car tout diviseur de A est premier avec B et ne peut diviser BC que s'il divise C, ce qui est impossible. L'extension à plusieurs facteurs est facile.

Le moindre multiple de A, B, C, ... s'obtient en cherchant le moindre multiple de A et B, puis le moindre multiple du résultat trouvé et de C, et ainsi de suite. Démonstration habituelle.

Si plusieurs nombres A, B, C, ... sont premiers entre eux deux à deux, leur moindre multiple est égal à leur produit. Car le moindre multiple de A et B est AB, qui est premier avec C, etc.

Donc, *tout nombre divisible par plusieurs autres premiers entre eux deux à deux est divisible par leur produit, qui est leur moindre multiple.*

Gand, 6 novembre 1895.

×NOTES EXTRAITES DE LA CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE.

(*Suite*; voir (2), V, pages 138, 195; VI, pp. 18, 42, 112).

12. *Sur un problème classique.* Catalan, dans ses *Théorèmes et Problèmes* (6e éd., p. 190), traite le problème suivant : *Par un point* O, *situé dans l'angle* CAB, *mener une transversale* MN *qui forme avec cet angle un triangle* MAN *d'aire donnée* m^2. Il ramène le cas général, par deux transformations successives, à celui où l'angle CAB est droit et le point O situé sur la bissectrice.

Verhulst (C. G. Q., III, p. 269) indique une solution plus facile, qu'il croit avoir déjà rencontrée, mais sans se rappeler la source. Si la parallèle à AB par O rencontre AC en I, on construit le parallélogramme AIPQ ayant l'aire donnée m^2 et dont les côtés AI, AQ sont dirigés suivant AC, AB. Soit S le point de rencontre de MN avec PQ; en ôtant la partie commune au triangle AMN et au parallélogramme ALPQ, on trouve

$$\text{triangle OPS} = \text{OIM} + \text{NQS}, \qquad (1)$$

aussi bien lorsque S est entre O et N que lorsqu'il est en dehors de ON.

Les trois triangles étant semblables, l'égalité (1) donne

$$\overline{\text{OP}}^2 = \overline{\text{OI}}^2 + \overline{\text{NQ}}^2 ;$$

elle détermine la distance NQ, que l'on portera sur AB, dans les deux sens, à partir de N.

Il est facile d'adapter la solution au cas où O est extérieur à l'angle CAB.

Bobillier (C. G. Q., IV, p. 2) fait connaître une solution fondée sur la théorie des coniques. Toutes les sécantes qui retranchent de l'angle CAB l'aire m^2 enveloppent une hyperbole ayant pour asymptotes AC et AB. La tangente au sommet de la courbe s'obtient en prenant sur AC, AB deux longueurs égales OM′ et ON′, telles que le triangle isoscèle OM′N′ ait l'aire m^2. Le milieu D de M′N′ est le sommet de l'hyperbole, et en prenant sur la droite AD la longueur AF = AM′, on obtient le foyer F. Le lieu des projections des foyers sur les tangentes d'une conique étant le cercle principal, un point de la sécante cherchée MN

est à l'intersection de la circonférence décrite sur OE comme diamètre, avec la circonférence de centre A et de rayon AD.

Bobillier s'occupe aussi du problème analogue dans l'espace : Par une droite donnée, mener un plan qui retranche d'un cône du second ordre un volume donné. Pour le résoudre, il démontre que *tout plan tangent à un hyperboloïde retranche du cône asymptote un même volume.*

15. *Problème d'Algèbre.* (C. G. Q, III, pp. 124 et 136). Voici l'énoncé de ce problème, avec une légère généralisation :

Partager les nombres donnés $a_1, a_2, \ldots a_n$ *en deux parties telles, que r soit le rapport constant de la première partie de chaque nombre à la deuxième du nombre immédiatement suivant, et aussi le rapport de la première partie du dernier* a_n *à la deuxième du premier.*

Nous allons en donner une solution plus simple que les solutions de Nerenburger et de Pagani publiées dans la C. G. Q.

Appelons $x_1, x_2, \cdots, x_n$ les premières parties des nombres donnés; nous aurons les n équations

$$\begin{aligned} x_1 &= r(a_2 - x_2), \\ x_2 &= r(a_3 - x_3), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} &= r(a_n - x_n), \\ x_n &= r(a_1 - x_1). \end{aligned}$$

Pour éliminer $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$, ajoutons, membre à membre, les équations précédentes après les avoir multipliées respectivement par $-r, r^2, -r^3, \ldots, (-r)^{n-1}, 1$; nous aurons

$$x_n = \frac{ra_1 - r^2a_2 + r^3a_3 \cdots + (-1)^{n-1}r^n a_n}{1 + (-1)^{n-1}r^n}. \qquad (1)$$

Comme le système d'équations ne change pas quand on ajoute à tous les indices p unités, pourvu que les indices supérieurs à n soient remplacés par le reste de leur division par n, on conclut que le même changement des indices s'applique à la formule (1).

BIBLIOGRAPHIE.

Exercices de Géométrie, comprenant l'exposé des Méthodes géométriques et 2000 questions résolues, par F. J. 3me édition. Tours et Paris, Mame et Poussielgue, 1896. Un vol. in-8° de XIX, 1136 pages. Prix : 12 fr.

Nous possédons actuellement plusieurs excellents recueils d'exercices de géométrie (avec les solutions) : *Théorèmes et Problèmes* par E. Catalan ; *Questions de Géométrie*, par Desboves ; *A Sequel to Euclid*, par Casey ; *Notions sur la résolution des problèmes de construction*, par P. Brasseur ; *Synthetische Beweise planimetrischer Sätze*, par Fuhrmann ; *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes*, par Petersen (traduction française par M. Chemin), etc. (*)

Les *Exercices de Géométrie*, par F. J., nous paraissent réaliser l'idéal de ce genre d'ouvrages. La première édition a paru en 1883 ; elle a été très favorablement appréciée dans les N. A. M. par M. H. Faure. L'auteur, dans les éditions suivantes, a amélioré et complété son livre. La presse mathématique est unanime à proclamer les précieux services que cette publication rend aux professeurs et aux élèves (Voir, par exemple, les N. A. M., 1896, p. 246 ; J. M. E., 1896, p. 138).

L'ouvrage est divisé en trois parties : *Méthodes* (p. 1-200), *Exercices* (201-997), *Géométrie du triangle* (998-1116). Il est précédé d'un historique (p. VII-XIII) et terminé par des tables de référence (p. 1117-1135) : Lexique géométrique, Problèmes et Théorèmes historiques, Table des notes principales, Index bibliographique, Index biographique.

Les *Méthodes* comprennent sept chapitres : I. Méthodes générales (Analyse et synthèse, réduction à l'absurde). II. Lieux géométriques (Recherche et emploi des lieux géométriques et des enveloppes). III. Emploi des figures auxilaires (Constructions auxiliaires, figures symétriques, composition ou décomposition, surfaces ou volumes auxiliaires, projections ou sections). IV. Transformation des figures (Déplacement parallèle, modification des ordonnées, similitude, méthode du problème contraire, inversion) V. Discussion et extension (Discussion d'un problème, manières diverses d'envisager un problème, méthode par extension, déductions successives). VI. Méthode algébrique (Construction des formules, relations et lieux à utiliser, problèmes sur la tangente, nombre de solutions d'un problème, relations numériques, problèmes d'Apollonius). VII. Maxima et minima (Solution limite, emploi des principes, variable regardée comme constante, emploi de la tangente, volume maximum et minimum). Les théorèmes ou problèmes servant à élucider les méthodes sont très bien choisis et présentent un grand intérêt.

Les *Exercices*, au nombre de 970, sont groupés d'après les huit livres de géomé-

(*) Pour compléter cette liste en ce qui concerne la Belgique, nous ajoutons que la *Géométrie de Legendre-*[illegible] propose un grand nombre d'exercices, dont les solutions ont été publiées par M. Schmitz ; que la dernière édition des Exercices de Géométrie par [illegible] est restée inachevée ; qu'on doit à M. [illegible] des Exercices avec solutions.

La *Géométrie* de Combette contient beaucoup d'exercices résolus. On peut considérer comme recueils d'exercices résolus sur certaines parties les *Lieux géométriques en géométrie élémentaire*, par Sauvage ; *Companion to the Weekly Problem Papers*, par Milne ; *A Treatise on the Geometry of the Circle*, par M'Clelland ; *An Elementary Treatise on Modern Pure Geometry*, par Lachlan.

trie auxquels ils se rapportent, le 7me livre comprenant à peu près les matières des 7me et 8me livres de Legendre et le 8me traitant des courbes usuelles (Coniques et hélice). A la fin de cette partie on rencontre quelques problèmes numériques.

Nous avons lu avec un intérêt particulier la *Géométrie du triangle*. L'auteur expose sous une forme parfaitement appropriée les éléments d'un chapitre de la géométrie qui date à peine d'une quinzaine d'années et qui tend à prendre une place définitive dans la science et dans l'enseignement : Coordonnées trilinéaires ou angulaires, antiparallèles, inversion isogonale, symédianes, points ou cercles de Lemoine, Brocard, Taylor, Tücker, droites isoclines, système de deux ou trois figures semblables. *Mathesis* est souvent mentionnée dans cette partie.

De nombreuses notes bibliographiques ou biographiques accompagnent les propositions principales. (J. N.)

Proceedings of the Edinburgh Society. Edimbourg, Williams et Norgate.

Nous avons devant nous les tomes I, IX—XIII de ces mémoires. Ils renferment un grand nombre de notes se rapportant à la géométrie récente, dues à MM. Mackay, Tücker, Davis, Pressland, Gibson, Anderson. Nous signalons particulièrement les monographies très complètes et bien *documentées* que M. Mackay a publiées sur le triangle ; elles résument dans un ordre méthodique les travaux antérieurs et contiennent aussi des recherches personnelles ; les relations métriques y occupent une place importante.

De la note : *Properties connected with the angular bisectors of a triangle*, by Mackay (vol. XIII, 1894-95), nous extrayons les propositions suivantes, peu connues : *Soient* : B_1, C_1 *les projections des sommets* B, C *d'un triangle* ABC *sur la bissectrice intérieure* AI_1 ; B_2, C_2 *leurs projections sur la bissectrice extérieure* I_2AI_3 ; D, D_1, D_2, D_3 *les points de contact de* BC *avec les cercles inscrit et exinscrits* ; U, U' *les points où les bissectrices* AI, AI_2 *rencontrent la circonférence* ABC ; M_a, H_a *le milieu de* BC *et le pied de la hauteur issue de* A. *Cela posé :* 1° *Les triangles* $H_aB_1C_1$, $H_aB_2C_2$ *ont leurs côtés perpendiculaires et sont inversement semblables à* ABC ; *leur somme est égale à* ABC. 2° *Les circonférences ayant pour diamètre* DD_1 *ou* D_2D_3 *passent respectivement par* B_1, C_1 *ou par* B_2, C_2. 3° *Les cercles circonscrits aux triangles* $H_aB_1C_1$, $H_aB_2C_2$ *passent par* M_1 *et leurs diamètres sont égaux à* AU', AU. 4° *Les droites* UD, UD_1, $U'D_2$, $U'D_3$ *rencontrent la hauteur* AH_a *en des points* X, X_1, X_2, X_3 *tels, que les lignes* IX, I_1X_1, I_2X_2, I_3X_3 *sont parallèles à* BC.

Ces propriétés se rencontrent sous une autre forme dans la théorie des cercles de Fuhrmann (*Mathesis*, X, p. 105). Remarquons encore celle-ci : *La perpendiculaire élevée en* M_a *sur* BC *rencontre les lignes* AD, AD_1, AD_2, AD_3 *en des points* V, V_1, V_2, V_3 *tels, que* $M_aV = r_1$, $M_aV_1 = r$, $M_aV_2 = r_3$, $M_aV_3 = r_2$, *où* r, r_1, r_2, r_3 *sont les rayons des cercles* I, I_1, I_2, I_3.

La dernière monographie de M. Mackay est intitulée : *Symmedians of a triangle and their concomitant circles* (vol. XIV, 1895-96) ; elle comprend 67 pages et 40 figures. On y rencontre tous les développements connus sur les symédianes, le

point de Lemoine, les cercles de Lemoine, Tucker, Taylor et Adams. Le cercle d'Adams, peu connu, est concentrique avec le cercle inscrit I (ou exinscrit I_1, I_2, I_3) et rencontre les côtés BC, CA, AB en des points D_1, D_2, E_1 E_2, F_1, F_2 tels, que les droites D_2E_1, E_2F_1, F_2D_1 se coupent au point de Gergonne; ces droites, qui sont parallèles aux côtés du triangle DEF formé par les points de contact du cercle I avec BC, CA, AB, rencontrent EF, FD, DE en six points d'une autre circonférence (première circonférence de Lemoine du triangle DEF). (J. N.).

Elemente der höheren Mathematik. Vorlesungen zur Vorbereitung des Studiums der Differentialrechnung, Algebra und Functionenlehre von Dr. Otto Biermann, Professor an der technischen Hochschule in Brunn. Leipzig, Teubner, 1895 (Grand in 8° de XII-382 pages). Prix : 10 marcs.

Dans un discours remarquable prononcé le 2 novembre 1895 à la séance publique de la Société des Sciences de Gœttingue, M. F. Klein a nettement caractérisé les tendances modernes des méthodes en mathématiques au moyen des termes « Arithmetisirung der Mathematik ». Leibniz, Newton et leurs successeurs du 18me siècle faisaient intervenir partout le *principe de continuité* et employaient fréquemment des figures géométriques comme procédé de démonstration. Gauss et Cauchy, Abel et Dirichlet ont cherché à asseoir sur des bases plus solides les hardies conquêtes de leurs devanciers. C'est surtout Weierstrass qui a donné une grande impulsion aux méthodes modernes en cherchant à établir les vérités fondamentales de l'analyse par des considérations purement arithmétiques. Dans les parties supérieures de la science, Kronecker a été aussi un représentant éminent de la méthode arithméthique.

Les derniers manuels d'analyse infinitésimale présentent une physionomie bien différente de celle des ouvrages publiés au commencement de notre siècle. Aujourd'hui, on entre dans de grands développements sur la continuité des fonctions; on examine les conditions dans lesquelles une fonction est susceptible de différentiation ou d'intégration; les séries font l'objet d'une étude très détaillée. Pour se passer de considérations géométriques, on revient même longuement sur les incommensurables et sur les opérations relatives aux diverses espèces de quantités.

Ces tendances se manifestent surtout dans l'enseignement supérieur en Allemagne. Elles sont même poussées trop loin en ce qu'on écarte de parti pris l'intuition. Cependant, dans les cours élémentaires préparant à l'analyse supérieure on devrait s'inspirer de la marche que la Science elle-même a suivie dans ses développements successifs; de même, dans l'instruction donnée aux futurs naturalistes ou ingénieurs il importe que l'intuition ait le premier rôle.

Dans les gymnases allemands, au contraire, c'est la tendance opposée qui domine. On y accentue le rôle de l'intuition, on l'exagère même parfois au détriment du développement logique des mathématiques. Les deux courants se côtoient sans exercer aucune influence l'un sur l'autre. Le grand géomètre allemand

auquel nous empruntons les réflexions précédentes ne veut exclure ni l'intuition ni les méthodes abstraites. Il demande d'abord que l'enseignement soit adapté aux élèves auxquels il s'adresse; ensuite, que les vérités nées de l'intuition ne soient regardées comme définitivement acquises à la science que lorsqu'elles ont reçu une forme logique rigoureuse; que l'exposé abstrait de rapports logiques soit vivifié par l'application à des éléments concrets et soit toujours rapproché des autres branches de nos connaissances.

L'état de choses que nous venons d'exposer, explique et justifie la publication d'ouvrages dans le genre de celui que nous allons analyser rapidement. L'étudiant allemand qui passe du gymnase aux leçons sur les fonctions se trouve souvent embarrassé par des lacunes de son instruction; l'enseignement prend sans transition un caractère plus abstrait et fait appel à des connaissances nouvelles ou à des notions acquises antérieurement sous une forme bien différente et moins complète. M BIERMANN reprend et complète les matières de l'enseignement moyen, en les exposant en vue des parties transcendantes de la science.

Le chapitre I intitulé « *bases de l'arithmétique* » traite d'abord des opérations directes ou inverses sur les nombres entiers, fractionnaires, négatifs, irrationnels, en insistant sur la *permanence des règles d'opérations*; il passe ensuite aux puissances et aux logarithmes et se termine par les premières notions sur les séries et les produits infinis.

Dans le chapitre II, l'auteur établit, d'après WEIERSTRASS, la notion de la fonction d'une variable réelle, la proposition sur la limite supérieure ou inférieure d'un ensemble, les valeurs limites d'une fonction, la continuité; il traite aussi des formes indéterminées et des fonctions de plusieurs variables réelles.

Le chapitre III est intitulé « Arithmétique des grandeurs complexes ». Il s'occupe des opérations sur les quantités de la forme $\alpha + \beta i$, de leur représentation géométrique, de la formule de MOIVRE, des séries et produits infinis composés de quantités complexes, de la définition d'une fonction d'une variable complexe.

Le chapitre IV expose la théorie des équations algébriques, avec les développements qu'elle reçoit d'ordinaire dans nos écoles spéciales. Dans le chapitre suivant on rencontre les propositions principales sur la convergence d'une série à une variable réelle ou complexe, et sur les opérations auxquelles on peut soumettre les séries; on y trouve aussi une démonstration du théorème que toute équation algébrique a au moins une racine. Enfin le chapitre VI donne les principaux développements en série (e^x, $\sin x$, etc.) et revient sur la convergence des séries.

Le présent ouvrage a quelques parties communes (sous une forme améliorée) avec la « Théorie des fonctions algébriques » du même auteur.

Nous signalons ici à nos lecteurs un autre Traité qui poursuit un but analogue et qui a une grande vogue chez nos voisins d'outre-Rhin : les *Vorlesungen ueber allgemeine Arithmetik*, von Dr OTTO STOLZ.

En France, nous devons aux tendances arithmétiques de la science : l'*Introduction à la théorie des fonctions d'une variable* par JULES TANNERY, et l'*Introduction*

à la théorie des nombres et à l'algèbre supérieure par E. BOREL et J. DRACH, d'après les conférences de M. J. TANNERY. (J. N.).

Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale par M. D'OCAGNE, ingénieur des ponts et chaussées, professeur à l'École des ponts et chaussées, répétiteur à l'École polytechnique. — Grand in-8° de XI-428 pages, avec 349 figures. (*Encyclopédie des Travaux publics*, fondée par M.-C. Lechalas, inspecteur général des ponts et chaussées); Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1896. Prix : 12 fr.

« Cet Ouvrage, développement du Cours que l'auteur professe aux élèves de l'année préparatoire de l'École des ponts et chaussées, comprend tous les compléments de géométrie descriptive et toutes les notions de géométrie infinitésimale qui peuvent être utiles à des ingénieurs.

Ces deux branches de connaissances donnent lieu, dans l'Ouvrage, à deux Parties tout à fait distinctes.

La première comprend les *Projections cotées*, la *Perspective axonométrique*, les *Ombres usuelles* et la *Perspective*.

La perspective axonométrique est envisagée ici à un point de vue nouveau, comme mode de représentation plane des figures de l'espace. L'auteur en a fait une théorie complète n'empruntant rien au trait de perspective ordinaire et trouvant, dans le Chapitre suivant, de curieuses applications au tracé des ombres projetées sur des plans.

La seconde Partie présente un exposé à la fois élémentaire et méthodique de la Géométrie infinitésimale des *Courbes planes*, des *Courbes gauches* et des *Surfaces*, dans lequel, outre une coordination rationnelle des matières, l'auteur a apporté une large part de contribution personnelle.

On y remarque un soin constant de la rigueur qui se traduit par l'évaluation précise de l'ordre des infiniment petits négligés dans les formules infinitésimales et par la préoccupation du signe des éléments intervenant dans chaque question, indépendamment de toute considération d'axes de coordonnées. L'utilité de la notion du signe s'affirme en particulier dans la théorie géométrique des surfaces gauches à laquelle l'auteur a ainsi donné une grande rigueur.

Parmi les parties les plus originales du livre, on peut signaler une foule de résultats curieux sur les déterminations des normales et des centres de courbure de courbes planes liées de diverses façons à des courbes données, une démonstration tout élémentaire du théorème de Malus, une détermination nouvelle du rayon de courbure du contour apparent d'une surface projetée orthogonalement sur un plan, une étude très complète de la courbure des hélicoïdes gauches les plus généraux, etc.

A ce point de vue, l'ouvrage n'est pas susceptible d'intéresser les seuls élèves ingénieurs, mais tous les étudiants en Mathématiques, curieux des choses de la géométrie. »

SOMMAIRE. I. *Géométrie descriptive*. 1. *Projections cotées*. Point, droite, plan;

corps ronds; surfaces topographiques. 2. *Perspective axonométrique.* 1° plane; construction des coniques. 2° de l'espace : droite, plan, solides. Identité des perspectives axonométriques et des projections obliques; application à l'architecture. 3. *Théorie des ombres usuelles.* 1° Généralités. 2° Ombres propres. 3° Ombres portées sur des plans. 4° ou d'autres surfaces. 4. *Perspective linéaire.* 1° Généralités. 2° Perspective du géométral; tracé d'une droite joignant un point au point de rencontre inaccessible de deux droites données. 3° Perspective de l'espace.

II. *Géométrie infinitésimale.* Préambule : rappel de définitions et de principes. [Le principe général du n° 218, p. 250 et l'application à la différentielle comportent bien des exceptions si on les prend à la lettre]. 5. *Courbes planes.* Principes généraux. Applications : normales; enveloppes de droite; centre de courbure; cinématique. [Les enveloppes ne sont pas toujours tangentes aux enveloppées, comme le dit l'auteur p. 256, n° 251; mais l'exception ne se rencontre pas dans le cas où les enveloppées sont des droites. — Le point limite d'intersection de deux enveloppées peut s'appeler *point caractéristique*, comme cela a été proposé depuis longtemps dans *Mathesis*]. 6. *Courbes gauches.* Principes généraux; application à l'hélice 7. *Surfaces en général.* Plan tangent et normale. [La démonstration géométrique de l'existence du plan tangent, dont il est parlé en note du n° 290, p. 313, n'est pas rigoureuse; il n'existe jusqu'à présent aucune bonne démonstration de ce genre]. Courbure. Lignes tracées sur une surface. [Ce chapitre est très complet; mais nous doutons fort que la géométrie pure puisse donner, comme l'analyse, les conditions suffisantes pour l'existence de maint théorème établi ici géométriquement]. 8. *Surfaces de nature spéciale.* 1° Enveloppes de sphères. 2° Surfaces gauches (théorie générale; surfaces à cône directeur de révolution; hélicoïdes divers). 3° Surfaces développables (théorie générale; surfaces développables à cône directeur de révolution ou surfaces d'égale pente). (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 991.

(Voir *Mathesis* (2), IV, p. 264.)

Soient A, B, C, D ***quatre points d'une conique à centre, tels que les normales à la courbe en ces points soient concourantes. Par chacun des points*** A, B, C, D ***on mène deux droites de directions fixes mais également inclinées sur les axes, et on détermine par rapport à ces droites la conjuguée harmonique de la tangente au point considéré. Les droites ainsi obtenues concourent en un point*** P. ***Leurs symétriques par rapport aux ordonnées passent par un point*** P'. ***Si on change les directions considérées, la droite*** PP' ***pivote autour d'un point fixe.*** (C. Servais.)

Solution par M. Buisseret. Par le centre O de la conique donnée (C), je mène un diamètre *d* parallèle à la tangente en un point E de la

conique. Par un point fixe P du plan de (C,) je mène une parallèle au conjugué harmonique d' de d par rapport à deux droites fixes f et f' également inclinées sur les axes. Cette parallèle rencontre en K le rayon OE. Si le point E décrit la conique (C,) je dis que le point K décrit une conique (H).

En effet, les couples d et d', d et OE décrivent des involutions. Donc OE et PK décrivent deux faisceaux projectifs et le point K engendre une conique (H). Si le point E coïncide avec un sommet X de (C), les points correspondants de (H) se trouvent à l'infini dans la direction de OX. La conique (H) est donc une hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes de la conique (C), et elle rencontre (C) en quatre points A, B, C, D tels, que les normales en ces points sont concourantes.

Par A menons des parallèles aux droites f et f'. D'après la construction du point K, ces parallèles, la tangente en A, et la droite AP forment un faisceau harmonique; ce qui établit la 1ᵉ partie de la question.

Soit P′ le point diamétralement opposé à P sur la conique (H). Les droites AP et AP′ sont également inclinées sur les asymptotes, ou sur leurs parallèles, qui sont les axes de (C). AP′ est symétrique de AP par rapport à l'ordonnée issue de A; P′ est donc un point fixe. D'ailleurs l'hyperbole (H) est déterminée par les points A, B, C, D. Donc PP′ passe par un point fixe qui est le centre de la courbe (H).

Solution analytique par MM. Barisien, Déprez *et* Droz Farny. Soient (α, β) les coordonnées du point de concours M des normales en A, B, C, D et (x_1, y_1), ... celles des points A, B, C, D. Si m et $-m$ sont les coefficients angulaires des directions fixes, les coefficients m', m'' de deux directions conjuguées harmoniques par rapport aux précédentes sont liés par l'équation $m'm'' = m^2$; c'est ce qu'on voit facilement en coupant le faisceau

$$y = mx, \quad y = -mx, \quad y = m'x, \quad y = m''x$$

par une perpendiculaire à l'axe des x.

D'après cela, la conjuguée harmonique α de la tangente en A par rapport à des parallèles menées par A aux directions fixes a pour équation

$$y - y_1 = -\frac{a^2m^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1), \text{ ou } b^2x_1y + a^2m^2y_1x - x_1y_1(a^2m^2 + b^2) = 0.$$

On trouve, d'ailleurs, en exprimant que la normale en A passe par M :

$$\beta b^2 x_1 - \alpha a^2 y_1 + c^2 x_1 y_1 = 0. \qquad (1)$$

Si l'on écrit que les coefficients de x_1, y_1, x_1y_1 sont proportionnels dans ces deux équations, on obtient les coordonnées d'un point P par lequel passent la droite α et les analogues β, γ, δ menées par B, C, D :

$$\frac{y}{\beta} = -\frac{m^2 x}{\alpha} = -\frac{a^2m^2 + b^2}{c^2}, \text{ ou } x = \frac{\alpha(a^2m^2+b^2)}{c^2m^2}, \; y = -\frac{\beta(a^2m^2+b)}{c^2}. \qquad (2)$$

La symétrique α' de α par rapport à l'ordonnée de A a pour équation

$$y - y_1 = \frac{a^2m^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1), \text{ ou } b^2x_1y - a^2m^2y_1x + x_1y_1(a^2m^2 + b^2) = 0. \qquad (3)$$

En comparant (1) et (3) on conclut que α' et les droites analogues passent par un même point P' ayant pour coordonnées :

$$x = \frac{\alpha(a^2m^2 - b^2)}{c^2m^2}, \quad y = \frac{\beta(a^2m^2 - b^2)}{c^2}.$$

La droite PP' a donc pour équation

$$b^6c^2\alpha y + b^6a^2\alpha\beta + m^4(a^6c^2\beta\alpha - a^6b^2\alpha\beta) = 0;$$

quel que soit m, elle passe par le point ayant pour coordonnées

$$x = \frac{b^2\alpha}{c^2}, \; y = -\frac{a^2\beta}{c^2}.$$

×Question 997.

(Voir *Mathesis*, (2) IV, p. 280).

Soient A', B', C', D' *les projections d'un point* M *sur les côtés* AB, BC, CD, DA *d'un quadrilatère donné* ABCD.

1° *Si l'angle de deux côtés opposés du quadrangle* A'B'C'D' *est constant, le lieu de* M *est une circonférence.*

2° *Si le rapport des longueurs de deux côtés opposés est donné, le point* M *décrit encore une circonférence.*

3° *Trouver un point* M *tel que le quadrangle* A'B'C'D *soit un parallélogramme ou un pseudocarré.* (J. Neuberg).

Solution par MM. Colart (Huy), Déprez (Charleroi) et Klompers (Anvers). 1° Les bissectrices des angles ABC, ADC se rencontrent en un

point I, les perpendiculaires abaissées de B sur A'B' et de D sur C'D' se coupent en un point K. On sait que les droites BK, BM, sont symétriques par rapport à BI, que les droites DK, DM sont symétriques par rapport à DI. Si l'angle (A'B', C'D') est constant, il en est de même de l'angle BKD, et aussi de l'angle BMD. Donc le lieu de M est une circonférence passant par B et D. Cette conclusion a encore lieu lorsque A'B' et C'D' sont parallèles.

2° MB étant le diamètre du cercle circonscrit au triangle A'BB', on a MB = (A'B' : 2 sin B); de même MD = (C'D' : 2 sin D). Donc si le rapport A'B' : C'D' est constant, il en est de même du rapport MB : MD, et le lieu de M est une circonférence.

3° Si A'B'C'D' doit être un parallélogramme, le point M appartient à chacun des lieux géométriques qui correspondent à l'une des conditions : *a*) Les droites A'B', C'D' sont parallèles; *b*) les droites B'C', A'D' sont parallèles; *c*) A'B' = C'D'; *d*) B'C' = A'D'. Ces lieux, d'après ce qu'on vient de voir, sont des circonférences.

Si A'B'C'D' est un pseudocarré, les diagonales A'C', B'D' sont égales et rectangulaires. Soient E, F les points de concours de BC avec AD, et de AB avec CD. En raisonnant comme dans les deux premières parties de la question, on trouve que l'angle EMF et le rapport ME : MF sont des quantités connues, d'où deux circonférences qui déterminent le point M.

Question DLIII.

(Voir N. C. M., t. VI, p. 238.)

Déterminer une valeur de z, telle que, en y joignant les valeurs

$$v = 2(\alpha + \beta)(391\alpha^2 - 730\alpha\beta + 391\beta^2),$$
$$x = 2057\alpha^3 - 2541\alpha^2\beta + 2787\alpha\beta^2 - 391\beta^3,$$
$$y = 391\alpha^3 - 2787\alpha^2\beta + 2541\alpha\beta^2 - 2057\beta^3,$$

on satisfasse à l'équation

$$v^4 + x^4 + y^4 = 2z^2. \qquad \text{(S. Realis.)}$$

Solution par M. E. Fauquembergue. Proposons-nous de résoudre cette équation. Les nombres v, x, y, z peuvent être supposés premiers entre eux et dans ce cas, l'un des trois premiers doit être pair et les deux

autres doivent être impairs. Posons $v = 2u$, $x = \alpha - u$, $y = u - \beta$; l'équation devient

$$9u^4 - 2(\alpha+\beta)u^3 + 3(\alpha^2+\beta^2)u^2 - 2(\alpha^3+\beta^3)u + \frac{\alpha^4+\beta^4}{2} = z^2.$$

Le premier terme étant un carré parfait, la méthode de Fermat est applicable. Faisons donc

$$z = 3u^2 - \frac{\alpha+\beta}{3}u + m,$$

et développons le carré de z. Les termes en u^4 et en u^3 disparaissent d'eux-mêmes et pour faire disparaître les termes en u^2, il suffit de poser

$$6m + \left(\frac{\alpha+\beta}{3}\right)^2 = 3(\alpha^2+\beta^2),$$

d'où

$$m = \frac{13\alpha^2 - \alpha\beta + 13\beta^2}{27}.$$

Il reste alors une équation du premier degré en u, qui donne

$$u = \frac{391\alpha^4 + 52\alpha^3\beta - 678\alpha^2\beta^2 + 52\alpha\beta^3 + 391\beta^4}{144(\alpha+\beta)(17\alpha^2 - 20\alpha\beta + 17\beta^2)},$$

ou, après la suppression du facteur $\alpha+\beta$, commun aux deux termes de la fraction,

$$u = \frac{391\alpha^3 - 339\alpha^2\beta - 339\alpha\beta^2 + 391\beta^3}{144(17\alpha^2 - 20\alpha\beta + 17\beta^2)} = \frac{(\alpha+\beta)(391\alpha^2 - 730\alpha\beta + 391\beta^2)}{144(17\alpha^2 - 20\alpha\beta + 17\beta^2)}.$$

On trouve ensuite

$$x = \alpha - u = \frac{2057\alpha^3 - 2541\alpha^2\beta + 2787\alpha\beta^2 - 391\beta^3}{144(17\alpha^2 - 20\alpha\beta + 17\beta^2)},$$

$$y = u - \beta = \frac{391\alpha^3 - 2787\alpha^2\beta + 2541\alpha\beta^2 - 2057\beta^3}{144(17\alpha^2 - 20\alpha\beta + 17\beta^2)},$$

$$v = 2u = \frac{2(\alpha+\beta)(391\alpha^2 - 730\alpha\beta + 391\beta^2)}{144(17\alpha^2 - 20\alpha\beta + 17\beta^2)}.$$

En ne conservant que les numérateurs de v, x, y, pour avoir des solutions entières, on retrouve les formules de Realis.

Quant à la valeur de z, elle a pour expression $3u^2 - \frac{\alpha+\beta}{3}u + m$.

En remplaçant u et m par leurs valeurs, puis réduisant tout en expression fractionnaire, on trouve pour numérateur

$$z = 3(\alpha+\beta)^2(391\alpha^2 - 730\alpha\beta + 391\beta^2)(119\alpha^2 - 410\alpha\beta + 119\beta^2) + 768(13\alpha^2 - \alpha\beta + 14\beta^2)(17\alpha^2 - 20\alpha\beta + 17\beta^2)^2.$$

Exemple. Pour $\alpha = 1$, $\beta = 0$, on obtient par suppression du facteur commun 17^4 l'égalité

$$46^4 + 121^4 + 23^4 = 2 \times 10467^2.$$

Question DLIV.

(Voir N. C. M., t. VI, p. 238).

Une solution particulière de l'équation

$$v^4 + x^4 + y^4 = 2z^2$$

étant représentée par l'égalité

$$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = 2\delta^2,$$

démontrer que l'on a également une solution en posant

$$v = -14\alpha^3 - 8\alpha^2(\beta+\gamma) + \alpha(13\beta^2 - \beta\gamma + 13\gamma^2) - 18(\beta^3+\gamma^3) + 3\delta(7\alpha + 2\beta + 2\gamma),$$

$$x = 4\beta^3 - \beta^2(8\alpha+\gamma) + \beta(22\alpha^2 - 8\alpha\gamma + 13\gamma^2) - 9(2\alpha^3+\gamma^3) + 3\delta(8\alpha - 8\beta + \gamma),$$

$$y = 4\gamma^3 - \gamma^2(8\alpha+\beta) + \gamma(22\alpha^2 - 8\alpha\beta + 13\beta^2) - 9(2\alpha^3+\beta^3) + 3\delta(8\alpha + \beta - 8\gamma),$$

et compléter cette solution, en assignant l'expression de z en fonction de α, β, γ, δ. (S. Realis).

Solution par M. E. Fauquembergue. Soit $A^4 + B^4 + C^4 = 2D^2$ une seconde solution de l'équation, et posons

$$v = \alpha + Au, \quad x = \beta + Bu, \quad y = \gamma + Cu.$$

L'équation devient

$$\delta^2 + 2(A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3)u + 3(A^2\alpha^2 + B^2\beta^2 + C^2\gamma^2)u^2 + 2(A^3\alpha + B^3\beta + C^3\gamma)u^3 + D^2u^4 = z^2.$$

Égalons le premier membre au carré de $\delta - Ku + Du^2$; les premiers et les derniers termes disparaissent, et pour faire disparaître les termes en u^3, il suffit de prendre

$$K = -\frac{A^3\alpha + B^3\beta + C^3\gamma}{D}.$$

Il en résulte

$$u = \frac{2[K\delta + A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3]}{K^2 + 2D\delta - 3(A^2\alpha^2 + B^2\beta^2 + C^2\gamma^2)}.$$

Cette valeur de u substituée dans v, x, y donnerait des formules générales d'où l'on déduirait une solution de l'équation proposée au moyen de deux solutions connues de cette équation.

La solution évidente $A = 2$, $B = 1$, $C = 1$, $D = 3$ donne

$$K = -\frac{8\alpha + \beta + \gamma}{3}, \quad u = \frac{3[(8\alpha + \beta + \gamma)\delta - 3(2\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3)]}{22\alpha^2 - 8\alpha(\beta + \gamma) + 13\beta^2 - \beta\gamma + 13\gamma^2 - 27\delta}.$$

En substituant ces valeurs dans v, x, y et ne conservant que les numérateurs, on obtient les formules de Realis.

On a de plus

$$z = \delta - Ku + Du^2.$$

Posant, pour abréger,

$$M = 22\alpha^2 - 8\alpha(\beta + \gamma) + 13\beta^2 - \beta\gamma + 13\gamma^2 - 27\delta,$$
$$N = (8\alpha + \beta + \gamma)\delta - 3(2\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3),$$

on trouve

$$s = \delta M^2 + (8\alpha + \beta + \gamma)MN + 27N^2.$$

Exemple. Pour $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 0$, $\delta = 1$, on a, après la suppression des facteurs communs, l'égalité

$$10^4 + 1^4 + 3^4 = 2.71^2.$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

755. Soient, dans un triangle ABC, h_a, h_b, h_c les hauteurs; h'_a, h'_b, h'_c les segments AH, BH, CH (H = orthocentre); h''_a, h''_b, h''_c les segments HA′, HB′, HC′ des hauteurs compris entre H et les côtés. On a les relations :

$$(h_a + h_b + h_c)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) = (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right),$$

$$h_a + h_b + h_c = \frac{bc + ca + ab}{2R}, \quad h'^2_a h'^2_b h'^2_c = 8R^3 h''_a h''_b h''_c,$$

$$h'_a + h'_b + h'_c = 2(R + r), \quad a(h'_b + h'_c) + b(h'_c + h'_a) + c(h'_a + h'_b) = 4pR,$$

$$2h'_a R + h'_b h'_c = bc, \quad h'_a h'_b + h'_b h'_c + h'_c h'_a = (bc + ca + ab) - 4R(R + r),$$

$$h'_a\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + h'_b\left(\frac{a}{c} + \frac{a}{c}\right) + h'_c\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = 12R.$$

Ces égalités nous ont été communiquées par M. Delahaye (Roye); elles ne sont pas nouvelles, mais elles peuvent intéresser nos jeunes lecteurs.

Signalons encore les suivantes, communiquées par M. Couturier :

$$h'_a h'_b = 2Rh''_c, \quad h'_b h'_c = 2Rh''_a, \quad h'_c h'_a = 2Rh''_b.$$

756. Entre deux plans quelconques P, P′ on mène quatre droites AA′, BB′, CC′, DD′ parallèles à une même direction d. Démontrer que les tétraèdres D′ABC, DA′B′C′ sont équivalents.

On a

$$D'ABC = \tfrac{1}{3} ABC \cdot DD' \sin(d, P).$$

$$DA'B'C' = \tfrac{1}{3} A'B'C' \cdot D'D \sin(d, P').$$

Si un plan P″ perpendiculaire à d coupe AA′, BB′, CC′ en A″, B″, C″, on a

$$A''B''C'' = ABC \cos(P'', P) = A'B'C' \cos(P'', P'),$$

ou

$$A''B''C'' = ABC \sin(d, P) = A'B'C' \sin(d, P'), \text{ etc.}$$

757. Construire un trapèze, connaissant la hauteur, les longueurs des bases et l'angle des diagonales.

On mène par un sommet une parallèle à la diagonale non adjacente; elle forme avec la diagonale adjacente et la base opposée un triangle facile à construire.

758. En un point quelconque M d'une parabole on mène la normale qui rencontre la courbe en N et l'axe en K ; les tangentes en M et N se coupent en P. Démontrer que le lieu géométrique du milieu de PK est la tangente au sommet de la courbe. (E.-N. Barisien.)

759. Résoudre le système

$$x + y + axy = l, \quad y + z + ayz = m, \quad z + x + azx = n.$$

La première équation se ramène à

$$xy + \frac{x+y}{a} = \frac{l}{a}, \text{ ou } \left(x + \frac{1}{a}\right)\left(y + \frac{1}{a}\right) = \frac{la+1}{a^2}, \ \ldots.$$

760. Eliminer x et y entre les équations

$$x^3 + y^3 = a, \quad x^2 + y^2 = b, \quad x - y = c.$$

Réponse :

$$4a^2 = (2b - c^2)(b + c^2)^2.$$

761. Résoudre le système

$$x^2 - yz = a, \quad y^2 - zx = b, \quad z^2 - xy = c.$$

En ajoutant ces équations après les avoir multipliées une première fois par y, z, x, une seconde fois par z, x, y, on trouve

$$cx + ay + bz = 0, \quad bx + cy + az = 0.$$

Ces égalités donnent

$$\frac{x}{a^2-bc}=\frac{y}{b^2-ca}=\frac{z}{c^2-ab},$$

ou

$$x=\lambda(a^2-bc),\quad y=\lambda(b^2-ca),\quad z=\lambda(c^2-ab).$$

L'inconnue auxiliaire se détermine en portant ces valeurs dans la première des équations données; on trouve

$$\lambda^2[(a^2-bc)^2-(b^2-ca)(c^2-ab)]=a,\quad \text{ou}\quad \lambda^2(a^3+b^3+c^3-3abc)=1,$$

ou encore

$$\lambda^2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=1.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1080**. Décomposer en quatre facteurs rationnels le déterminant

$$H=\begin{vmatrix} 2 & c+\frac{1}{c} & b+\frac{1}{b} \\ c+\frac{1}{c} & 2 & a+\frac{1}{a} \\ b+\frac{1}{b} & a+\frac{1}{a} & 2 \end{vmatrix}.$$

(J. Neuberg.)

1081. Par le point de rebroussement d'une cardioïde on mène deux transversales rectangulaires, et l'on considère les paraboles qui touchent ces droites et ont leur foyer sur la courbe. Démontrer que l'enveloppe de ces paraboles est une hypocycloïde de Steiner. (Droz-Farny.)

1082. Par le sommet S d'une strophoïde droite, on mène deux sécantes rectangulaires, qui rencontrent la courbe en A, B, A′, B′. Démontrer que la circonférence circonscrite au quadrilatère ABA′B′ passe par deux points fixes. (E. N. Barisien.)

×**1083**. Pour que le système

$$x+y+z=0,\quad ax^2+by^2+cz^2=0,\quad ax^4+by^4+cz^4=0,$$

admette une solution autre que $x=y=z=0$, on doit avoir

$$(a+b)(b+c)(c+a)[(a+b)(b+c)(c+a)-8abc]=0. \quad \text{(J.N.)}$$

1084. Soient M et N les pôles tangentiel et normal de la corde PQ d'une ellipse donnée. On sait que le lieu des points M tels que le centre de gravité du triangle MPQ soit sur l'ellipse, est une autre ellipse.

Montrer, en outre que, si on désigne par E et D les aires de l'ellipse donnée et de sa développée ;

1° La courbe lieu du point N a pour aire 2D;

2° La courbe lieu du centre du cercle circonscrit au triangle MPQ a pour aire $E+\frac{D}{2}$;

3° La courbe lieu de l'orthocentre du triangle MPQ a pour aire $E+2D$;

4° Le lieu de l'orthocentre du triangle NPQ est l'ellipse donnée.

(E. N. Barisien.)

1085. Soient P_aBC, P_bCA, P_cAB trois triangles isoscèles semblables construits sur les côtés d'un triangle donné ABC. Les triangles homologiques ABC, $P_aP_bC_c$ sont polaires réciproques par rapport à une certaine conique Σ. Démontrer que lorsque l'angle P_aBC varie, la courbe Σ engendre un système homofocal. (J. Neuberg.)

1086. En un point M quelconque d'une ellipse de centre O, on mène la corde MN perpendiculaire à MO, et la corde MN′ supplémentaire de la corde MN.

1° Le lieu du pôle de la corde MN est une quartique dont l'aire est équivalente à celle de la podaire du centre de l'ellipse;

2° La droite MN′ est normale à une ellipse fixe. (E. N. Barisien.)

1087. On considère deux coniques K, K′ dont les axes sont dirigés suivant les mêmes droites Ox, Oy. D'un point quelconque M de K on mène les tangentes MN, MP à K′. Lieu du centre du cercle des neuf points du triangle MNP. Démontrer que, pour certaines relations entre les axes de K et K′, ce lieu coïncide avec l'axe Ox. (E.-N. Barisien).

1088. Un observateur (O) placé à peu de distance d'un abreuvoir rectiligne, horizontal, à profil rectangulaire, et plein d'eau, aperçoit l'arête intérieure (I) du fond, qui forme une ligne courbe. On propose de déterminer la nature de cette courbe, en se donnant la distance d de l'observateur à la paroi de l'abreuvoir contenant l'arête (I); la profondeur de l'eau, h; la hauteur de l'œil au-dessus de l'eau, δ; l'indice de réfraction de l'eau, n.

La question revient à chercher les rayons issus des points M de la droite (I) qui, après la réfraction, passent en un point donné (O).

H. Brocard.

CENTRE DE TRANSVERSALES ANGULAIRES ÉGALES;

par M. Georges Brocard, Professeur au Lycée du Havre.

Je me propose de chercher s'il existe dans le plan d'un triangle ABC un point F tel, que les droites AA', BB', CC' menées par F et rencontrant les côtés opposés en A', B', C' aient une même longueur l.

1. Posons

$$\frac{BA'}{A'C}=x, \quad \frac{CB'}{B'A}=y, \quad \frac{AC'}{C'B}=z.$$

Le triangle AA'B donne

$$l^2=c^2+\overline{BA'}^2-2c.\,BA'\cos B=c^2+\frac{a^2x^2}{(1+x)^2}-\frac{2cax}{1+x}\cos B,$$

égalité qui se transforme aisément en celle-ci :

$$(l^2-b^2)x^2+2(l^2-bc\cos A)x+l^2-c^2=0. \qquad (1)$$

Par analogie

$$(l^2-c^2)y^2+2(l^2-ca\cos B)y+l^2-a^2=0, \qquad (2)$$

$$(l^2-a^2)z^2+2(l^2-ab\cos C)z+l^2-b^2=0. \qquad (3)$$

En outre

$$xyz=1. \qquad (4)$$

Ces quatre équations déterminent les quatre inconnues x, y, z, l. En négligeant les solutions particulières évidentes et sans intérêt où l serait égale à un côté du triangle, nous pourrons représenter les équations (1), (2), (3) par

$$x^2-sx+p=0, \quad y^2-s'y+p'=0, \quad z^2-s''z+p''=0. \qquad (5)$$

Observons que $pp'p''=1$. Par conséquent, si le produit de trois racines x', y', z' des équations (5) est égal à 1, il en est de même du produit des trois autres racines x'', y'', z''. Donc, à une première solution AA', BB', CC' de trois transversales de longueur l et concourant en un même point F il correspond une seconde solution AA'', BB'', CC'' de trois transversales de longueur l et concourant en un second point F'.

2. Pour trouver l développons l'égalité

$$(x'+x'')(y'+y'')(z'+z'')=ss's''.$$

En tenant compte des relations

$$x'y'z'=1, \quad x''y''z''=1,$$

nous aurons successivement

$$ss's'' = 2 + \Sigma x'y'z'' + \Sigma x''y''z'$$

$$= 2 + \Sigma\frac{z''}{z'} + \Sigma\frac{z'}{z''} = 2 + \Sigma\frac{z'^2 + z''^2}{z'z''}$$

$$= 2 + \Sigma\frac{s''^2 - 2p''}{p''} = \Sigma\frac{s''^2}{p''} - 4,$$

ou enfin

$$\frac{s^2}{p} + \frac{s'^2}{p'} + \frac{s''^2}{p''} - ss's'' - 4 = 0. \qquad (6)$$

Si l'on remplace $s, p, \ldots$ par leurs valeurs et qu'on chasse les dénominateurs, l'équation (6) devient

$$\Sigma(l^2 - a^2)(l^2 - bc\cos A)^2 - (l^2 - a^2)(l^2 - b^2)(l^2 - c^2)$$
$$+ 2(l^2 - bc\cos A)(l^2 - ca\cos B)(l^2 - ab\cos C) = 0.$$

Le terme constant de cette équation est

$$-a^2b^2c^2(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 1 + 2\cos A\cos B\cos C) = 0;$$

donc, en écartant la solution $l^2 = 0$, on obtient une équation bicarrée. Le coefficient de l^4 de la nouvelle équation est 4; celui de l^2 est

$$-4\Sigma ab\cos C = -8S\Sigma\operatorname{cotg} A = -8S\operatorname{cotg}\omega,$$

ω désignant l'angle de Brocard de ABC; enfin, le terme indépendant a pour expression

$$-\Sigma b^2c^2\sin^2 A + 2abc\Sigma a(\cos A + \cos B\cos C)$$
$$= -12S^2 + 8RS\Sigma a\sin B\sin C = 12S^2.$$

L'équation qui fait connaître l est donc

$$l^4 - 2S\operatorname{cotg}\omega \cdot l^2 + 3S^2 = 0. \qquad (7)$$

8. Soient l_1^2, l_2^2 les deux valeurs de l^2, et h_a, h_b, h_c les hauteurs de ABC. Remplaçons l par $h_a = \frac{2S}{a}$; le premier membre de (7) devient

$$\frac{S^2}{a^4}(16S^2 - 8a^2S\operatorname{cotg}\omega + 3a^4)$$

$$= \frac{S^2}{a^4}[-\Sigma a^4 + 2\Sigma a^2b^2 - 2a^2\Sigma a^2 + 3a^4] = -\frac{S^2}{a^4}(b^2 - c^2)^2.$$

Donc, si le triangle ABC est scalène, les substitutions $l = h_a$, $l = h_b$, $l = h_c$ dans le premier membre de (7) donnent des résultats négatifs, et

comme les substitutions $l = 0$, $l = \infty$ donnent des résultats positifs, l'équation (7) a une racine l_1 plus grande que la plus grande hauteur et une racine l_2 plus petite que la plus petite hauteur. Par conséquent, les circonférences décrites des centres A, B, C avec le rayon l_1 coupent les côtés opposés en des points réels A', A'', B', B'', C', C'', tels que les droites AA', BB', CC' concourent en un point F et les droites AA'', BB'', CC'' en un point F'. Les circonférences décrites des mêmes centres avec le rayon l_2 rencontrent les côtés opposés en des points imaginaires.

Supposons ensuite le triangle ABC isoscèle. Si l'on a $b = c > a$, ou $h_b = h_c < h_a$, la plus grande racine $l_1 = h_a$; si $b = c < a$, la plus petite racine $l_2 = h_a$. Ces remarques vont nous être très utiles.

4. Les valeurs de l_1, l_2 ne dépendent que de S et ω.

Or, si l'on considère l'ellipse ε circonscrite à ABC et ayant pour centre le centre de gravité G de ce triangle, on sait qu'il existe une infinité de triangles T inscrits à ε et ayant G pour centre de gravité. Les triangles T ont même surface et même angle de Brocard; donc aussi les valeurs de l_1, l_2 sont constantes.

Soient A_1, A_1' les extrémités du grand axe, et A_2, A_2' celles du petit axe de ε. Parmi les triangles T se trouvent un triangle isoscèle $A_1B_1C_1$ dont la base B_1C_1 est perpendiculaire au milieu M_1 de GA_1', et un triangle isoscèle $A_2B_2C_2$ dont la base B_2C_2 est perpendiculaire au milieu M_2 de GB_2'. D'après les remarques qui terminent le paragraphe précédent,

$$l_1 = A_1M_1 = \tfrac{3}{2}\alpha, \quad l_2 = A_2M_2 = \tfrac{3}{2}\beta,$$

2α et 2β désignant les axes de ε.

5. Il y a plus : les points F, F' sont les mêmes pour tous les triangles T, ce sont les foyers de l'ellipse ε.

En effet, prenons pour axes coordonnés les axes principaux GA_1, GA_2 de ε, et soient x_1, y_1 les coordonnées d'un point *quelconque* A de cette courbe. Si D est le point diamétralement opposé à A, le milieu M de GD a pour coordonnées $-\frac{1}{2}x_1$, $-\frac{1}{2}y_1$, et la corde BC menée par M parallèlement à la tangente en A forme un triangle ABC dont G est le centre de gravité. L'équation de BC est

$$\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = -\frac{1}{2}.$$

Appelons F un foyer de ε, et A′ le point de rencontre de BC avec AF; posons aussi $AF = r$, $AA' = l$. Connaissant le rapport

$$\frac{A'A}{A'F} = \frac{l}{l-r},$$

on peut prendre pour coordonnées de A′

$$\frac{(l-r)x_1 - l\gamma}{-r}, \quad \frac{(l-r)y_1}{-r},$$

γ représentant la demi-excentricité $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$. En substituant ces valeurs dans l'équation de BC on trouve

$$\left(\frac{x_1^2}{\alpha^2}+\frac{y_1^2}{\beta^2}-\frac{\gamma x_1}{\alpha^2}\right) = r\left(\frac{1}{2}+\frac{x_1^2}{\alpha^2}+\frac{y_1^2}{\beta^2}\right);$$

et comme

$$\frac{x_1^2}{\alpha^2}+\frac{y_1^2}{\beta^2} = 1, \quad r = \alpha - \frac{\gamma x_1}{\alpha^2},$$

cette égalité donne $l = \frac{1}{2}\alpha$. La proposition est donc démontrée.

Les foyers imaginaires situés sur le petit axe sont les points où se croisent les transversales de longueur $l_2 = \frac{1}{2}\beta$.

6. Reprenons la solution $l = 0$, que nous avons écartée ci-dessus. Elle correspond aux droites isotropes menées par A, B, C; ces tranversales concourent trois à trois aux points cycliques. En faisant $l = 0$ dans les équations (1), (2), (3) et en résolvant on trouve

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{c}{b}(\cos A \pm i \sin A),\\ y &= -\frac{a}{c}(\cos B \pm i \sin B),\\ z &= -\frac{b}{a}(\cos C \pm i \sin C); \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

dans ces égalités on fera précéder i du même signe, car on trouve alors $xyz = 1$. On a ainsi les rapports suivant lesquels les droites isotropes menées par les sommets d'un triangle partagent les côtés opposés.

Lorque le triangle ABC est équilatéral, les valeurs (8) deviennent

$$x = y = z = j \text{ ou } j^2,$$

j et j^2 étant les racines cubiques imaginaires de l'unité. Si le triangle ABC est quelconque, ce sont les droites menées de A, B, C vers les

points à l'infini de l'ellipse circonscrite ε (considérée ci-dessus) qui partagent les côtés opposés dans un rapport égal à j ou à j^2. Cette proposition s'aperçoit immédiatement si l'on regarde ABC et ε comme les projections d'un triangle équilatéral et de la circonférence circonscrite.

NOTE SUR L'ARTICLE PRÉCÉDENT;

par M. J. Neuberg.

1. La propriété des foyers F, F′ de l'ellipse ε dont il a été question ci-dessus, peut être établie géométriquement. M. A. C., à qui nous l'avions signalée, nous en communique la démonstration suivante.

Soient f, f' les points de rencontre des rayons vecteurs AF, AF′ avec la parallèle menée par le centre G à la tangente en A (ou à BC). Comme ff' est perpendiculaire à la bissectrice intérieure de l'angle FAF′, on a $Af = Af'$, $Ff = F'f'$; la dernière égalité, bien connue, résulte du triangle AFF′ coupé par la transversale ff'. On en conclut

$$Af = Af' = \tfrac{1}{2}(AF + AF') = a.$$

Si maintenant on prolonge AF jusqu'au point A′ où elle coupe BC, et AG jusqu'au milieu M de BC, on a

$$\frac{AA'}{Af} = \frac{AM}{AG} = \frac{3}{2}.$$

2. Reprenons l'analyse de M. G. Brocard en modifiant légèrement les notations.

Nous désignons par X, Y, Z les coordonnées barycentriques du point cherché F dans le triangle ABC, de sorte que

$$x = \frac{BA'}{A'C} = \frac{Z}{Y}, \quad y = \frac{X}{Z}, \quad z = \frac{Y}{X}.$$

Les équations (1), (2), (3) prennent alors la forme

$$(l^2 - b^2)Z^2 + 2(l^2 - bc\cos A)ZY + (l^2 - c^2)Y^2 = 0, \qquad (1')$$

$$(l^2 - c^2)X^2 + 2(l^2 - ca\cos B)XZ + (l^2 - a^2)Z^2 = 0, \qquad (2')$$

$$(l^2 - a^2)Y^2 + 2(l^2 - ab\cos C)YX + (l^2 - b^2)X^2 = 0. \qquad (3')$$

Elles représentent respectivement les couples de tranversales AA′ et AA″, BB′ et BB″, CC′ et CC″, de même longueur l, menées par les sommets du triangle ABC et terminées aux côtés opposés. Si on les divise par $(l^2 - b^2)(l^2 - c^2)$, $(l^2 - c^2)(l^2 - a^2)$, $(l^2 - a^2)(l^2 - b^2)$, on voit immédiatement que les six points A′, A″, B′, B″, C′, C″ sont situés sur la conique

$$\Sigma \frac{X^2}{a^2 - l^2} + 2\Sigma \frac{l^2 - bc\cos A}{(l^2 - b^2)(l^2 - c^2)} YZ = 0.$$

Ainsi, *les circonférences décrites des sommets d'un triangle comme centres avec un même rayon quelconque rencontrent les côtés opposés en trois couples de points appartenant à une même conique.*

Cette proposition résulte immédiatement du théorème de Carnot, car

$$BA' \cdot BA'' = c^2 - l^2 = AB' \cdot AB'', \text{ etc.}$$

3. Soient : AL′, AL″ les conjuguées harmoniques de AA′, AA″ par rapport à l'angle BAC ; BM′, BM″ celles de BB′, BB″ par rapport à l'angle CBA ; CN′, CN″ celles de CC′, CC″ par rapport à l'angle ACB. Les équations des couples AL′ et AL″, BM′ et BM″, CN′ et CN″ se déduisent de (1′), (2′), (3′) par le changement du signe des coefficients des produits ZY, XZ, YX. On en conclut que les six points L′, L″, M′, M″, N′, N″, sont situés sur la conique

$$\Sigma \frac{X^2}{l^2 - a^2} - 2\Sigma \frac{l^2 \cdot bc\cos A}{(l^2 - b^2)(l^2 - c^2)} YZ = 0. \qquad (9)$$

Mais si les droites AA′, BB′, CC′ concourent en un point F, et les droites AA″, BB″, CC″ en un autre point F′, les points L, M, N sont situés sur la polaire trilinéaire de F, et les points L″, M″, N″, sur celle de F′. Par conséquent, le discriminant de la conique (9) doit être nul. L'équation ainsi obtenue, débarrassée des dénominateurs, prend la forme

$$\begin{vmatrix} l^2 - a^2 & -l^2 + ab\cos C & -l^2 + ac\cos B \\ -l^2 + ab\cos C & l^2 - b^2 & -l^2 + bc\cos A \\ -l^2 + ac\cos B & -l^2 + bc\cos A & l^2 - c^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

Plus généralement, pour que les six points A′, A″, B′, B″, C′, C″ où la conique

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$$

rencontrent les côtés du triangle de référence, soient situés sur deux

triples de droites concourantes (AA', BB', CC') et (AA'', BB'', CC''), on doit avoir

$$\begin{vmatrix} A & -B'' & -B' \\ -B'' & A' & -B \\ -B' & -B & A'' \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$AA'A'' - 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 = 0.$$

4. Il est facile de développer le déterminant (10) suivant les puissances de l^2. On trouve, après suppression de la solution $l^2 = 0$,

$$l^4 - 2S \operatorname{cotg} \omega \cdot l^2 + 3S^2 = 0,$$

d'où

$$\frac{l^2}{S} = \operatorname{cotg} \omega \pm \sqrt{\operatorname{cotg}^2 \omega - 3}.$$

Posons

$$\operatorname{cotg} \omega_1 = \operatorname{cotg} \omega + \sqrt{\operatorname{cotg}^2 \omega - 3}, \quad \operatorname{cotg} \omega_2 = \operatorname{cotg} \omega - \sqrt{\operatorname{cotg}^2 \omega - 3};$$

ω_1 et ω_2, qui sont les *angles de Steiner* de ABC(*), sont les moitiés des angles au sommet des triangles isoscèles équibrocardiens avec ABC.

Nous aurons

$$l_1^2 = S \operatorname{cotg} \omega_1, \quad l_2^2 = S \operatorname{cotg} \omega_2.$$

Pour diverses constructions de ces angles et des axes de ε nous renvoyons aux mémoires signalés ci-dessous.

Les foyers de l'ellipse inscrite à ABC et ayant pour centre le centre de gravité (*foyers de Steiner de* ABC) jouissent de propriétés intéressantes. De ces points on déduit aisément les points F, F' de M. G. Brocard.

5. Cherchons les coordonnées de F et F'. Les équations (2') et (3') donnent

$$\frac{Z}{X} = \frac{ac \cos B - l^2 + \mu}{l^2 - a^2}, \quad \frac{Y}{X} = \frac{ab \cos C - l^2 + \gamma}{l^2 - a^2},$$

où l'on a posé

$$\lambda = \pm \sqrt{l^2 a^2 - 4S^2}, \quad \mu = \pm \sqrt{l^2 b^2 - 4S^2}, \quad \nu = \pm \sqrt{l^2 c^2 - 4S^2}.$$

(*) Voir les articles : *Sur les axes de Steiner et l'hyperbole de Kiepert* et *Sur les foyers de Steiner*, par Neuberg et Gob (Association française pour l'avancement des sciences, Congrès de Paris, 1889).

On peut donc prendre pour les coordonnées de F :

$$l^2 - a^2, \quad ab\cos C - l^2 + \nu, \quad ac\cos B - l^2 + \mu,$$

et pour celles de F′ :

$$l^2 - a^2, \quad ab\cos C - l^2 - \nu, \quad ac\cos B - l^2 - \mu.$$

La discussion des signes qu'il faut attribuer à μ et ν présente des longueurs.

Voici une autre méthode.

Soient φ, φ' les points réciproques (conjugués isotomiques) de F, F′. Si, dans les équations (1′), (2′), (3′), on remplace X, Y, Z par $\frac{1}{X}, \frac{1}{Y}, \frac{1}{Z}$, on trouve les équations des couples de droites (Aφ, Aφ'), (Bφ, Bφ'), (Cφ, Cφ'); changeant ensuite les signes des termes du milieu, on obtient les équations des conjuguées harmoniques de ces droites par rapport aux angles BAC, CBA, ACB. Les points de rencontre de BC, CA, AB avec les dernières droites sont situés sur la conique

$$\Sigma(l^2 - a^2)X^2 - 2\Sigma(l^2 - bc\cos A)YZ = 0; \qquad (11)$$

mais ils sont aussi situés sur les polaires trilinéaires de φ, φ', polaires qui ont pour équations

$$uX + vY + wZ = 0, \quad u'X + v'Y + w'Z = 0, \qquad (12)$$

si (u, v, w), (u', v', w') sont les coordonnées de F, F′. Donc l'équation (11) doit se décomposer en deux autres, qu'il suffit d'identifier avec les équations (12). Autrement dit, si l'on considère les x, y, z comme des coordonnées tangentielles, l'équation (11) représente le couple FF′.

Pour opérer la décomposition, résolvons (11) par rapport à X; il vient

$$(l^2 - a^2)X = (l^2 - ab\cos C)Y + (l^2 - ac\cos B)Z$$
$$\pm\sqrt{\nu^2Y^2 + \mu^2Z^2 + 2\rho YZ},$$

μ et ν ayant la signification indiquée ci-dessus et ρ étant une quantité que nous n'avons pas besoin de spécifier.

Le trinôme sous le radical doit être un carré parfait; cette condition donne l'équation en l^2 (multipliée par le facteur étranger $l^2(l^2 - a^2)$). Par suite, les équations (12) sont

$$(l^2 - a^2)X + (ab\cos C - l^2 \pm \nu)Y + (ac\cos B - l^2 \pm \mu)Z = 0.$$

Les signes de μ et ν doivent être choisis de manière que leur produit t le signe de ρ(*).

6. L'équation en l est susceptible de cette autre forme que nous diquons sans démonstration :

$$\sqrt{l^2a^2 - 4S^2} + \sqrt{l^2b^2 - 4S^2} + \sqrt{l^2c^2 - 4S^2} = 0.$$

On en déduit

$$\operatorname{cotg} AA'B + \operatorname{cotg} BB'C + \operatorname{cotg} CC'A = 0, \qquad (13)$$

ar

$$2S = la \sin AA'B = lb \sin BB'C = lc \sin CC'A.$$

Soient AT, BT', CT'' les tangentes menées en A, B, C à l'ellipse ε et dirigées dans un même sens ; l'équation (13) peut encore être écrite ainsi :

$$\operatorname{cotg} FAT + \operatorname{cotg} FBT' + \operatorname{cotg} FCT'' = 0.$$

D'après un théorème connu, la relation (13) indique que les perpendiculaires élevées en A', B', C' sur les côtés correspondants concourent en un même point; il en est de même des perpendiculaires élevées en A'', B'', C''.

RÉPONSE AUX OBSERVATIONS DE M. MANSION

par M. Michel Frolov.

M. Mansion m'a fait l'honneur d'analyser, dans le numéro du mois de mai de *Mathesis*, pp. 109-112, mon Mémoire : « *Démonstration de l'axiome XI d'Euclide* (**). »

Je crois, de mon côté, nécessaire de répondre à quelques-unes de ses objections, les plus essentielles, uniquement dans l'intérêt de la science.

Pour combattre la démonstration de mon théorème fondamental C, M. Mansion a appliqué à un rhomboïde la construction que j'y avais employée, et s'appuyant sur ce fait bien connu, que toute droite, qui

---

(*) Comparer Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen ueber Geometrie*, t. I, p. 104.

(**) En vente à Paris, à la Librairie Centrale, 25, quai des Grands Augustins. — J'ai préféré dénommer « axiome » la célèbre proposition d'Euclide, au lieu de l'appeler « postulatum », adoptant ainsi l'opinion de Hoüel, qui fut le principal propagateur de la doctrine non-euclidienne en France, et parce qu'elle est plus connue sous ce nom en Russie, en Allemagne et en Angleterre. Du reste, la dénomination n'a aucune importance(*).

(*) Sur ce point, voir notre article, page 109, note (P. M.).

passe par le point de rencontre des diagonales d'un rhomboïde, le divise en deux quadrangles égaux, en coupant deux côtés opposés sous des angles égaux, de sorte que dans tout rhomboïde il existe une perpendiculaire à ces deux côtés opposés, il pense avoir réfuté la démonstration de mon théorème C. — Mais, à mon sens, il est seulement parvenu à prouver que dans tout rhomboïde les côtés opposés, ainsi que les angles opposés, sont égaux, ou, en d'autres termes, que tout rhomboïde est un rhomboïde, ce que je n'ai jamais nié, — et rien de plus.

J'ai appliqué la construction, dont il s'agit, non pas à un rhomboïde, ce qui ne m'aurait conduit à aucun résultat utile, mais à un espace TABS, formé par deux droites indéfinies AT et BS, dont la première est perpendiculaire et la seconde est oblique à une troisième droite AB (Fig. 3 de mon Mémoire), et j'ai démontré l'impossibilité d'intercaler (*) dans cet espace un seul rhomboïde ayant deux angles opposés droits, ce qui m'a donné le droit d'en conclure que dans les rhomboïdes ayant deux angles opposés droits les deux autres angles le sont aussi. Il me semble donc que l'objection du savant professeur n'a aucun rapport avec ma démonstration et ne peut l'infirmer en aucune manière.

En publiant mon Mémoire, je ne me suis adressé qu'à ceux qui ne sont pas imbus d'idées non euclidiennes(**), comme je l'ai dit dans ma préface. Mais j'ai eu l'honneur de recevoir de la part de quelques mathématiciens distingués des avis contenant aussi une objection appuyée sur l'hypothèse de l'existence d'une perpendiculaire commune aux droites AT et BS (Fig. 3). Il paraît que cette hypothèse, si peu conforme à l'essence de la ligne droite(***), constitue l'unique argument des non euclidiens, de sorte

(*) Nous ne pouvons que répéter ce que nous avons dit dans notre article : M. Frolov suppose que le point D est entre deux des points $A_1, A_2, \ldots A_n$ ou coïncidant avec l'un deux. Or il n'a pas prouvé (et il est impossible de le faire) que AA_n peut croître indéfiniment. Si AA_n a une limite finie AK, il suffit de prendre D au delà de K, de mener DC perpendiculaire à BS, pour former un rhomboïde ABCD où A et C sont droits, B et D aigus (P. M.).

(**) Les partisans de la géométrie non euclidienne admettent absolument les mêmes définitions, axiomes et postulats que leurs adversaires, le 5e postulat (ou 11e axiome) d'Euclide excepté. (P. M.).

(***) C'est la définition de la ligne droite (ligne déterminée par deux de ses points suffisamment rapprochés) qui en exprime l'essence. Or cette définition est compatible avec l'existence d'une perpendiculaire commune à AT et BS (P. M.).

que pour les désarmer complètement, il suffit de prouver la fausseté de cette hypothèse. Mais je ne m'en occuperai pas ici et je reviens aux autres objections de mon estimé critique.

M. Mansion fait entrevoir dans son exposé que j'aurais pu me dispenser de considérer le cas où l'angle ABS (Fig. 4) est obtus, en profitant des théorèmes de Legendre, que j'ai mentionnés à la page 7 de mon Mémoire.

Quoique cette opinion soit juste, je n'ai eu aucun besoin de recourir à ces théorèmes, en établissant la théorie des parallèles sur le théorème C. A la rigueur, j'aurais pu me passer même de ma note explicative (page 22), car la figure 4 n'est que la figure 3 retournée. En effet, s'il est prouvé, pour l'angle ABS aigu, que l'angle opposé de tous les quadrangles ayant deux angles opposés droits, inscrits dans l'espace TABS, est obtus, il en résulte que pour l'angle ABS obtus, son opposé est nécessairement aigu. Je ne m'y arrêterai pas davantage, non plus que sur la remarque de M. Mansion relative au corollaire I du théorème C. Pourtant je ne comprends pas ce qu'il y a de *captieux* dans la démonstration de ce corollaire, qui est très simple et découle naturellement de la démonstration du théorème C.

A la page 11, j'ai cité la définition de la ligne droite donnée par Riemann : « *La ligne droite est une ligne finie rentrant en elle-même,* » que j'ai tirée de la brochure de M. Mansion : « *Principes fondamentaux de la géométrie non-euclidienne de Riemann* » parue en 1895. Dans sa critique, le savant professeur annonce que Riemann n'a pas donné cette définition. J'aurais bien voulu que M. Mansion s'expliquât sur cette contradiction (*).

Je finirai cette réponse par l'observation suivante : tout le monde sait que Legendre s'était donné beaucoup de peine pour démontrer le théorème de l'égalité de la somme des angles d'un triangle rectiligne à deux droits et que ses efforts n'ont pas réussi. Il me semble que j'avais le droit d'attribuer ses insuccès à ce fait, qu'*au lieu d'appliquer ses efforts à prouver que les angles d'un carré sont effectivement droits, il s'était engagé dans des voies détournées* (Page 7). Comment, en effet, appeler ses essais de démon-

---

(*) La phrase soulignée n'est pas une *définition* de la droite, en général, mais une *remarque* de Riemann relative au concept de la droite ; ce concept n'implique pas qu'elle soit infinie et, par suite, elle peut être rentrante. (P. M.).

stration(*) fondés sur la considération des infinis ou sur des principes nouveaux étrangers à la géométrie pure, et comment expliquer autrement les insuccès de cet illustre géomètre? — Si mon savant critique, qui est en même temps un des plus ardents partisans de la doctrine non euclidienne, pense que cet insuccès était *inévitable* (car, selon lui, il est *prouvé* par deux mathématiciens éminents, *que le postulatum d'Euclide*, ou son axiome XI, *est indémontrable*), il m'est permis de ne pas partager cette opinion et d'en croire le grand Descartes, lorsqu'il disait, dans ses « *Principes de la philosophie* », que l'on pouvait aisément(**) démontrer que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits.

Champéry (Canton du Valais), le 6 août 1896.

NOTES MATHÉMATIQUES.

×●. *Fondation d'un prix en l'honneur de Lobatchefsky. Inauguration d'un Monument pour perpétuer sa mémoire.* A propos du Centenaire du jour de naissance de N. J. LOBATCHEFSKY, qui a eu lieu le 3 novembre 1893, la société Physico-Mathématique de Kasan a formé un comité de savants russes et étrangers ayant pour but de réunir une somme destinée à éterniser la mémoire du célèbre géomètre russe. Les efforts de ce Comité ont abouti à un résultat favorable : la somme de 9071 Rb. 86 cop (à peu près 24,200 fr.) a été réunie.

Défalcation faite des dépenses nécessaires, la somme restante a été répartie de la façon suivante :

Un capital de 6000 roubles constitue un fond spécial dont les revenus permettent d'attribuer tous les trois ans une somme de 500 roubles pour

---

(*) Sur les mérites de Legendre, voir notre notice intitulée : *La géométrie non euclidienne avant Lobatchefsky* (*Mathesis*, février 1896, supplément) (P. M.).

(**) Nous sommes tout à fait de l'avis de Descartes; il suffit, pour établir le théorème sur la somme des angles d'un triangle, d'admettre les mêmes prémisses que Descartes, c'est-à-dire, les définitions, les axiomes et les postulats d'Euclide; mais cela n'empêche pas que si l'on rejette le postulat 5 d'Euclide, il ne soit impossible de démontrer que la somme des trois angles d'un triangle est égale à deux droits, comme l'ont prouvé MM. Beltrami, De Tilly et après eux une foule d'autres. (P. M.).

récompenser un ouvrage relatif à la Géométrie et spécialement à la Géométrie non euclidienne et imprimé dans une des langues russe, française, allemande, anglaise, italienne ou latine.

Le premier prix sera décerné le 3 novembre 1897 et les ouvrages devront être envoyés au plus tard le 3 novembre 1896 (22 octobre) à la Société Physico-Mathématique de Kasan.

La somme restante est destinée à l'édification du buste de LOBATCHEFSKY sur une place de la ville de Kasan, vis-à-vis de l'Université, dont l'inauguration a eu lieu le dimanche 13 septembre 1896 (A. VASSILIEF, Professeur à l'Université, Président de la Société Physico-Mathématique de Kazan).

×10. *Sur le moindre multiple* (Voir *Mathesis*, (2) VI, p. 198). Nous avons omis de signaler, dans notre précédent article, le *Traité d'Arithmétique* de J. A. SERRET, dans lequel la méthode que nous avons indiquée est suivie, au moins en partie. (M. STUYVAERT.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 383.

(Voir *Mathesis*, (1) IV, p. 231, et (2) I, p. 29).

On partage une demi-circonférence en n parties égales, et l'on joint les points de division à l'une des extrémités du diamètre. Démontrer que la somme des produits p à p des carrés des cordes, ainsi obtenues, égale autant de fois la $2p^{me}$ puissance du rayon, qu'il y a de manières de combiner $2n - p - 1$ objets, p à p (*). (E. CESARO).

Solution par M. STUYVAERT (Gand). L'équation

$$x^{4n} - 1 = 0$$

a pour racines :

$$x = \cos\frac{2k\pi}{4n} \pm i \sin\frac{2k\pi}{4n} = \cos\frac{k\pi}{2n} \pm i \sin\frac{k\pi}{2n} (k = 0, 1, 2, 3 \cdots, 2n).$$

Supprimons les solutions correspondantes à $k = 0$ et $k = 2n$, c'est-à-dire $x = \pm 1$; ce qui revient à diviser le premier membre de l'équation par $x^2 - 1$. D'où

$$x^{4n-2} + x^{4n-4} + x^{4n-6} + \cdots + x^2 + 1 = 0.$$

(*) Voir *Question* 262, *proposée* (1) III, p. 160, *résolue* (1) IV, p. 41.

Transformons cette équation en posant

$$x+\frac{1}{x}=z.$$

La transformée est (*)

$$z^{2n-1}-C_{2n-2,1}\,z^{2n-3}+C_{2n-3,2}\,z^{2n-5}\ldots\pm C_{2n-p-1,p}\,z^{2n-2p-1}\ldots\pm z=0.$$

Elle a pour racines :

$$z=\cos\frac{k\pi}{2n}\pm i\sin\frac{k\pi}{2n}+\frac{1}{\cos\dfrac{k\pi}{2n}\pm i\sin\dfrac{k\pi}{2n}}$$

ou

$$z=\cos\frac{k\pi}{2n}\pm i\sin\frac{k\pi}{2n}+\cos\frac{k\pi}{2n}\mp i\sin\frac{k\pi}{2n}=2\cos\frac{k\pi}{2n}$$
$$(k=1,2,3\ldots,2n-1).$$

Supprimons la racine $z=0$, correspondant à $k=n$, en divisant par z. Il vient l'équation

$$z^{2n-2}-C_{2n-2,1}\,z^{2n-4}+C_{2n-3,2}\,z^{2n-6}-\ldots\pm C_{2n-p-1,p}\,z^{2n-2p-2}\mp\ldots\pm 1=0$$

qui a pour racines :

$$z=2\cos\frac{k\pi}{2n}(k=1,2,3\ldots n-1,\ n+1,\ldots 2n-1)$$

ou, puisque les cosinus de deux angles supplémentaires sont égaux et de signes contraires :

$$z=\pm\,2\cos\frac{k\pi}{2n}(k=1,2,3,\ldots,n-1).$$

La transformée en $y=z^2$, ou

$$y^{n-1}-C_{2n-2,1}\,y^{n-2}+C_{2n-3,2}\,y^{n-3}-\ldots\pm C_{2n-p-1,p}\,y^{n-p-1}\ldots\pm 1=0 \quad (1)$$

a pour racines :

$$y=4\cos^2\frac{k\pi}{2n}(k=1,2,3,\ldots,n-1).$$

D'après la théorie de la composition des équations, puisque le coefficient du premier terme est 1, et que les autres coefficients sont alternative-

---

(*) Voir *Question* 508, *proposée* (1) VI, p. 47, *résolue* (1) IX, p. 196.

nent négatifs et positifs, la somme des produits p à p des quantités $4\cos^2\frac{k\pi}{2n}$ est égale au coefficient de y^{n-p-1}, c'est-à-dire à $C_{2n-p-1,p}$, pris positivement.

Soit AB le diamètre, dont il est parlé dans l'énoncé; si l'arc MB vaut $\frac{k}{n}$ de la demi-circonférence, ou $\frac{k\pi}{n}$, l'angle MAB a pour mesure $\frac{k\pi}{2n}$ et la corde AM vaut $2R\cos\frac{k\pi}{2n}$.

La somme des produits p à p des carrés de ces cordes est égale à R^{2p} multiplié par la somme des produits p à p des quantités $4\cos^2\frac{k\pi}{2n}$ ($k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$), laquelle somme est égale, d'après ce qui précède, à $C_{2n-p-1,p}$. Le théorème est donc démontré.

Remarque. On peut former autrement l'équation qui a pour racines les valeurs de $4\cos^2\frac{k\pi}{2n}$; l'équation

$$\sin 2n\varphi = 0 \qquad \text{(II)}$$

a pour racines

$$2n\varphi = k\pi \quad \text{ou} \quad \varphi = \frac{k\pi}{2n}.$$

Mais, en développant $\sin 2n\varphi$ au moyen de la formule connue, on peut substituer, à l'équation (II), la suivante :

$$C_{2n,1}(\cos\varphi)^{2n-1}\sin\varphi - C_{2n,3}(\cos\varphi)^{2n-3}\sin^3\varphi + C_{2n,5}(\cos\varphi)^{2n-5}\sin^5\varphi + \cdots = 0.$$

Divisons par $\sin\varphi\cos\varphi$, ce qui revient à supprimer les racines correspondant à $k = n$ et $k = 2n$; posons ensuite $\cos^2\varphi = z$, d'où $\sin^2\varphi = 1 - z$; et l'équation transformée

$$C_{2n,1}z^{n-1} - C_{2n,3}z^{n-2}(1-z) + C_{2n,5}z^{n-3}(1-z)^2 - \cdots = 0$$

ou

$$C_{2n,1}z^{n-1} + C_{2n,3}z^{n-2}(z-1) + C_{2n,5}z^{n-3}(z-1)^2 + \cdots = 0.$$

a pour racines

$$z = \cos^2\frac{k\pi}{2n} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$$

Enfin en posant $z = \frac{y}{4}$, on trouve l'équation ayant pour racines

$$y = 4\cos^2\frac{k\pi}{2n}:$$

$$C_{2n,1}\,y^{n-1} + C_{2n,3}\,y^{n-2}(y-4) + C_{2n,5}\,y^{n-3}(y-4)^2 + \cdots = 0.$$

Le coefficient de y^{n-1} est

$$A = C_{2n,1} + C_{2n,3} + C_{2n,5} + \cdots.$$

Or, on sait que les coefficients de rangs impairs et ceux de rangs pairs, dans le developpement du binôme, ont des sommes égales ; donc A vaut la moitié de $(1+1)^{2n}$ ou $A = 2^{2n-1}$.

Quant au coefficient de y^{n-p-1}, il est égal (en valeur absolue) à

$$K = 4^p\,[C_{2n,2p+1} + C_{2n,2p+3}\cdot C_{p+1,1} + C_{2n,2p+5}\cdot C_{p+2,2} + \cdots + C_{2n,2n-1}\cdot C_{n-1,p}]$$

ou, en écrivant à rebours,

$$K = 4^p\,[C_{2n,1}\cdot C_{n-1,p} + C_{2n,3}\cdot C_{n-2,p} + \cdots + C_{2n,2p+3}\cdot C_{p+1,p} + C_{2n,2p+1}].$$

En vertu de la démonstration précédente, cette quantité doit être égale à

$$A \times C_{2n-p-1,p} = 2^{2n-1} \times C_{2n-p-1,p}.$$

De là une identité qu'il serait peut-être difficile d'établir directement.

Question 967.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, 215).

D'un point P *du plan d'une parabole donnée on abaisse les trois normales à la courbe dont les pieds sont* A, B, C. *Les tangentes en* A, B, C *forment un second triangle* A'B'C'. *On considère les cercles circonscrits aux triangles* ABC *et* A'B'C' *dont les rayons sont* R *et* R'. *Montrer que*

1° *Quel que soit le point* P, *le milieu de la ligne des centres des deux cercles est situé sur une droite perpendiculaire à l'axe de la parabole;*

2° *Le lieu des points* P *tels que* $R = R'$ *est une parabole*;

3° *Le lieu des points* P *tels que* $R' = 2R$ *se compose de deux droites*;

4° *Le lieu des points* P *tels que* $R^2 + R'^2 =$ *constante est une ellipse.*

(E. N. Barisien).

Solution par M. Cristesco. Soient $y^2 - 2px = 0$ l'équation de la parabole, (α, β) les coordonnées de P et (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées des points A, B, C. Comme y_1, y_2, y_3 sont les racines de

$$y^3 - 2p(\alpha - p)y - 2p^2\beta = 0, \tag{1}$$

on a

$$\left.\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= 0, \\ y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 &= -2p(\alpha - p), \\ y_1y_2y_3 &= 2p^2\beta. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Les coordonnées des points A', B', C' sont (M., (2) II, 29) :

$$X_1 = \frac{p\beta}{y_1}, \quad X_2 = \frac{p\beta}{y_2}, \quad X_3 = \frac{p\beta}{y_3},$$

$$Y_1 = -\frac{y_1}{2}, \quad Y_2 = -\frac{y_2}{2}, \quad Y_3 = -\frac{y_3}{2}.$$

L'équation du cercle circonscrit au triangle A'B'C' sera donc

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ \dfrac{p^2\beta^2}{y_1^2} + \dfrac{y_1^2}{4} & \dfrac{p\beta}{y_1} & -\dfrac{y_1}{2} & 1 \\ \dfrac{p^2\beta^2}{y_2^2} + \dfrac{y_2^2}{4} & \dfrac{p\beta}{y_2} & -\dfrac{y_2}{2} & 1 \\ \dfrac{p^2\beta^2}{y_3^2} + \dfrac{y_3^2}{4} & \dfrac{p\beta}{y_3} & -\dfrac{y_3}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on développe les déterminants mineurs correspondant aux éléments de la première ligne en tenant compte des égalités (2), on trouve après avoir divisé par $\frac{1}{4p}(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)$, que l'équation du cercle circonscrit au triangle A'B'C' est :

$$x^2 + y^2 + \tfrac{1}{2}(2\alpha - 3p)x + \beta y + \tfrac{1}{2}p(p - \alpha) = 0. \tag{4}$$

Comme vérification, ce cercle passe par le foyer.

On sait que l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC est (M., (2) II, 29-30)

$$x^2 + y^2 - (p + \alpha)x + \tfrac{1}{2}\beta y = 0. \tag{5}$$

Les coordonnées des centres et les rayons des cercles ABC, A'B'C' sont donc

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(p + \alpha), \quad \mu = \tfrac{1}{4}\beta, \quad R = \tfrac{1}{4}\sqrt{4(p + \alpha)^2 + \beta^2},$$

$$\lambda' = \tfrac{1}{4}(3p - 2\alpha), \quad \mu' = -\tfrac{1}{2}\beta, \quad R' = \tfrac{1}{4}\sqrt{(p - 2\alpha)^2 + 4\beta^2}.$$

1° Les coordonnées (x, y) du milieu de la ligne des centres de deux cercles sont :

$$x = \tfrac{1}{2}(\lambda + \lambda') = \tfrac{5}{8}p, \quad y = \tfrac{1}{2}(\mu + \mu') = -\tfrac{4}{8}\beta.$$

Il est donc toujours situé sur la droite $x - \frac{5}{8}p = 0$.

2° et 3°. Cherchons plus généralement le lieu des points P tels que

$$R' : R = m : n.$$

On aura

$$\sqrt{\frac{(p-2\alpha)^2 + 4\beta^2}{4(p+\alpha)^2 + \beta^2}} = \frac{m}{n},$$

ou

$$4\left(\frac{m^2}{n^2} - 1\right)\alpha^2 + \left(\frac{m^2}{n^2} - 4\right)\beta^2 + 4\left(2\frac{m^2}{n^2} + 1\right)p\alpha + \left(4\frac{m^2}{n^2} - 1\right)p^2 = 0.$$

Cette conique sera

une *ellipse* pour $\frac{m}{n} < 1$ ou $\frac{m}{n} > 2$;

une *hyperbole* pour $1 < \frac{m}{n} < 2$;

une *parabole* ($\beta^2 = 4p\alpha + p^2$) pour $\frac{m}{n} = 1$;

un système de *deux droites* ($\alpha^2 + 3p\alpha + \frac{5}{4}p^2 = 0$) pour $\frac{m}{n} = 2$: l'équation se décompose en $\alpha + \frac{p}{2} = 0$ (la directrice) et $\alpha + \frac{5p}{2} = 0$.

4° Cherchons le lieu des points P tels que

$$KR^2 + K'R'^2 = \left(\frac{1}{4}C\right)^2 = \text{constante}.$$

On trouve que ce lieu est la conique

$$4(K + K')\alpha^2 + (K + 4K')\beta^2 + 4(2K - K')p\alpha + (4K + K')p^2 - C^2 = 0.$$

Si K et K' sont positifs, le lieu est une ellipse.

Si $K = +1$, $K' = -1$, on trouve la parabole

$$\beta^2 = 4p\alpha + p^2 - \frac{C^2}{3}.$$

Solutions par MM. A. Dros Farny et Brocard. Soit $y^2 = 2px$ l'équa-

tion de la parabole. Représentons par $-b$ et $-c$ les ordonnées de B et C ; on aura :

$$\text{Coordonnées de B} \ldots y = -b, \quad x = \frac{b^2}{2p};$$

$$\text{» de C} \ldots y = -c, \quad x = \frac{c^2}{2p}.$$

On trouve aisément (voir Brocard, J. M. S. 1892, pp. 212-215 et N. A. M. 1892, pp. 4ˣ-10ˣ) les relations suivantes où O, O′ sont les centres des cercles ABC, A′B′C′ :

$$\text{P} \ldots x = p + \frac{b^2 + bc + c^2}{2p}, \qquad y = \frac{bc(b+c)}{2p^2};$$

$$\text{A} \ldots x = \frac{(b+c)^2}{2p}, \qquad y = b + c;$$

$$\text{O}' \ldots x = -\frac{b^2 + bc + c^2 - p^2}{4p}, \qquad y = -\frac{bc(b+c)}{4p^2};$$

$$\text{O} \ldots x = \frac{b^2 + bc + c^2 + 4p^2}{4p}, \qquad y = \frac{bc(b+c)}{8p^2}.$$

Soient α, β les coordonnées du point P ; on aura

$$\text{O}' \ldots x = \frac{3p - 2\alpha}{4}, \quad y = -\frac{\beta}{2};$$

$$\text{O} \ldots x = \frac{\alpha + p}{2}, \qquad y = \frac{\beta}{4}.$$

Les circonférences ABC et A′B′C′ passant respectivement par le sommet et le foyer, on trouve pour les rayons R, R_1 ;

$$R^2 = \frac{(\alpha + p)^2}{4} + \frac{\beta^2}{16}, \quad R_1^2 = \frac{\beta^2}{4} + \frac{(2\alpha - p)^2}{16}.$$

I. L'abscisse du point milieu de OO′ est :

$$\frac{3p - 2\alpha + 2\alpha + 2p}{8} = \frac{5p}{8}.$$

Le lieu cherché est donc une droite perpendiculaire à l'axe.

II. La relation $R^2 = R_1^2$ fournit

$$4(\alpha + p)^2 + \beta^2 = 4\beta^2 + (2\alpha - p)^2 \quad \text{ou} \quad \beta^2 = 4p\left(\alpha + \frac{p}{4}\right),$$

équation d'une parabole de même axe que la proposée.

III. De la relation $R_1^2 = 4R^2$, on déduit successivement

$$\frac{\beta^2}{4} + \frac{(2\alpha - p)^2}{16} = (\alpha + p)^2 + \frac{\beta^2}{4},$$

$$(2\alpha - p)^2 - 16(\alpha + p)^2 = 0, \quad (6\alpha + 3p)(2\alpha + 5p) = 0.$$

Le lieu se compose de deux droites perpendiculaires à l'axe.

IV. De la relation $R^2 + R_1^2 = \text{const.}$, on déduit :

$$4(\alpha + p)^2 + \beta^2 + 4\beta^2 + (2\alpha - p)^2 = \text{const.},$$

ou

$$8\alpha^2 + 5\beta^2 + 4\alpha p = \text{const.},$$

équation d'une ellipse dont le centre a pour coordonnées :

$$x = -\frac{p}{4}, \quad y = 0.$$

M. Barisien a démontré déjà, dans une autre publication mathématique plupart des propriétés énoncées ci-dessus et il en a indiqué un grand nom d'autres (J.M.S., 1893, 135-139, 146-150, 169-172, 193-198).

M. Gillet démontre la question 967 en empruntant à Casey, *Analytical Geo try*, p.p. 185 et 199 les équations des cercles ABC, A'B'C'.

Autre solution par M. J. Jonesco.

M. Déprez accompagne sa solution, qui se rapproche de celle de M. Cristo des remarques suivantes : 1° la ligne des centres OO' est divisée par l'axe d parabole dans le rapport 1 : 2. 2° Si la distance OO' a une valeur constante décrit l'ellipse

$$(4x - p)^2 + 9y^2 = 16a^2.$$

3° Si les cercles O,O' sont orthogonaux, P décrit l'ellipse

$$2x^2 + y^2 - 3px - p^2 = 0.$$

4° Entre les coordonnées (α,β), (x,y) des points P,O' on a les relations

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(3p - 4x), \quad \beta = -2y;$$

donc les lieux décrits par ces points sont des courbes du même ordre.

5° L'axe radical des cercles ABC, A'B'C' ayant pour équation

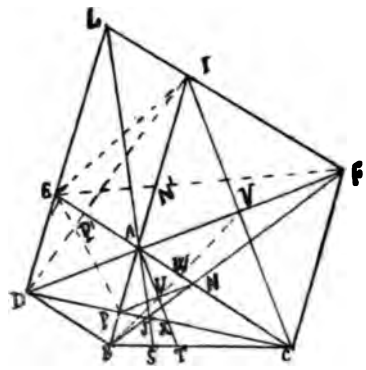
$$x(p - 4\alpha) - 3\beta y + p(\alpha - p) = 0,$$

la classe de l'enveloppe de cet axe est égale à l'ordre du lieu de P.

×Question 1004.

Voir (*Mathesis*, (2) V, p. 32).

Sur les côtés AB, AC *d'un triangle* ABC *on construit extérieurement les losanges* ABDE, ACFI *dont les côtés* AE, AI *sont sur les prolongements des côtés* CA, BA *du triangle. Les droites* DE, FI *se coupent en un point* L; *les droites* BF, CD *se coupent en un point* J *et rencontrent respectivement* AC, AB *aux points* N, P. 1° *On a* AP = AN. 2° *Les points* L *et* J *sont situés sur la symédiane de* ABC. 3° *Le triangle* BJC *et le quadrilatère* APJN *sont équivalents.* 4° J *divise la symédiane issue de* A *dans le rapport* $(b^2+c^2) : bc$. 5° *Les droites qui joignent* B *et* C *aux centres des losanges* ACFI, ABDE *se coupent au milieu de la bissectrice de l'angle* BAC.



(A. C.).

Cette question a été résolue par MM. Déprez, Colart, Seligmann, Klompers, Merlin, Bastin, Droz-Farny, Fairon, Camus, Laurens, Cristesco, Tiete, Davidoglou, Jean Jonesco, Bogdan Jonesco, Tzitzéica.

Nous reproduirons parmi les différentes variantes les plus simples.

1. La figure donne

$$\frac{AN}{IF}=\frac{AB}{IB},\quad \frac{AP}{ED}=\frac{AC}{EC};$$

d'où

$$AN=AP=\frac{bc}{b+c},\quad \frac{1}{AN}=\frac{1}{AP}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

On déduit de là que les droites NP et DAF sont parallèles.

2° et 4° La médiane AL du triangle AEI est la symédiane du triangle ABC, symétrique de AEI par rapport à la bissectrice DF.

Les triangles LDF, APN ayant leurs côtés parallèles, les droites LA, DP, FN qui joignent les sommets homologues concourent en un même point J.

Soit S le pied de la symédiane AJ. Le triangle ASC coupé par la transversale BJN donne.

$$\frac{AJ}{JS}\cdot\frac{BS}{BC}\cdot\frac{CN}{NA}=1. \qquad (1)$$

Or

$$\frac{CN}{NA}=\frac{CF}{BA}=\frac{b}{c},\quad \frac{BS}{BC}=\frac{c^2}{b^2+c^2}; \qquad (2)$$

des égalités (1) et (2) on conclut

$$\frac{AJ}{JS}=\frac{b^2+c^2}{bc}=\frac{b}{c}+\frac{c}{b}.$$

On voit facilement que les coordonnées barycentriques de J sont bc, b^2, c^2;

3° *a)* Les triangles CAP, FAN sont équivalents comme ayant même base AP = AN et même hauteur. La figure ABCF étant un trapèze, les triangles FAN, CNB sont équivalents. Donc *aire* CAP = BNC; et à cause de la partie commune NJC, *aire* APJN = BJC. (Colart, Camus).

b) Le triangle DBC, égal à la moitié du losange DBAE, est égal à DBP + EPA ; par suite BPC = EPA. Mais les triangles EPA, BAN sont équivalents comme ayant des angles en A supplémentaires compris entre des côtés égaux; il en résulte BPC = BAN, ensuite BJC = APJN. (Droz Farny).

c) CF étant parallèle à AB, les triangles BPC, BPF sont équivalents; il en est donc de même des triangles BJC, PJF. Mais PN étant parallèle à AF, on a

$$BJC = PJF = PJN + PNF = PJN + PNA = JPAN. \quad \text{(Fairon.)}$$

d) $$\frac{BPC}{BAC}=\frac{BP}{PA}=\frac{BD}{AC}=\frac{c}{b},\quad \frac{ABN}{ABC}=\frac{AN}{AC}=\frac{AB}{CF}=\frac{c}{b};$$

d'où BPC = ABN, etc. (Laurens, J. Jonesco, Klompers).

5. Soit V le centre du losange ACFI. IC étant parallèle à la bissectrice AT de BAC, la médiane BV du triangle BIC passe au milieu U de AT; BV étant aussi la médiane du triangle BAF, et PN étant parallèle à la base AF, U est aussi le milieu de PN. La figure APTN est un losange.

Remarques. 1° On a

$$\frac{JBC}{ABC}=\frac{bc}{b^2+bc+c^2}. \qquad \text{(Déprez.)}$$

2° Si l'on construit sur AB, AC deux losanges semblables quelconques, les côtés extérieurs DE, FI se coupent toujours sur la symédiane (LAURENS.)

3° J coïncide avec le point de Lemoine si $a^2 = bc$. On a

$$\frac{PB}{NC} = \frac{c^2}{b^2}, \quad \overline{AP}^2 = \overline{AN}^2 = BP.CN.$$

Le point de rencontre X de CD avec la bissectrice AT a pour coordonnées barycentriques c, b, c; BX est donc une médiane de ABC (BARISIEN.)

4° $$\frac{NJC}{PJB} = \frac{b^5}{c^5}.$$ (CRISTESCO.)

5° Sur la tangente en A à la circonférence ABC on porte du côté de AB une longueur AB′ = AB et du côté de AC une longueur AC′ = AC. Les parallèles à AC par B′ et à AB par C′ se coupent sur la bissectrice de l'angle BAC. Les parallèles à AC par C′ et à AB par B′ se rencontrent en un point D tel, que la droite AD divise BC en segments proportionnels aux cubes des côtés adjacents. (DÉPREZ).

6° BV et PF se coupent sur AC; car la médiane UV du trapèze APNF passe par l'intersection des diagonales.

ID coupe AE en un point P′, et EF coupe AI en un point N′ tels, que AP′ = AN′ = AP = AN; ID et EF se rencontrent sur la symédiane du triangle AEI ou sur la médiane de ABC. (J. N.).

QUESTIONS D'EXAMEN.

768. L'équation.

$$y^2 + 2xy + px^2 + 2y - 3x = 0$$

doit représenter une hyperbole dont une asymptote passe par le point $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$. Déterminer la valeur de p. (J., Liége.)

769. L'équation

$$y^2 + xy + px^2 + qy + 8x + 1 = 0$$

doit représenter une hyperbole dont les asymptotes passent, l'une par le point (2, 5), l'autre par le point (— 3,). Déterminer les coefficients p et q. (J., Liége.)

AIRES ET VOLUMES RELATIFS A LA CHAINETTE;

par M. C. E. Wasteels, professeur à l'Athénée royal de Tongres.

I. *Aire de la Chaînette.* En désignant cette aire par u, on a (fig. 1) :

$$u = \lim \sum_{0}^{x} M m Q P.$$

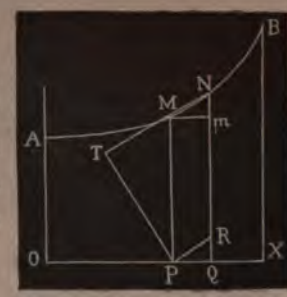


Fig. 1.

Menons la corde MN, et par P, la droite PR parallèle à MN; enfin, abaissons de P une perpendiculaire sur MN et soit T le pied de cette perpendiculaire (*). Remarquons que les triangles PQR et MmN sont égaux; on a donc

$$M m Q P = MNRP.$$

Par suite,

$$u = \lim \sum_{0}^{x} MNRP = \lim \sum_{0}^{x} MN \times PT = \lim \sum_{0}^{x} \Delta s \times a;$$

$$u = a \times \lim \sum_{0}^{x} \Delta s = a \times s.$$

Ainsi, l'aire ABXO est égale au rectangle construit sur l'arc AB et l'ordonnée à l'origine AO.

Remarque. Nous avons remplacé, dans $\lim \sum_{0}^{x} MN \times PT$, l'infiniment petit $MN \times PT$ par $\Delta s \times a$; cela est permis, car

$$\lim \frac{MN \times PT}{\Delta s \times a} = \lim \frac{MN}{\Delta s} \times \frac{PT}{a}$$
$$= 1 \times 1 = 1.$$

Fig. 2.

II. *Aire de la Tractrice.* Proposons-nous de chercher l'aire comprise entre la tractrice AMS (fig. 2), la tangente verticale AO, l'axe OT et une tangente quelconque ST.

Menons des tangentes intermédiaires faisant entre elles des

(*) Dans la figure 1, MT devrait être à peu près égal à AM; dans la figure 2, les tangentes MQ, NR se confondent partiellement avec la courbe AS, la corde *fe* avec l'arc de cercle *fe*.

angles $\Delta\sigma$, égaux ou inégaux, mais indéfiniment décroissants. On aura

$$s = \lim \mathop{\mathrm{S}}_{0}^{\mathrm{T}} \mathrm{MNKQ}.$$

Soit K l'intersection des deux tangentes MQ et NR, et considérons le triangle curviligne MNK. Il est plus petit que le triangle rectiligne MNK, obtenu en remplaçant l'arc par la corde : or,

$$\lim \frac{\mathrm{MNK}}{\mathrm{KQR}} = \lim \frac{\mathrm{MK} \times \mathrm{NK}}{\mathrm{KQ} \times \mathrm{KR}} = 0\,;$$

donc

$$u = \lim \mathop{\mathrm{S}}_{0}^{\mathrm{T}} \mathrm{KQR} = \lim \mathop{\mathrm{S}}_{0}^{\mathrm{T}} \mathrm{KQV},$$

QV étant un arc de cercle décrit de K comme centre.

Cela étant, considérons le cercle de centre O et de rayon OA, et menons-y des rayons parallèles aux tangentes ; soient O*q* et O*r* respectivement parallèles à MQ et NR, et O*t* à ST. On aura :

$$\lim \frac{\text{secteur KQV}}{\text{secteur } \mathrm{O}qr} = \lim \frac{\overline{\mathrm{KQ}}^2}{\overline{\mathrm{O}q}^2} = \frac{\overline{\mathrm{MQ}}^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1\,;$$

par suite,

$$u = \lim \mathop{\mathrm{S}}_{0}^{\mathrm{T}} \text{secteur } \mathrm{O}qr = \text{secteur } \mathrm{OC}t.$$

Si le point S s'éloigne indéfiniment, on trouve

$$\lim u = \text{aire OCB} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

En désignant par U la limite de l'aire comprise entre l'axe OT et les deux branches, quand les points extrêmes s'éloignent indéfiniment, on aura

$$\mathrm{U} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

La limite de l'aire est donc égale à la moitié de l'aire du cercle OA.

Remarque. Le raisonnement qui précède prouve que, en général, l'aire comprise entre la courbe, l'axe OT et deux tangentes faisant entre elles un angle [illegible] est égale à celle d'un secteur circulaire de rayon a et dont l'angle au centre est [illegible] (*).

(*) [illegible] par une droite AB de longueur variable [illegible] le point de contact, est égale à celle qui est décrite

III. *Volume de la pseudosphère.* Supposons que la tractrice tourne autour de la directrice OT. Menons par K et Q des parallèles à QR et KR, et soit L leur intersection. Désignons respectivement par v, v' et v_1 les volumes des solides engendrés par les figures QRK, QKL, Oqr en tournant autour de la directrice. On aura, en appelant V le volume cherché et ΔV le volume du solide engendré par la figure MNRQ,

$$V = \lim \sum_{0}^{T} \Delta V = \lim \sum_{0}^{T} v.$$

Or, d'après la géométrie élémentaire,

$$v = \tfrac{1}{3}(v + v');$$

d'où

$$v = \frac{v'}{2};$$

$$V = \tfrac{1}{2} \lim \sum_{0}^{T} v'.$$

Mais

$$\lim \frac{v'}{v_1} = 1,$$

car il est aisé de voir, en menant qm et rn parallèles à la directrice, que la limite du rapport des volumes des solides engendrés par Oqm et Orn est égale à 1, et qu'il en est de même de la limite du rapport de l'un quelconque de ces solides au solide v'.

On a donc finalement

$$V = \tfrac{1}{2} \lim \sum_{C}^{t} v_1 = \tfrac{1}{2} \text{ solide engendré par OC}t.$$

Si S s'éloigne indéfiniment, on obtient

$$\lim V = \tfrac{1}{4} \text{ sphère.}$$

Par suite, la limite du volume engendré par les deux branches est égale à la moitié du volume de la sphère. Ainsi, le volume de la pseudosphère vaut $\frac{2}{3}\pi a^3$.

IV. *Surface de la pseudosphère.* Supposons que les angles $\Delta\alpha$ soient des subdivisions exactes de $\frac{1}{2}\pi$; de cette manière, les rayons parallèles

---

par une droite CD qui tourne autour d'un point fixe C en restant à chaque instant égale et parallèle à AB (STEINER).

aux tangentes de la tractrice sont deux à deux symétriquement pl
par rapport à la bissectrice OD de l'angle COB.

Cela étant, désignons par surf. MN la surface engendrée par l
nous aurons

$$\text{surface arc AS} = \lim \sum_{0}^{T} \text{surface arc MN} = \lim \sum_{0}^{T} \text{surf. corde MN}$$

Portons sur QL une longueur QH égale à RN, et menons NH et
Considérons la surface engendrée par l'arc de cercle MH de centre Q
aura

$$\text{surf. arc MH} = \text{surf. arc } qr.$$

D'autre part,

$$\lim \frac{\text{surf. MN}}{\text{surf. arc MH}} = \lim \frac{\text{surf. MN}}{\text{surf. corde MH}} = \lim \frac{\text{MN}}{\text{MH}};$$

car les milieux des droites MN et MH sont à égale distance de l'ax
rotation. Or,

$$\lim \frac{\text{MN}}{\text{MH}} = \cot \alpha, \quad (\alpha = \text{angle MQO});$$

d'où

$$\lim \frac{\text{surf. MN}}{\text{surf. MH}} = \cot \alpha,$$

ou

$$\lim \frac{\text{surf. MN}}{\cot \alpha \cdot \text{surf. MH}} = 1.$$

Donc

$$\text{surface arc AS} = \lim \sum_{0}^{T} \cot \alpha \cdot \text{surf. MH} = \lim \sum_{C}^{t} \cot \alpha \cdot \text{surf. arc } q$$

Supposons que S s'éloigne indéfiniment; alors

$$\lim \text{surface AS} = \lim \sum_{C}^{B} \cot \alpha \cdot \text{surf. arc } qr,$$

ou

$$\lim \text{surface AS} = \lim \sum_{B}^{D} \cot \alpha \cdot \text{surf. arc } rq + \lim \sum_{C}^{D} \cot \beta \cdot \text{surf. arc}$$

Nous désignons par fs l'arc symétrique de rq par rapport à OD et pa
l'angle BOE. On a

$$\cot \beta = \text{tang } \alpha.$$

D'autre part,

$$\lim \frac{\text{surf. } rq}{\text{surf. } fe} = \lim \frac{qs}{fg} = \lim \frac{qs}{rs} = \text{tang } \alpha ;$$

d'où

$$\lim \frac{\text{surf. } rq \times \cot \alpha}{\text{surf. } fe} = 1.$$

De même

$$\lim \frac{\text{surf. } fe \times \cot \beta}{\text{surf. } rq} = 1.$$

Par conséquent,

$$\text{lim. surf. AS} = \lim \sum_{s}^{D} \text{surf. } rq + \lim \sum_{C}^{D} \text{surf. } fe = \text{surface arc CB.}$$

La limite de l'aire de la surface engendrée par les deux branches est donc égale à l'aire de la sphère.

Note. Il n'est pas inutile d'observer que tous les résultats précédents sont établis, au moyen du *calcul des limites de sommes d'infiniment petits*, mais sans le secours du *calcul intégral* proprement dit avec lequel on le confond souvent. — Le calcul intégral est l'inverse du *calcul différentiel* ou *calcul des limites de rapports d'infiniment petits*. Archimède et Fermat étaient familiers avec les procédés du calcul des limites de rapports ou de sommes d'infiniment petits. Mais ce sont Newton et Leibniz qui ont imaginé le calcul intégral et qui ont vu qu'il donnait les mêmes résultats que le calcul des limites de sommes d'infiniment petits (P. M.).

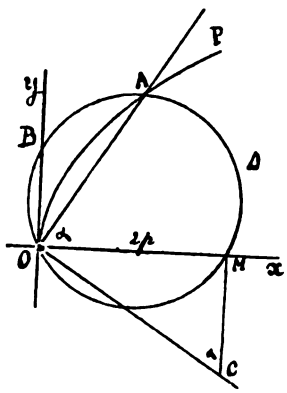
LE PROBLÈME DE LA DUPLICATION DU CUBE,

par M. G. de Longchamps, professeur de mathématiques spéciale au lycée St-Louis.

On sait que ce problème et, en général, ceux qui correspondent à une équation du troisième degré, se résolvent au moyen d'un cercle et d'une conique Γ. Voici une solution qui permet de choisir pour Γ une parabole et d'aboutir à un tracé très simple(*).

(*) Descartes, dans sa Géométrie (1637) emploie à peu près comme M. de Longchamps, le cercle et la parabole pour résoudre le problème de la recherche de deux moyennes proportionnelles, lequel est équivalent au problème de la duplication du cube (P. M.).

Considérons une parabole P, rapportée à ses axes et soit Δ une circonférence passant par O et coupant Ox en un point M tel que $OM = 2p$, $2p$ désignant le paramètre de P.



Soit A l'un des points communs à P et à Δ; l'équation de OA étant $y - mx = 0$, celle de Δ sera de la forme

$$(1+m^2)(y^2-2px)-(y-mx)(y+mx+n)=0.$$

En écrivant que cette équation est vérifiée par $x = 2p$, $y = 0$, on a

$$n = \frac{2p}{m};$$

et, finalement, l'équation de Δ est

$$x^2 + y^2 - \frac{2p}{m^2}y - 2px = 0.$$

En faisant $x = 0$, on trouve que Δ coupe Oy en un point B tel que

$$OB = \frac{2p}{m^2}. \qquad 1)$$

En désignant par α l'angle AOx, on a $m = \operatorname{tg}\alpha$. Elevons en M, une perpendiculaire à Ox; en O, une perpendiculaire à OA; ces droites se coupent en C et nous avons

$$CM = 2p \operatorname{cotg}\alpha. \qquad (2)$$

Les relations (1), (2) donnent

$$OB.\,4p^2 = \overline{CM}^3.$$

En prenant $OB = \frac{p}{2}$, on a donc

$$\overline{CM}^3 = 2p^3.$$

Dans cette égalité, on supposera que p est connu, car CM est l'inconnue. En faisant le tracé indiqué par la figure, on aura le point A, d'abord, puis le point C.

En général, l'équation $x^3 = \lambda p^3$ sera graphiquement résolue, en prenant

$$OB = \tfrac{1}{4}\lambda p.$$

BIBLIOGRAPHIE.

ntaer Stereometri af C. Juel. — Copenhague, Lehmann et Stages, 3 pages in-8°.

il concis de géométrie solide, comprenant quelques développements de ıétrie sphérique, des notions sur les sections du cône et 143 exercices.

---

de géométrie plane, par L. Jowa, ingénieur civil. Liége, Vaillant-ıe, 1895, 108 p. in-8°.

ur s'est proposé de mettre entre les mains des candidats aux écoles ı un livre présentant sous une forme condensée le programme de l'examen ıion. La rédaction est claire et rien d'essentiel n'est omis. Quelques ns et les propositions où interviennent les incommensurables donnent es critiques; mais nous ne voulons pas insister sur des points qu'il est si d'exposer rigoureusement sans être amené à des longueurs.

---

rundgebilde der ebenen Geometrie von Dr V. Eberhard, Professor an der tät zu Koenigsberg i. P. Tome I, Leigzig, Teubner 1895. Un vol. grand XLVII-302 pages et 5 planches. Prix : 14 marcs.

·age doit comprendre trois volumes. Pour apprécier la portée scientifique eloppements que se propose de donner l'auteur, il convient peut-être re la publication des autres parties.

·*undgebilde* de la géométrie plane sont ici : le système de n points dont moins ne sont pas en ligne droite, le système de n droites dont trois aux ə passent pas par un même point, enfin le système mixte composé de m t n droites. Ces systèmes donnent lieu à des considérations sur la situation de leurs éléments et sur les *régions* qu'ils déterminent dans le plan.

re gagnerait à être rédigé sous une forme concise et dégagée de digressions

---

ıs de Cosmographie, par MM. F. Tisserand, membre de l'Institut, r de l'Observatoire de Paris, et H. Andoyer, maître de conférences à la des Sciences de Paris. Paris, Armand Colin et Cie, 1895 (IX-369 pages l figures et 12 planches hors texte). Prix : 6,00 fr.

aités de Cosmographie édités seulement il y a vingt-cinq ou trente ans, vieilli et leur comparaison avec les traités plus récents fait bien ressortir ce des perfectionnements apportés à la construction des instruments e sur les progrès de la connaissance du ciel étoilé. Pour ne parler que du ècle, il suffira de dire que l'on a observé et catalogué plus de 400 nouvelles planètes, deux satellites de Mars, un cinquième satellite de Jupiter, le ıon de Sirius, reconnu la disposition des canaux de Mars et analysé la ı de tous les astres. Ces importants résultats ont eu pour conséquence · singulièrement les vues d'ensemble sur la constitution et l'origine du

système solaire, des étoiles et des nébuleuses. Toutes ces nouvelles données sont exposées et plusieurs d'entre elles sont figurées dans l'ouvrage susmentionné. En voici d'ailleurs les principales subdivisions.

I. Les Étoiles. Mouvement diurne. Méthodes d'observation. Description du Ciel (1-37).

II. La Terre. Forme sphérique de la Terre. Forme réelle de la Terre. Rotation de la Terre. Gravité. Cartes géographiques (38-77).

III. Le Soleil. Mouvement apparent du Soleil. Mouvement elliptique du Soleil. Distance du Soleil à la Terre. Ses dimensions. Déplacements de l'écliptique et de l'équateur. Mesures du Temps. Calendrier. Inégalité des jours et des nuits. Rotation du soleil. Mouvement réel de translation de la Terre (78-127).

IV. La Lune. Mouvement de la Lune autour de la Terre. Distance de la Lune à la Terre. Phases de la Lune. Sa constitution physique Eclipses de Lune, Eclipses de Soleil (128-161).

V. Les Planètes. Mouvement des Planètes. Détails succincts sur les diverses planètes. Des Comètes. Des Étoiles filantes (162-218).

VI. Astronomie stellaire. Distances et mouvements propres des Étoiles. Amas d'étoiles et nébuleuses (219-237).

VII. Notions sur l'histoire de l'astronomie. (238-266). Quatre Notices scientifiques (267-363).

Note sur le phénomène des marées (364-369).

M. Tisserand a réédité quatre des Notices scientifiques qu'il avait publiées dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, et qui tiennent ici bien près de cent pages. Elles sont, respectivement, intitulées :

1° Notice sur les perturbations (266-289). (*Annuaire* de 1890). — « Ce travail, « dit M. J. Thirion dans la *Revue des Questions Scientifiques* (avril 1895), est un « exposé magistral des conquêtes successives de l'Astronomie mécanique qu'ouvre « l'hypothèse de Copernic, que fonde la découverte des lois de Kepler, que généralise la conception de Newton, qu'étendent et consolident les travaux de « Laplace et d'une pléiade de géomètres illustres qui s'attaquent aux problèmes si « compliqués des perturbations, et que couronne enfin la découverte de Neptune. »

2° Notice sur la mesure des masses en Astronomie (290-319). (*Annuaire* de 1889). — « L'auteur nous apprend comment les astronomes pèsent les mondes en recourant à des méthodes indirectes, qui reposent toutes sur les lois de Newton, mais « qui varient beaucoup suivant qu'elles doivent s'appliquer aux planètes accompagnées ou dépourvues de satellites, aux satellites eux-mêmes, aux petites « planètes, ou au système des étoiles doubles dont on connaît la parallaxe. Il « fallait toute la science et tout le talent de M. Tisserand pour rendre un sujet « aussi ardu et, à première vue, absolument aride, parfaitement accessible au plus « grand nombre et extrêmement intéressant. Son exposition claire et simple cache « toutes les difficultés qu'il a dû vaincre pour rester rigoureux, et on le suit avec « un véritable plaisir dans cette inspection rapide de tout notre système solaire et « dans son excursion au monde de Sirius et de son compagnon ».

3° Notice sur la Lune et son accélération séculaire (320-337) (*Annuaire* de 1892). — « C'est là que brillent surtout les qualités éminentes du savant astronome. Son « travail rappelle, en plusieurs endroits, celui de Delaunay (*Annuaire* de 1868), « mais il ne fait nullement double emploi. » La partie de cette Notice consacrée à la discussion des éclipses totales de soleil et à leur degré d'utilité pour la chronologie sera lue avec le plus vif intérêt.

4° Notice sur les planètes intramercurielles (338-363) (*Annuaire* de 1882). — « Cette Notice, dit M. J. Thirion (*loc. cit*), résume l'état de nos connaissances sur « ces astres hypothétiques. Elle montre comment l'étude du mouvement de « Mercure a amené Le Verrier à admettre leur existence et elle passe en revue « toutes les circonstances où on a cru les observer ».

Il nous resterait maintenant à parcourir plus en détail les divers chapitres de l'ouvrage, mais, dans notre pensée, le simple exposé donné plus haut suffira à établir qu'il répond exactement à toutes les exigences de l'enseignement classique de la Cosmographie et qu'il va même un peu plus loin, sans dépasser pour cela les limites du programme habituel.

Nous exprimons donc le vœu que cet ouvrage parvienne rapidement à de nouvelles éditions, dans lesquelles les auteurs jugeront sans doute utile de réaliser quelques modifications peu importantes il est vrai. Voici à ce sujet quelques propositions que nous désirons soumettre.

(p. 52). Marées. La note explicative doit faire partie du volume et non du supplément; il nous semble qu'il conviendra de la placer, par exemple, à la fin du livre V.

(p. 63-64). Donner avec plus de décimales les deux coefficients de cos 2 λ.

(p. 115-117). Explication de l'inégalité des jours et des nuits. Ajouter aux figures en perspective des figures en projection réduisant l'horizon et les parallèles à de simples droites.

Définir le jour et la nuit polaires autrement qu'avec le qualificatif de perpétuel.

(p. 148). Lune rousse. Donner l'origine de cette désignation particulière.

(p. 259-266). L'hypothèse cosmogonique de Laplace ne donne pas l'explication de tous les faits; il sera nécessaire de le spécifier et de mentionner l'ouvrage de M. Faye : *Sur l'origine du Monde*.

Enfin, nous devons signaler que les noms de *Kepler* et de *Tycho-Brahe* sont à écrire sans accent.

Nous demanderons aussi que les Notices scientifiques soient complétées par quelques remarques pour tenir compte, s'il est nécessaire, des derniers résultats obtenus au moment de la réédition. (H. B.)

Cours d'analyse de l'École Polytechnique, par M. Camille Jordan, membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique. 2e édition, entièrement refondue. Tome III. Calcul intégral (*Équations différentielles*). Paris, Gauthier-Villars et fils, 1896 (XII-542 p. in-8°). Prix : 15 fr.

Préface. Le présent volume n'a pas été aussi profondément remanié que les deux précédents. Les principaux changements sont les suivants :

La Note finale sur quelques points de la théorie des fonctions a été supprimée, les principaux résultats qu'elle contenait ayant été introduits dans les deux premiers Volumes.

Les divers passages où interviennent les fonctions elliptiques ont été notablement simplifiés en faisant intervenir les fonctions de M. Weierstrass à la place des anciennes fonctions sn*u*, cn*u*, dn*u*

L'exposition du procédé d'intégration des équations linéaires à coefficients constants a été changée. La méthode de M Vaschy [ou plutôt de Brisson], que nous avons adoptée à la place de celle de Cauchy, se recommande par son élégance et sa complète généralité.

Nous avons enfin ajouté une démonstration de l'existence des intégrales dans le cas des variables réelles, et l'indication des méthodes proposées par Kummer et Halphen pour l'intégration de certaines équations linéaires.

Sommaire. CHAP. I. *Équations différentielles ordinaires.* — I. Notions préliminaires. Réduction à la forme normale. Elimination. Ordre d'un système. Équations différentielles algébriques. Irréductibilité. Application aux intégrales abéliennes. Solution générale. Solutions singulières. Énoncés divers du problème de l'intégration. II. Équations du premier ordre. Intégrales. Facteur intégrant. Transformations infinitésimales. Séparation des variables. Équation homogène. Équation linéaire. Equations diverses. Équations de M. Darboux. Equation de Jacobi. De l'équation $f(y, y') = 0$. Usage de la différentiation. Équation de Clairaut. Formules pour l'addition des transcendantes. Équation d'Euler. III. Systèmes d'équations simultanées. Intégrales. Multiplicateur. Systèmes canoniques. Théorème de Poisson. Transformations infinitésimales. Cas d'abaissement du système. De l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$. Des équations $y'' = f(y)$, $y'' = f(y')$. Courbes dont le rayon de courbure est proportionnel à la normale. Mouvement des planètes. Lois de Kepler. IV. Équations linéaires aux différentielles totales. Équations simultanées aux dérivées partielles qui définissent les combinaisons intégrables. Multiplicateur. Systèmes complets. Systèmes jacobiens. Intégration des systèmes jacobiens par la méthode de M Mayer. Transformations infinitésimales. Théorèmes de M. Lie. V. Étude directe des intégrales. Existence des intégrales. Cas des variables réelles. Cas des variables complexes. Méthode des quadratures. Variation des constantes. Points critiques des intégrales. Cas des équations linéaires. Étude des intégrales aux environs d'un point critique, pour l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x, y)}.$$

Étude des intégrales aux environs d'un point critique, pour l'équation

$$\varpi \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Etude des intégrales aux environs d'un point critique, pour l'équation

$$f\left(\frac{dy}{dx}, y\right) = 0.$$

Intégration de cette équation lorsque ses intégrales sont uniformes. Application à l'équation binome. Intégrales singulières. — CHAP. II. *Équations linéaires.* — I. Généralités. Propriétés des systèmes d'équations linéaires du premier ordre. Système adjoint. Systèmes à seconds membres. Équations linéaires d'ordre supérieur. Équations à second membre. Équation adjointe. II. Équations linéaires à coefficients constants. Équations sans second membre. Équations à second membre de la forme $Pe^{\lambda t}$. Exemples. Systèmes d'équations. De l'équation

$$(\alpha t+\beta)^n \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 (\alpha t+\beta)^{n-1} \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots = 0.$$

III. Intégration par des séries. Étude des intégrales aux environs d'un point critique. Condition pour que les intégrales soient régulières. Cas où les intégrales sont irrégulières. Intégration des équations qui n'ont qu'un nombre fini de points critiques. Groupe d'une équation linéaire. Recherche des conditions d'irréductibilité. Équations dont les intégrales sont partout régulières. Équations dont les intégrales sont algébriques. Équations dont l'intégrale est rationnelle. Equations de M. Halphen. Equations à coefficients algébriques. Équation de Gauss. Polynomes de Jacobi. Équation de Bessel. Ses diverses transformées. IV. Intégration par des intégrales définies. Équation de Gauss généralisée. Son groupe. Équation aux périodes des fonctions elliptiques. Équation de Laplace. Application à l'équation

$$x\frac{d^2 I}{dx^2} + (2n+1)\frac{dI}{dx} + xI = 0.$$

Valeur asymptotique de $J_n(x)$. Équation de Kummer. V. Equations de M. Picard. Propriétés de leurs intégrales. Forme générale des intégrales. Détermination des constantes. Application à l'équation de Lamé. Équations de M. Halphen. — CHAP. III. *Équations aux dérivées partielles.* — I. Notions préliminaires. Réduction à des systèmes ne contenant que des dérivées partielles du premier ordre. Élimination. Systèmes normaux. Existence des intégrales. II. Équations aux dérivées partielles du premier ordre. Équations linéaires. Applications. Équations non linéaires. Intégrale complète; intégrale générale; intégrales singulières. Méthode des caractéristiques. Première méthode de Jacobi. Nouvelle méthode de Jacobi et Mayer. Équations intégrables par différentiation. Transformations de contact. III. Equations aux dérivées partielles du second ordre. De l'équation

$$\frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \partial y^n} = 0.$$

De l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Simplification de l'équation

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + M = 0.$$

Équation de Laplace. Équation de Liouville. Équation des surfaces minima. Méthode de Monge. Application à $rt - s^2 = 0$. IV. Équations linéaires à coeffi-

cients constants. Principes de la méthode. Propagation de la chaleur dans un milieu indéfini. Propagation du son. Problème de Cauchy. Propagation de la chaleur dans une barre indéfinie dans un sens. Cordes vibrantes. Refroidissement d'une barre hétérogène. Équilibre de température d'une sphère. Équilibre de température de l'ellipsoïde. Refroidissement d'une sphère. — CHAP. IV. *Calcul des variations.* — I. Première variation des intégrales simples. Variations successives d'une fonction ou d'une intégrale définie. Maxima et minima des intégrales définies. Transformation de la première variation. Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle s'annule. Condition d'intégrabilité de $\varphi(x, y, \ldots, y^{(n)}, z, \ldots, z^{(n)})$. Transformation des équations de la Dynamique. Brachistochrone. Ligne de longueur minimum. Lignes géodésiques. Application à l'ellipsoïde. Problème des isopérimètres. II. Variation seconde. Réduction à la forme canonique des équations de condition fournies par la variation première. Transformation de la variation seconde. Première condition pour l'existence effective d'un maximum ou d'un minimum. Propriétés des systèmes canoniques. Nouvelle transformation de $\delta^2 I$. Caractères des maxima et des minima. III. Variation des intégrales multiples. Principes généraux. Problème de Gauss. Surface minima. Transformation des équations du potentiel. (P. M.).

L'ouvrage de M. Jordan et celui de M. Laurent, où les principes fondamentaux de l'analyse sont exposés avec moins de rigueur, sont les seuls traités français contenant, sous une forme moderne, à la fois le calcul différentiel, le calcul intégral et la théorie des équations différentielles (*).

Le dernier traité complet avant ceux que nous venons de citer est celui de Lacroix (1889).

Recueil de problèmes de mathématiques. Géométrie du triangle. A l'usage des classes de mathématiques spéciales, par C. A. LAISANT, Docteur ès sciences, Répétiteur à l'École polytechnique. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1896. (In-8° de X-136 pages). Prix : 3 fr.

Ce volume est le sixième de la collection de questions extraites des principaux recueils mathématiques périodiques publiés en langue française depuis 1842. *Mathesis* a annoncé les tomes précédents (voir (2) II, p. 271; (2) III, p. 66 et 228; (2) VI, p. 46) et fait ressortir les services que M. Laisant rend aux professeurs et aux élèves en réunissant les questions proposées depuis une cinquantaine d'années sur les diverses branches mathématiques aux lecteurs des Nouvelles Annales, de la Nouvelle Correspondance, du Journal de mathématiques élémentaires et spéciales, de *Mathesis*.

L'ouvrage que nous signalons ici présente un intérêt particulier, sur lequel il est inutile d'insister. Il renferme les énoncés de 454 propositions, groupées ainsi : Points remarquables (1-37), droites et angles remarquables (38-80), cercles remar-

---

(*) Les ouvrages analogues de Moigno et de M. Bertrand sont restés inachevés.

quables (81-176), coniques remarquables (177-192), systèmes de triangles (193-206), questions diverses (207-333), lieux géométriques et enveloppes (344-379), relations métriques et trigonométriques (380-454) (J. N.).

NOTES EXTRAITES DE LA CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE.

(*Suite;* voir (2), V, 138, 195, VI, 18, 42, 112, 200).

14. *Nouvelle discussion de l'équation générale des courbes du second degré. Fragment par* M. AMPÈRE (C.G.Q., X, pp. 90-103).

L'auteur se propose de réduire l'équation

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \qquad (1)$$

à une autre qui soit symétrique en x et y, de manière que la bissectrice de l'angle des nouveaux axes positifs soit un axe de symétrie. Les coefficients de x^2 et y^2, et ceux de x et y, seront égaux dans la nouvelle équation ; si c'est possible, on les réduira à zéro.

Nous supposerons les axes primitifs rectangulaires.

1° Si $B^2 - 4AC \gtrless 0$, la substitution $x = x' + a$, $y = y' + b$ peut réduire l'équation (1) à la forme

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + F' = 0. \qquad (2)$$

La substitution

$$x' = x'' \cos\alpha + y'' \cos\alpha', \quad y' = x'' \sin\alpha + y'' \sin\alpha' \qquad (3)$$

ramène (2) à

$$A'y''^2 + B'x''y'' + C'x''^2 + F' = 0, \qquad (4)$$

où

$$A' = A\sin^2\alpha' + B\sin\alpha'\cos\alpha' + C\cos^2\alpha',$$
$$C' = A\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha,$$
$$B' = 2A\sin\alpha\sin\alpha' + B(\sin\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha'\cos\alpha) + 2C\cos\alpha'\cos\alpha.$$

Pour avoir $A' = 0$, $C' = 0$, il faut choisir pour $\operatorname{tg}\alpha$ et $\operatorname{tg}\alpha'$ les racines de

$$Am^2 + Bm + C = 0;$$

ces racines ne sont réelles que si $B^2 - 4AC > 0$. Pour calculer B', on écrit

$$B' = \cos\alpha\cos\alpha'[2A\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha' + B(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha') + 1],$$

$$\cos\alpha\cos\alpha' = \frac{1}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\alpha')}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha')^2 + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha')^2}}.$$

2° Si $B^2 - 4AC < 0$, nous posons $B' = 0$ et $A' = C'$. Soit G la valeur commune de A′ et C′; les équations de condition peuvent être écrites ainsi :

$$2A \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha' + B(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha') + 2C = 0, \quad (5)$$

$$A \sin^2\alpha' + B \sin\alpha' \cos\alpha' + C\cos^2\alpha' = G(\cos^2\alpha' + \sin^2\alpha'), \quad (6)$$

$$A \sin^2\alpha + B \sin\alpha \cos\alpha + C\cos^2\alpha = G(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha), \quad (7)$$

Des égalités (6) et (7) on conclut que $\operatorname{tg}\alpha'$ et $\operatorname{tg}\alpha$ sont les deux racines de

$$(A - G)m^2 + Bm + (C - G) = 0; \quad (8)$$

par suite,

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha' = \frac{C - G}{A - G}, \quad \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha' = -\frac{B}{A - G},$$

et l'égalité (5) se réduit à

$$G = \frac{4AC - B^2}{2(A + C)}.$$

La condition de réalité des racines de (8) est

$$B^2 - 4(A - G)(C - G) > 0 \quad \text{ou} \quad B^2 - 4AC - 4G(G - A - C > 0;$$

en substituant la valeur de G on trouve $B^2 - 4AC < 0$.

3° Si $B^2 - 4AC = 0$, l'équation (1) est de la forme

$$(My + Nx)^2 + Dy + Ex + F = 0. \quad (9)$$

Pour la rendre symétrique en x et y, dans le cas où elle représente une parabole proprement dite, il faut la réduire à

$$m(y - x)^2 + d(y + x) + f = 0. \quad (10)$$

La substitution

$$x = x' \cos\alpha + y' \cos\alpha', \quad y = x' \sin\alpha + y' \sin\alpha'$$

ramène (9) à

$$[y'(M \sin\alpha' + N\cos\alpha') + x'(M \sin\alpha + N\cos\alpha)]^2$$
$$+ y'(D \sin\alpha' + E\cos\alpha') + x'(D \sin\alpha + E\cos\alpha) + F = 0. \quad (11)$$

Pour avoir la forme (10) on pose

$$M \sin\alpha' + N\cos\alpha' = -(M \sin\alpha + N\cos\alpha), \quad (12)$$
$$D \sin\alpha' + E\cos\alpha' = D \sin\alpha + E\cos\alpha,$$

égalités que l'on transforme en

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \alpha') = -\frac{N}{M}, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \alpha') = \frac{D}{E}.$$

Si celles-ci sont compatibles, c'est-à-dire si $MD + NE = 0$, on peut encore faire disparaître le terme connu de l'équation en posant $x' = x'' + a$, $y' = y'' + a$ et en choisissant convenablement a.

Si $MD + NE \gtrless 0$, on pose l'égalité de condition (12) et on fait $x' = x'' + a$, $y' = y'' + b$, ce qui ramène l'équation (11) à

$$(M \sin\alpha' + N\cos\alpha')^2 (y'' - x'' + b - a)^2 + (y'' + b)(D\sin\alpha' + E\cos\alpha') + (x'' + a)(D\sin\alpha + E\cos\alpha) + F = 0;$$

on exprime ensuite que les coefficients de x'' et y'' sont égaux, et pour simplifier davantage on égale à zéro le terme indépendant. Les deux égalités de condition que l'on obtient ainsi, font connaître a et b en fonction des angles α et α', dont la somme résulte de (12) et dont la différence reste indéterminée.

15. *Point de* LEMOINE. Dans une lettre adressée par Gerono, professeur des pages du roi de France, à Quetelet (C.G.Q., III, pp. 16-20), nous trouvons quelques développements sur deux questions qui avaient déjà été traitées par Lhuilier (*Analyse géométrique*, pp. 296 et 135) et qui ont acquis une certaine importance dans la géométrie récente.

Le premier problème a pour objet la détermination du point dont la somme des carrés des distances aux côtés a, b, c, ... d'un polygone plan soit un minimum. Soient F le point cherché, F' un point quelconque du plan du polygone, FA et F'A' les perpendiculaires abaissées de F et F' sur un côté quelconque a du polygone ; on a

$$\Sigma \overline{FA}^2 < \Sigma \overline{F'A'}^2 < \Sigma \overline{F'A}^2.$$

De là on conclut que F est le centre des moyennes distances de ses projections sur les côtés du polygone. Si l'équation du côté a est $x\cos\alpha + y\cos\alpha' - p = 0$, le point F doit satisfaire aux équations

$$\Sigma(x\cos\alpha + y\cos\alpha' - p)\cos\alpha = 0, \quad \Sigma(x\cos\alpha + y\cos\alpha' - p)\cos\alpha' = 0,$$

qui définissent deux droites passant par F.

La première droite rencontre l'axe Ox en un point ayant pour abscisse

$$x = \frac{\Sigma p\cos\alpha}{\Sigma\cos^2\alpha} = \frac{\Sigma \dfrac{p}{\cos\alpha}\cdot\cos^2\alpha}{\Sigma\cos^2\alpha};$$

ce point est donc le centre de gravité des points de rencontre de Ox avec les côtés du polygone, pour des poids proportionnels à $\cos^2\alpha$, $\cos^2\beta$, ...

On trouve de même le point où cette droite coupe toute autre transversale du polygone, etc.

Le second problème consiste à trouver le lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances aux droites $a, b, c, \ldots$ soit égale à un carré donné. Ce lieu est une ellipse ayant pour centre le point F du problème précédent; Gerono en détermine les axes principaux.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 505, 2me partie.

(Voir *Mathesis*, (1) VI, p. 23, et (2) I, p. 30).

Démontrer les relations :

1) $C_{n,1} - C_{n,2}C_{3,2} + C_{n,3}C_{4,2} - C_{n,4}C_{5,2} + \cdots \pm C_{n,n}C_{n+1,2} = 0$;

2) $$\frac{1}{2p+1}C_{2p,p} + \frac{1}{2p-1}C_{2,1}C_{2p-2,p-1} + \frac{1}{2p-3}C_{4,2}C_{2p-4,p-2} + \cdots + C_{2p,p}$$
$$= 4^p \frac{2.4.6\ldots 2p}{3.5.7\ldots(2p+1)} = \frac{2^{2p-1}}{(p+1)\,C_{2p+2,p+1}}.$$

(E. CATALAN)

La 1e partie a été résolue, et l'énoncé de la 2e partie rectifié (1) IX p. 194.

Solution de la 2e partie par M. STUYVAERT (Gand). Remarquons d'abord que

$$C_{2n,n} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2\ldots n} = \frac{1.2.3\ldots 2n}{(1.2.3\ldots n)^2} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1).2^n(1.2\ldots}{(1.2.3\ldots n)^2}$$
$$= 2^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n} = 4^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}. \qquad (1$$

En faisant $n = p+1$, on a immédiatement la fin de la 2e partie de l'énoncé.

Soit à présent la fraction suivante, décomposée en fractions rationnelles :

$$4^p \frac{(x+2)(x+4)\ldots(x+2k)\ldots(x+2p)}{(x+1)(x+3)\ldots(x+2k+1)\ldots(x+2p+1)} = \frac{A}{x+2p+1} + \frac{B}{x+2p-}$$
$$+ \cdots + \frac{K}{x+2k+1} + \cdots + \frac{P}{x+1}. \qquad (1$$

Pour déterminer K, il suffit, comme on sait, de multiplier tous les termes par $x+2k+1$, puis de faire $x=-2k-1$: le 2^{d} membre se réduit à K, et le 1er devient :

$$4^{p}\frac{(-2k+1)(-2k+3)\dots(-1)\,.\,1\,.\,3\dots(2p-2k-1)}{(1-2k)(-2k+2)\dots(-2)\,.\,2\,.\,4\dots(2p-2k)}$$

$$=4^{k}\frac{1\,.\,3\,.\,5\dots(2k-1)}{2\,.\,4\,.\,6\dots 2k}\times 4^{p-k}\frac{1\,.\,3\;\;5\dots(2p-2k-1)}{2\,.\,4\,.\,6\dots(2p-2k)}.$$

D'après l'égalité (I) ci-dessus, cette quantité est égale à

$$C_{2k,k}\times C_{2p-2k,p-k},$$

on aura de même

$$A=C_{2p,p};\quad B=C_{2,1}\,.\,C_{2p-2,p-1};\quad\dots;\quad P=C_{2p,p}.$$

Substituant dans l'égalité (II), puis faisant $x=0$, on a l'identité à démontrer.

Remarque. En faisant $x=1$, puis en combinant, par multiplication, les résultats obtenus, on trouve encore d'autres identités entre les coefficients binomiaux.

La méthode suivie ci-dessus a déjà été employée par M. Verniory pour établir plusieurs identités entre les coefficients binomiaux (voir *Mathesis*, (1) VIII, p. 13).

Question 1006.

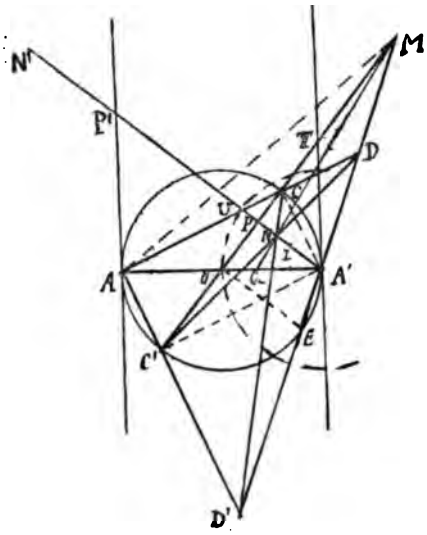
(Voir *Mathesis*, (2), V, p. 56).

A *est un point fixe d'une circonférence* O *et* C, C' *sont les extrémités d'un diamètre variable; on prolonge les cordes* AC, AC' *des quantités* CD = AC', C'D' = AC. *Trouver le lieu géométrique 1° du point de rencontre* M *des droites* CC', DD'; *2° du point d'intersection* N *des droites* CD', C'D; *3° de la projection* P *de* N *sur le diamètre* CC'. *Démontrer que la droite* MN *pivote autour d'un point fixe.* (Mandart.)

Solution géométrique par M. Klompers. 1° Soit A' le point diamétralement opposé à A sur la circonférence O. La figure ACA'C' étant un rectangle, les triangles CDA', CA'D' sont rectangles isoscèles; on en conclut que les points D, A', D' sont en ligne droite.

Soit E le second point d'intersection de DD' avec la circonférence. L'angle AEA' étant droit, E est le milieu de DD'. De plus l'angle EOC, double de l'angle EAC qui est égal à 45°, est droit.

Désignons par T le point où la tangente menée en A′ rencontre OM. Les triangles TMA′ et OEA ont leurs côtés perpendiculaires; le second étant isoscèle, le premier l'est aussi, et l'on a TM = TA′. On en conclut que le point M décrit une strophoïde ayant pour point double A′, pour sommet O.



2° et 3°. D'après les propriétés, bien connues, de la figure du carré de l'hypoténuse, les droites C′D, CD′ qui joignent les extrémités de l'hypoténuse CC′ du triangle rectangle A′CC′ aux sommets D, D′ des carrés construits sur les côtés de l'angle droit, se coupent sur la hauteur A′P du triangle. Il résulte de là que la projection P de N sur CC′ décrit la circonférence de diamètre OA′.

On sait aussi (et cela résulte, d'ailleurs, de la question 1004, pp. 237-339), que

$$NP = \frac{CP \cdot C'P}{CC' + A'P} = \frac{\overline{A'P}^2}{CC' + A'P};$$

on en conclut

$$A'N = A'P - NP = \frac{A'P \cdot CC'}{A'P + CC'}.$$

$$\frac{1}{A'N} = \frac{1}{A'P} + \frac{1}{CC'}. \qquad (1)$$

L'égalité (1) conduit à une double définition du lieu (N).

a) Transformons les lieux (P) et (N) par rayons recteurs réciproques en prenant pour pôle le point A′, pour puissance $2\overline{AO}^2$. Soient P′, N′ les transformés de P, N; le lieu de P′ est la tangente en A à la circonférence O. En multipliant l'égalité (1) par $2\overline{AO}^2$ on peut écrire

$$A'N' = A'P' + AO;$$

par conséquent, N′ décrit une conchoïde de Nicomède ayant pour pôle A′, pour directrice AP′.

b) La circonférence Δ décrite de A′ comme centre avec le rayon A′O coupe A′P en un point U, et le milieu I de A′P parcourt une circonférence Δ′. L'égalité (1) exprime que N est le conjugué harmonique de A′ par rapport aux points I, U.

4° D'après la propriété fondamentale du quadrilatère complet, AN est divisé harmoniquement par CC′, DD′, donc le faisceau M (AQOA′) est harmonique. Trois rayons MA, MO, MA′ passent par des points fixes de AA′; donc le quatrième MN aussi tourne autour d'un point fixe Q de AA′.

NOTE. Ont résolu la même question : MM. COLART, BUYSENS, BARISIEN, FAIRON et DÉPREZ.

Le lieu de M peut être défini ainsi : Les droites OM, A′M tournent autour des points O, A′ avec des vitesses angulaires de même sens et l'une égale à la moitié de l'autre. En effet, l'angle $CA'D = 45°$, et $COA + 2CA'O = \pi$.

Pour avoir les lieux complets des points M et N, il faut aussi porter de C vers A une longueur $CC_1 = AC'$, et de C′ vers A une longueur $C'D_1 = AC$, et opérer sur D_1, D'_1, comme il est dit dans l'énoncé pour D, D′.

M. BARISIEN accompagne sa solution des remarques suivantes :

a) Les points D, D′ décrivent deux circonférences (les angles ADA′, AD′A′ étant constants).

b) Les intersections de la droite OE avec A′C et A′C′ décrivent la même strophoïde que le point M.

c) Les milieux des droites CD, C′D′ décrivent des circonférences.

d) Les milieux des droites CD′, C′D parcourent des circonférences.

e) Les droites C′D, CD′ enveloppent des ellipses.

f) Le lieu du point de rencontre de AE avec A′C′, A′C se compose des deux circonférences (D′), (D).

g) Le point de rencontre de AE avec CC′ décrit une strophoïde droite.

Les remarques *a*) et *e*) ont été également signalées par M. DÉPREZ.

On démontre facilement les propositions *b*) et *g*) en considérant les vitesses angulaires des droites OE, A′C A′C′, AE, CC′. Les enveloppes *e*) résultent de la question 252 de la NCM, 1880, 463 et 514.

Question 1007.

(Voir *Mathesis* (2), V. p. 56).

Soient TM, TM′ *deux tangentes à une conique. On mène deux autres tangentes parallèles quelconques, qui coupent* TM *en* P *et* Q, TM′ *en* P′ *et* Q′. *Si* F, F′ *sont les foyers de la conique, démontrer que*

$$TP.TQ' = TP'.TQ = TF.TF'.$$ (E. P. Rousx.)

Solution par M. R. Buysens. On connaît les deux propriétés des coniques :

Si TM, TM′ sont deux tangentes à une conique, les angles FTM, F′ T M′ sont égaux.

L'angle sous lequel on voit du foyer le segment d'une tangente mobile (PT ou Q′Q) intercepté par deux tangentes fixes (P′P, P′T) est constant.

Par le foyer F menons une parallèle FR à PP′; nous aurons :

$$\text{angle } PFT = RFQ' = FQ'Q = F'Q'T.$$

Les triangles TPF, TQ′F′ ayant les angles en T et les angles en F et en Q′ respectivement égaux, sont semblables ; donc :

$$TF.TF' = TP.TQ' = TP'.TQ.$$

Solution analogue par M. Mandart. Solution analytique par M. Déprez.

×Question 1008.

(Voir *Mathesis*, (2) V. p. 56).

Soient ABC *un triangle donné*, A′B′C′ *le triangle formé par les milieux des côtés de* ABC; ω *le centre du cercle inscrit dans* A′B′C′ *et* O *le centre du cercle circonscrit à* ABC. *Démontrer les relations :*

$$\overline{\omega\omega'}^2 + \overline{\omega'O}^2 = (R - r)(R \quad 2r), \quad \frac{\overline{\omega\omega'}^2 + \overline{\omega'O}^2}{\overline{\omega O}^2} = 1 - \frac{r}{R},$$

r et R *étant les rayons des cercles inscrit et circonscrit à* ABC.

(E. N. Barisien.)

Solution par MM. A. Droz Farny, Déprez, B. Jonesco et Klompers.

Dans tout triangle on a :

$$\omega O = \sqrt{R(R-2r)}, \quad \overline{\omega H}^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2,$$

$$\overline{\omega G}^2 = \frac{p^2 + 5r^2 - 16Rr}{9}.$$

Les triangles ABC et A'B'C' sont inversement semblables par rapport à leur barycentre commun G, le rapport de similitude étant 2 : 1. On sait, en effet, que le centre O de ABC coïncide avec l'orthocentre H' de A'B'C'; on a donc

$$\overline{\omega\omega'}^2 = \frac{9}{4}\overline{G\omega}^2 = \frac{p^2 + 5r^2 - 16Rr}{4},$$

$$\overline{\omega' O}^2 = \overline{\omega' H'}^2 = \frac{4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2}{4}.$$

On en conclut :

I. $$\overline{\omega\omega'}^2 + \overline{\omega' O}^2 = R^2 - 3Rr + 2r^2 = (R-r)(R-2r);$$

et comme

$$\overline{\omega O}^2 = R(R-2r),$$

II. $$\frac{\overline{\omega' O}^2 + \overline{\omega\omega'}^2}{\overline{\omega O}^2} = \frac{(R-r)(R-2r)}{R(R-2r)} = 1 - \frac{R}{r}.$$

Solution par M. Critescu. Soient H l'orthocentre de ABC, G le centre de gravité, O' le centre du cercle des neuf points. Comme H et O, O et O', ω et ω' sont des couples de points correspondants des triangles inversement semblables ABC, A'B'C', les points O, G, O', H sont en ligne droite, et HG = 2GO = 4GO' (théorème connu); de même, ω, G, ω' sont en ligne droite et ωG = 2Gω'. Soit m le milieu de ωO; le triangle ω'Oω donne

$$\overline{\omega' O}^2 + \overline{\omega'\omega}^2 = 2\overline{\omega' m}^2 + 2\overline{m\omega}^2. \qquad (1)$$

Les droites ωO, O'ω' sont parallèles et dans le rapport 2 : 1; donc ωmω'O' est un parallélogramme, et ω'm = O'ω. D'après des théorèmes connus

$$\overline{m\omega}^2 = \tfrac{1}{4}\overline{\omega O}^2 = \tfrac{1}{4}R(R-2r), \quad \omega' m = O'\omega = \tfrac{1}{2}R - r\ (*), \text{ etc.}$$

(*) Le cercle des neuf points touche le cercle inscrit.

Question 1010.

(Voir *Mathesis*, (2) v. p. 80).

Sur la normale en un point X *d'une ellipse* (E) *on porte des longueurs* XP *et* XQ *égales au demi-diamètre parallèle à la tangente en* X. *Par les points* P *et* Q *on fait passer deux cercles dont les centres sont situés respectivement sur les diamètres passant par* P *et* Q. *La tangente en* X *rencontre ces deux cercles en deux couples de points* M, M′ *et* N, N′. *Si le point* X *varie sur* (E), *l'un des couples décrit une ellipse, l'autre une hyperbole. Ces deux courbes et l'ellipse* (E) *sont confocales.* (Cl. Servais.)

Solution par M. Liénard. Le point P parcourt le cercle directeur (C) de l'ellipse (E′)

$$\frac{x^2}{a^2+ab}+\frac{y^2}{b^2+ab}=1,$$

homofocale à E.

L'ellipse E est la courbe polaire de (C) par rapport à E′.

Enfin, le pôle, par rapport à E′, d'une tangente à la conique E, est sur la normale à E (Coniques confocales, Salmon).

Ces propriétés entraînent la question proposée.

Solution analytique par M. Déprez. Soient $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ les coordonnées de X; on trouve facilement pour celles de P, Q,

$$\mathrm{P}\begin{cases}(a+b)\cos\varphi,\\(a+b)\sin\varphi,\end{cases}\qquad \mathrm{Q}\begin{cases}(a-b)\cos\varphi,\\-(a-b)\sin\varphi.\end{cases}$$

Les droites OP, OQ et la tangente en X ont respectivement pour équations

$$y=x\operatorname{tg}\varphi,\quad y=-x\operatorname{tg}\varphi,$$
$$ay\sin\varphi+bx\cos\varphi=ab; \tag{1}$$

on en déduit les coordonnées du centre de la première circonférence :

$$\frac{ab\cos\varphi}{a\sin^2\varphi+b\cos^2\varphi},\quad \frac{ab\sin\varphi}{a\sin^2\varphi+b\cos^2\varphi};$$

ensuite, l'équation de cette circonférence

$$\left(x-\frac{ab\cos\varphi}{a\sin^2\varphi+b\cos^2\varphi}\right)^2+\left(y-\frac{ab\sin\varphi}{a\sin^2\varphi+b\cos^2\varphi}\right)^2=$$
$$\left(\frac{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}{a\sin^2\varphi+b\cos^2\varphi}\right)^2. \tag{2}$$

L'équation du lieu des points M, M' s'obtient en éliminant φ entre (1) et (2). A cet effet, éliminons tour à tour y et x entre (1) et (2); nous aurons

$$x^2(a\sin^2\varphi + b\cos^2\varphi) - 2abx\cos\varphi - a^2(a\sin^2\varphi - b\cos^2\varphi) = 0, \quad (3)$$

$$y^2(a\sin^2\varphi + b\cos^2\varphi) - 2aby\sin\varphi + b^2(a\sin^2\varphi - b\cos^2\varphi) = 0. \quad (4)$$

Si nous ajoutons les équations (3) et (4) après les avoir multipliées respectivement par b et a, nous aurons en tenant compte de (1) et en supprimant le facteur $a\sin^2\varphi + b\cos^2\varphi$:

$$bx^2 + ay^2 - ab(a+b) = 0. \quad (5)$$

Le lieu est donc une ellipse homofocale à l'ellipse proposée.

Le lieu des points N, N' s'obtient en changeant, dans les calculs précédents, b en $-b$, et φ en $-\varphi$; c'est une hyperbole homofocale à la courbe donnée.

QUESTIONS D'EXAMEN.

764. Démontrer la formule

$$2^m + 2^{m-1}C_{1,0} + 2^{m-2}C_{2,1} + 2^{m-3}C_{3,2} + \cdots + 2^2C_{2m-1,m-2} + 2C_{2m-2,m-2} + C_{2m\,m-1} = C_{2m+1,m}. \quad \text{(Soons.)}$$

On a

$$C_{2m+1,m} = C_{2m,m} + C_{2m,m-1}; \quad (1)$$

$$C_{2m,m} = C_{2m-2,m} + 2C_{2m-2,m-1} + C_{2m-2,m-2};$$

ou

$$C_{2m,m} = 2C_{2m-2,m-1} + 2C_{2m-2,m-2}. \quad (2)$$

Dans la formule (2) remplaçons m successivement par m, $m-1$, $m-2$, ... 2, 1 et faisons la somme des égalités ainsi obtenues après les avoir multipliées respectivement par 1, 2, 2^2, ..., 2^{m-1}, etc.

765. La normale en un point M d'une ellipse rencontre les axes en N et N'. Le centre de courbure relatif à M est en G. Si φ est l'angle d'anomalie excentrique en M, on a

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{\overline{CN}}{\overline{CN'}}}. \quad \text{(E. N. Barisien.)}$$

Cela résulte des formules faciles à démontrer

$$\overline{CN}^2 = \frac{c^4}{a^2b^2}\sin^4\varphi\,(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi),$$

$$\overline{CN'}^2 = \frac{c^4}{a^2b^2}\cos^4\varphi\,(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi).$$

766. Maximum ou minimum de $\sin^7 x \cos^5 x$.

Le carré de cette expression étant $(\sin^2 x)^7 (\cos^2 x)^5$ et la somme $\sin^2 x + \cos^2 x$ étant constante on pose

$$\frac{\sin^2 x}{7} = \frac{\cos^2 x}{5} = \frac{1}{12}.$$

On trouve un maximum dans le premier ou le troisième quadrant, un minimum dans chacun des autres quadrants du cercle trigonométrique.

767. Trouver une valeur de a telle que les équations

$$x^2 - (a+2)x + 3a - 5 = 0, \quad (a-3)x^2 - 2ax + 4a - 8 = 0$$

aient une racine commune.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1093. L'hyperbole des pieds des normales menées à une ellipse, d'un point mobile sur la circonférence qui a pour diamètre un axe de cette ellipse, enveloppe une kreuzcurve. (BARBETTE.)

1094. Réduire en fraction continue périodique l'expression $\sqrt{a^2-2}$, a étant un nombre entier plus grand que 2.

Peut-on développer de même $\sqrt{a^2+a+1}$, le nombre des termes de chaque période étant indépendant de a ? (J., Liége.)

×**1095.** Construire un pseudocarré ABCD, connaissant :

1° Le côté AB et les distances des sommets A, B au côté opposé CD;

2° Le côté AB et les distances des sommets C, D au côté AB;

3° La diagonale AC, le côté AB et soit la distance du milieu de AB à CD, soit la distance du milieu de CD à AB;

4° Les côtés opposés AB, CD et leur angle;

5° Les côtés AB, CD et la diagonale AC;

6° La diagonale AB et les angles opposés C, D;

7° Les côtés AB, AD et l'angle B. (DÉPREZ.)

1096. Chercher les lieux du centre, des foyers et des sommets des coniques inscrites dans un triangle donné et dont l'axe focal a une direction donnée. (DÉPREZ.)

Rectification. L'énoncé de la question 1092 étant partiellement inexact sera rectifié dans la livraison de décembre.

PROPRIÉTÉS DES CERCLES DE CHASLES (*).

par M. E. N. Barisien.

(Voir *Mathesis* (2), V. pp. 129, 158 et 241) (**).

111. Le lieu du point d'intersection d'une normale à l'ellipse E au point d'angle excentrique φ avec la droite $y = kx \operatorname{tg} \varphi$ est l'ellipse

$$x^2 + \frac{y^2}{k^2} = \frac{c^4}{(ab - k)^2}.$$

Pour $k = \pm 1$, on retrouve les cercles de Chasles Σ et Σ'.

112. Si on porte sur la normale en un point de E, une longueur égale à n fois le demi-diamètre conjugué de celui qui passe en ce point, le lieu de l'extrémité se compose de deux ellipses ayant pour demi-axes $a \pm nb$, $b \pm na$.

Pour $k = \pm 1$, on retrouve les cercles Σ et Σ'.

113. L'aire de la podaire du centre de la développée de l'ellipse E est équivalente à la moitié de l'aire du cercle Σ'.

114. Si on considère l'ellipse E et le cercle concentrique à E, de rayon $\frac{ab}{a+b}$, et si on mène une corde de E tangente à ce cercle, le lieu du point de rencontre des normales aux extrémités de la corde est une courbe fermée dont l'aire est trois fois l'aire du cercle Σ'.

Si le cercle concentrique a pour rayon $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, le lieu analogue résultant est une courbe dont l'aire est équivalente à celle du cercle Σ'.

115. On considère l'ellipse E et l'ellipse E′ égale et concentrique à E, dont les axes ont même direction que ceux de E, mais sont de noms contraires. Soient OA et OB deux demi-diamètres conjugués de E, et COC′ le diamètre de E′ perpendiculaire à OB.

1° Le lieu du point de rencontre des normales à E en A et à E′ en C est le cercle Σ.

(*) Cet article est un complément de celui que nous avons publié en 1895. Voir aussi les *Notes sur les cercles de Chasles*, de M. Droz Farny. *Mathesis* (2) VI p. 193.

(**) Les notations qui vont suivre ne seront pas toujours les mêmes que celles de l'article précité. Elles seront d'ailleurs indiquées au fur et à mesure de l'exposition des propriétés.

2° Le lieu du point de rencontre des normales à E en A et à E′ en C′ est le cercle Σ′.

116. Soient M un point de E, M′ le point correspondant du cercle principal, N le point correspondant du cercle Σ. De M, on mène deux tangentes au cercle concentrique à E et de rayon $\frac{ab}{a+b}$. La droite qui joint les seconds points de rencontre de ces tangentes avec E est tangente au cercle précédent à son point de rencontre avec la droite NM′.

117. En un point quelconque A de l'ellipse de centre O, on mène une corde AI également inclinée avec OA sur les axes. Les normales en A et I se rencontrent en H. De H on peut abaisser les deux autres normales dont les pieds sont B et C. Le lieu des sommets des triangles formés par les tangentes à A, B, C est le cercle Σ.

Propriétés spéciales aux triangles inscrits dans le cercle Σ *et circonscrits à l'ellipse* E (*).

Rectification de la propriété **103** *et autres propriétés qui en découlent*, d'après un article de M. E. Lucas (NCM, V, 161).

— Le lieu des sommets du triangle circonscrit à l'ellipse E et dont les hauteurs sont normales à l'ellipse en des points autres que les points de contact des côtés opposés, se compose des cercles Σ et Σ′. (Le cercle Σ est le seul qui convienne à des triangles réels).

— Le lieu de l'orthocentre de ce triangle correspondant au cercle Σ est le cercle Σ′.

— Le lieu des sommets des triangles ABC circonscrits à E et dont les hauteurs sont normales à E aux points de contact A′, B′, C′ des côtés opposés, se compose de deux ellipses (et non d'une sextique, comme il est indiqué à la propriété 103, *Mathesis*, (2), V, p. 249).

— Le lieu de l'orthocentre de ces triangles ABC se compose de deux ellipses.

— Les normales en A, B, C, à chacune des ellipses lieu de ces points concourent en un même point : chacun de ces points décrit une ellipse.

— Le rapport de la hauteur AA′ au diamètre conjugué de celui qui passe par A′, dans l'ellipse donnée, est constant.

(*) Les propriétés 101 à 110 [*Mathesis* (2). V. pp. 248 et 249] sont déjà relatives à ces triangles.

118. Soit ABC un triangle inscrit dans Σ et circonscrit à E. Les hauteurs issues de A, B, C sont respectivement normales à E en A', B', C'. Le triangle A' B' C' enveloppe l'ellipse

$$b^4x^2 + a^4y^2 = \frac{a^4b^4}{(a+b)^4}.$$

119. O étant le centre de E, le lieu du point de rencontre de OA' et B'C' est la courbe

$$(b^2x^2 + a^2y^2)^2 = \frac{a^4b^4}{(a+b)^2}(b^2x^2 + a^2y^2)$$

ayant pour aire

$$U = \frac{\pi a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{5}{2}}}{2(a+b)}.$$

120. Le lieu des pieds des hauteurs du triangle ABC a pour aire

$$U = \pi ab + 2\pi(a-b)^2.$$

121. Le lieu du centre de gravité du triangle ABC est le cercle

$$x^2 + y^2 = \frac{(a-b)^2}{9}.$$

122. Le lieu du centre du cercle des neuf points du triangle ABC est le cercle

$$x^2 + y^2 = \frac{(a-b)^2}{4}.$$

123. A'', B'', C'', étant les pieds des hauteurs, on a les relations

$$AA' \times A'A'' = BB' \times B'B'' = CC' \times C'C'' = 2ab,$$

$$\overline{OA'}^2 + \overline{OB'}^2 + \overline{OC'}^2 + \overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2 = 3(a^2 + b^2).$$

124. Le lieu du point d'intersection de la tangente en A' avec B'C' est la kreuzcurve

$$\frac{a^4(a+2b)^2}{x^2} + \frac{b^4(2a+b)^2}{y^2} = c^4.$$

125. Le lieu du point de rencontre de la tangente en A avec BC est la kreuzcurve

$$\frac{a^2(a+2b)^2}{x^2} + \frac{b^2(2a+b)^2}{y^2} = (a-b)^2.$$

126. Le lieu du point d'intersection de la tangente en A et de B'C' est la kreuzcurve

$$\frac{a^4[(a+b)^2+b^2]^2}{x^2}+\frac{b^4[(a+b)^2+a^2]^2}{y^2}=c^4(a+b)^2.$$

127. Un côté K du triangle ABC et la hauteur H correspondante sont liés par la relation

$$H^2[4(a+b)^2-K^2]=[4(a+b)^2+2ab-K^2]^2.$$

128. Les hauteurs du triangle A'B'C' sont normales à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{(a^3-b^3)^2}{(a^4-b^4)^2}.$$

129. Le lieu du centre de gravité du triangle A'B'C' est une courbe fermée ayant pour aire

$$U=\frac{\pi ab}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2.$$

130. Le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle A'B'C' a pour aire

$$U=\frac{3\pi(a-b)^2}{4}.$$

On pourrait trouver aussi l'aire du lieu de l'orthocentre du triangle A'B'C' et l'aire du lieu du centre des neuf points de ce triangle. Chacune de ces courbes est unicursale.

131. Soit I le pied de la quatrième normale abaissée de l'orthocentre H de ABC sur l'ellipse E. Le lieu des centres des cercles A'B'I, A'C'I, B'C'I est une courbe ayant pour aire

$$U=\frac{\pi(a-b)^2}{4}.$$

132. La droite A'I intercepte sur les axes de l'ellipse E une longueur constante égale à $(a+b)$: par conséquent, les droites A'I, B'I, C'I enveloppent une hypocycloïde à quatre rebroussements ayant pour équation

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=(a+b)^{\frac{2}{3}}$$

133. Le lieu du milieu des cordes A'I, B'I, C'I est la courbe

$$(b^2x^2+a^2y^2)^2(b^4x^2+a^4y^2)=(a+b)^2a^4b^4x^2y^2.$$

134. Le lieu des pôles des cordes A'I, B'I, C'I par rapport à l'ellipse E est la kreuzcurve

$$\frac{a^4}{x^2}+\frac{b^4}{y^2}=(a+b)^2\,.$$

135. Le lieu du centre de l'hyperbole d'Apollonius relative à l'orthocentre H du triangle ABC a pour aire

$$U=\frac{\pi a^2b^2}{(a+b)^2}\,.$$

136. Le lieu des milieux des côtés du triangle ABC est la podaire du centre de l'ellipse E.

137. La droite OA passe par le milieu de B'C'.

138. Les droites OA' et A'I sont également inclinées sur les axes de l'ellipse.

139. Le lieu du point de rencontre des droites BC et B'C' est la kreuzcurve

$$\frac{a^6}{x^2}+\frac{b^6}{y^2}=c^4\,.$$

140. Le lieu du point de rencontre des droites OA et B'C'est la courbe

$$(b^2x^2+a^2y^2)=\frac{a^4b^4}{(a+b)^2}(x^2+y^2)\,,$$

ayant pour aire

$$U=\frac{\pi ab\,(a^2+b^2)}{2\,(a+b)^2}\,.$$

141. Le lieu des milieux des hauteurs du triangle ABC est une courbe ayant pour aire

$$U=\pi\,(a-b)^2+\frac{\pi ab}{4}\,.$$

142. Le lieu du centre de gravité du triangle A'BC est une courbe ayant pour aire

$$U=\frac{\pi}{9}[2\,(a^2+b^2)-3ab].$$

143. Le lieu du centre de gravité du triangle AB'C' est la courbe

$$9(x^2+y^2)(a^2y^2+b^2x^2)^2=\frac{1}{(a+b)^2}[(a+b)^2(a^2y^2+b^2x^2)-2a^2b^2(x^2+y^2)]^2,$$

ayant pour aire

$$U = \frac{\pi}{9}\left[(a-b)^2 + \frac{2ab\,(a^2+b^2)}{(a+b)^2}\right].$$

144. J étant le symétrique de I par rapport à O, les droites A'J, B'J, C'J enveloppent une courbe ayant pour aire

$$U = \pi ab + \tfrac{1}{8}\,\pi\,(a+b)^2.$$

145. Le lieu du milieu des droites A'J, B'J et C'J est la courbe

$$(b^2x^2 + a^2y^2)^2\,(x^2+y^2) = a^2b^2\,(b^2x^2 - ay^2)^2,$$

dont l'aire est la moitié de celle de l'ellipse E.

146. Le lieu des pôles des droites A'J, B'J, C'J par rapport à l'ellipse E est la courbe

$$(b^2x^2 - a^2y^2)^2 = a^2b^2\,(x^2+y^2).$$

147. Le lieu de pôles des droites A'J, B'J, C'J par rapport au cercle Σ est la courbe

$$(a^2x^2 - b^2y^2)^2 = (a+b)^4\,(a^4x^2 + b^4y^2).$$

148. Le lieu des projections du centre O sur les droites A'J, B'J et C'J est la courbe

$$(x^2+y^2)^2\,(b^4x^2 + a^4y^2) = (a^2x^2 - b^2y^2)^2.$$

C'est une courbe unicursale dont on pourrait déterminer l'aire.

149. Le lieu du point d'intersection des droites OA et A'J est la courbe

$$(b^2x^2 - a^2y^2)^2\,(x^2+y^2) = a^2b^2\,(bx^2 - ay^2)^2.$$

150. La droite A'J rencontre OA en son milieu. Donc, le lieu du point de rencontre des droites OA et A'J est le cercle

$$4\,(x^2+y^2) = (a+b)^2.$$

151. Soient a, b, c, les points de contact du triangle ABC avec l'ellipse E. Les droites Aa, Bb, Cc sont normales à l'ellipse

$$\frac{x^2}{(a+2b)^2} + \frac{y^2}{(2a+b)^2} = \frac{1}{9}.$$

152. Les droites Aa, Bb, Cc, concourent en un même point dont le lieu a pour aire

$$U = \frac{3\pi ab\,(a-b)^2}{(a+2b)\,(b+2a)}.$$

152. Soit dans l'ellipse E, la corde AB, polaire d'un point quelconque du cercle de Monge par rapport à E. Les normales en A et B se rencontrent en N. Le lieu de N est une courbe dont l'aire est équivalente à celle du cercle Σ' (Le cercle de Monge, ou *cercle orthoptique*, est le lieu du sommet des angles droits circonscrits à l'ellipse).

BIBLIOGRAPHIE.

Hoene Wroński. Jego życie i prace napisal S. Dickstein. Cracovie, 1896. (Un volume in-8° de IV-368 p. avec portrait et autographe).

Notice sur la vie et les travaux de Wronski (en polonais). Le catalogue des écrits de Wronski ou relatifs à Wronski, qui n'occupe pas moins de cent pages, est malheureusement la seule partie de l'ouvrage de M. Dickstein qui soit accessible à la plupart des personnes qui s'intéressent au célèbre géomètre polonais.

Algebraic Analysis, Solutions and Exercises, by G. A. Wentworth, A. M., J. A. Mc Lellan. LL. D., and J. C. Glashan. Part. I. Boston, U. S. A., Ginn and C°, 1889 (IX-418 p., in-8°; cartonné).

Sommaire : 1-4. Calcul algébrique. 5-6. Équations du premier degré. 7. Équations du second degré. 8. Puissances et radicaux. 9. Équations du 3e et du 4e degré. 10. Déterminants (plus de cent pages d'exercices).

Traité d'Analyse par E. Picard, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences de Paris. Tome III. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1896 (XIV-568 p. gr. in-8). Prix : 18 fr.

Théorie des singularités des intégrales des équations différentielles. Étude du cas où la variable reste réelle; étude des courbes définies par des équations différentielles. Équations linéaires; analogies entre les équations algébriques et les équations linéaires.

Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal par G. Darboux, membre de l'Institut. professeur à la Faculté des Sciences de Paris. Paris, Gauthier-Villars et fils (4 vol., gr. in-8 avec figures dans le texte, se vendant séparément). Prix de chaque volume, 15 fr.

Première partie : Généralités. Coordonnées curvilignes. Surfaces minima (VI-513 p.); 1887. — Deuxième partie : Les congruences et les équations linéaires aux dérivées partielles. Des lignes tracées sur les surfaces (X-522 p.); 1889. — Troisième partie : Lignes géodésiques et courbure géodésique. Paramètres différentiels. Déformation des surfaces (VIII-512 p.); 1894. — Quatrième partie : Déformation infiniment petite et représentation sphérique. Notes diverses (VIII-548 p.); 1896.

Le *Cours d'Analyse* de M. E. Picard et la *Théorie des surfaces* de M. G. Darboux sont des ouvrages de premier ordre, mais ils ne rentrent que très partiellement dans le cadre de *Mathesis*. Il nous suffira donc de les avoir signalés à nos lecteurs.

Geometria General par D. Z. Garcia de Galdeano, Catedrático de Geometria analitica de la Universidad de Zaragoza. Zaragosa, C. Arino, 1895 (168 + 152 p. in-8°, avec 61 + 145 figures dans le texte). Prix : 10 fr.

Première partie. *Théorèmes, problèmes et méthodes géométriques.* Introduction historique. I. Généralités sur les propositions et les méthodes. 1. Propositions. 2. Analyse géométrique. 3. La méthode synthétique. II. *Systèmes ou méthodes géométriques.* 1. La méthode de la géométrie euclidienne. 2. La méthode trigonométrique. 3. Les méthodes de la géométrie projective (méthode de Poncelet; calcul barycentrique de Möbius; Chasles et le rapport anharmonique; von Staudt). 4. Méthodes analytico-géométriques (généralités; imaginaires; équipollences; méthode de Grassmann; quaternions).

Deuxième partie. *Systématisation de la géométrie.* 1. Préliminaires; premières propositions d'Euclide; notions de géométrie non euclidienne; 2. Systématisation de la géométrie élémentaire. 3. Figures adjointes au triangle. 4. Coniques. 5. Lieux géométriques. 6. Théorèmes et problèmes. 7. Géométrie récente. 8 Systèmes de cercles et de coniques.

An Elementary Treatise on Rigid Dynamics by W. J. Loudon, B. A. Demonstrator in Physics in the University of Toronto. New-York and London. Macmillan and C°, 1896 (IX-236 pages, cartonné).

Sommaire. 1-2. Moments d'inertie, ellipsoïde d'inertie. 3. Le principe de d'Alembert et le principe de l'énergie. 4-5. Mouvement autour d'un axe fixe. 6-8. Mouvement autour d'un point fixe. 9. Mouvement d'un corps libre. 10. Gyroscopes de Foucault, (électrique) de Hopkins, de Bessel, de Magnus. — Note sur le pendule et la toupie. — Problèmes divers (306 exemples, pp. 177-236). — Il y a beaucoup d'exemples dans les chapitres 1 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 comme application des principes.

Index operum Leonardi Euleri confectus a J. G. Hagen, S. J. directore speculae astronomicae collegii Georgiopolitani Washington D. C. Berolini, Felix L Dames. MDCCCXCVI. (In 8° de VIII-80 pages). Prix : 2 marcs.

Ce catalogue nouveau des œuvres d'Euler est plus complet que les catalogues antérieurs de 1783 (N. Fuss), de 1787, et de 1843 (P. H. Fuss) et est fait d'une manière plus systématique. Il comprend 796 numéros, dont 419 se rapportent aux mathématiques pures, et sont classés en 20 sections, 264 à la mécanique et à la physique, classés en 11 sections, 185 à l'astronomie, classés en 4 sections, enfin 28 numéros sont consacrés à des ouvrages divers classés en 3 sections. Un appendice contient 1° l'indication de 7 écrits inédits, de 6 qui sont perdus et de 8 qui sont faussement attribués à Euler et 2° Une comparaison du catalogue actuel avec celui de 1843. Les ouvrages à part publiés par Euler sont indiqués en tête de chacune des quatre grandes subdivisions, sauf deux recueils de Mémoires réunis par lui en volume, les *Opuscula varii argumenti*, et les *Opuscula analytica*. Selon nous, les titres de ces deux ouvrages auraient dû être donnés exactement dans la préface.

Le travail du P. Hagen peut être regardé comme l'introduction à une édition des

Œuvres complètes d'Euler, laquelle comprendrait probablement 25 volumes in-4° et coûterait au moins de 150,000 à 200,000 francs. Nous avons appris que l'auteur a déjà réuni, dans ce but, une somme de 20000 dollars.

Recueil de problèmes d'Arithmétique, à l'usage des Écoles moyennes, des Écoles normales, des classes d'humanités et des Cours professionnels, par l'abbé E. GELIN, Docteur en philosophie et en théologie, Professeur de mathématiques au Collège Saint-Quirin à Huy. *Troisième édition*, considérablement augmentée. Huy, 1896. Un volume de 284 pages in-8°. Prix : 2 fr.

Cette troisième édition du *Recueil de problèmes* de M. GELIN renferme 3086 problèmes, dont 2387 d'*Arithmétique*, 450 d'*Arithmologie* (*) et 249 sur la *mesure des surfaces et des volumes*. Elle contient 1068 problèmes de plus que la deuxième édition et 1631 de plus que la première. En outre, plusieurs numéros de la précédente édition ont été considérablement augmentés : ainsi l'ancien n° 135, qui renfermait 10 exercices sur l'*addition des fractions*, est remplacé par le n° 277, qui en renferme 60.

Pour donner un spécimen des problèmes nouveaux, citons, par exemple, les suivants, sur les *mesures de longueur* et sur les *poids* :

658. On veut lier, dans le sens de la longueur et de la largeur, un paquet qui a 60 cm. de long, 25 cm. de large et 15 cm. de haut : quelle doit être la longueur de la corde, en comptant 10 cm. pour le nœud? — R. 2^m40.

1017. On a expédié, en 1893, 1750 millions de cartes postales internationales. Ces cartes ont 14 cm. de longueur, 9 cm. de largeur, $\frac{1}{4}$ de millimètre d'épaisseur et un poids de 3 g. Calculer : 1° le poids total des cartes expédiées en 1893; 2° leur volume; 3° la hauteur à laquelle on arriverait en les empilant; 4° Quelle longueur on obtiendrait en les plaçant en contact dans le sens de leur longueur; 5° la surface totale qu'elles pourraient recouvrir. R. 1° 5,250,000 kg.; etc.

L'ouvrage se termine par une table de 33 nombres usuels, et par les valeurs, à dix décimales, de $\sqrt{n}$, $\log n$, $n\pi$ et $n : \pi$, depuis $n = 1$ jusqu'à $n = 100$.

Quoique l'ouvrage de M. GELIN se soit accru de moitié (284 pages au lieu de 196), le prix n'a cependant été augmenté que d'un septième (2 fr. au lieu de 1.75 fr.).

Annuaire pour l'an 1897 publié par le Bureau des longitudes; avec des Notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars. 1896. (In-18 de V-918 pages, avec 2 cartes magnétiques.

Outre les renseignements pratiques qu'il contient chaque année, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1887 renferme des articles dus aux savants les plus illustres sur les Monnaies, la Statistique, la Géographie, la Minéralogie, etc., enfin les Notices suivantes : 1. Notice sur le mouvement propre du système solaire, par M. F. Tisserand. 2. Les rayons cathodiques et les rayons Röntgen, par M. H. Poin-

---

(*) Les 450 *Questions d'Arithmologie* du *Recueil de problèmes* de M. GELIN ont été données en supplément à la livraison de mars de *Mathesis* de cette année.

carré. 3. Les époques dans l'Histoire astronomique des planètes, par M. J. Janssen. 4. Notice sur la quatrième Réunion du Comité international pour l'exécution de la Carte photographique du Ciel, par M. F. Tisserand. 5. Notice sur les travaux de la Commission internationale des étoiles fondamentales, par M. F. Tisserand. 6. Discours prononcé aux funérailles de M. Hippolyte Fizeau, par M. A. Cornu. 7. Discours prononcés aux funérailles de M. Tisserand, par MM. H. Poincaré, J. Janssen et M. Lœwy. 8. Travaux au mont Blanc en 1896, par M. Janssen.

Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques. Troisième série : Fiches 201 à 300. Quatrième série : Fiches 301 à 400. Paris, Gauthier-Villars et fils. Juillet 1895, octobre 1896 (200 feuillets détachés, dans deux boîtes cartonnées). Prix : 4 fr.

Cours de géométrie descriptive à l'usage des candidats à l'École polytechnique, etc., par X. ANTOMARI, ancien élève de l'École normale supérieure, etc. Paris, Nony et Cie, 1897 (gr. in-8 de 572 pages). Prix : 10 fr.

Petites tables de logarithmes à sept décimales pour les nombres et les lignes trigonométriques d'après Vega et Callet, par AD. LEBÈGUE. Bruxelles, Janssens, 1896 (VIII-278 p. in-18). Prix : fr. 3-50.

NOTE MATHÉMATIQUE.

11. *Sur la question* 949 (*Mathesis*, (2) VI, p. 27. La solution de M. Soons ne donne pas des carrés distincts pour la décomposition de $(a^2+b^2)^6$ en deux et trois carrés. Voici des identités dans lesquelles les carrés sont distincts :

$$1^\circ\quad (a^2+b^2)^6=(a^2-b^2)^2(a^4-14a^2b^2+b^4)^2+4a^2b^2(3a^4-10a^2b^2+3b^4)^2.$$

$$2^\circ\quad (a^2+b^2)^6=16a^2b^2(a^2-b^2)^4+64a^4b^4(a^2-b^2)^2+(a^2+b^2)^2(a^4-6a^2b^2+b^4)^2.$$

3° En remplaçant, dans le second membre de la dernière identité $(a^2+b^2)^2$ par $(a^2-b^2)^2+4a^2b^2$, on obtiendrait une décomposition en quatre carrés, différente de celles qui ont été données par M. Soons.

(E. FAUQUEMBERGUE.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 1001.

(Voir *Mathesis*, (2) V, p. 31).

Un disque circulaire mobile autour d'un axe passant par son centre et perpendiculaire à son plan reste immobile sous l'action de trois forces tangentielles AA', BB', CC', *appliquées en des points quelconques de son péri-*

mètre et inversement proportionnelles aux longueurs des tangentes, ces lignes étant mesurées depuis le point de contact de chacune d'elles A, B, C *jusqu'à la droite* BC, CA *ou* AB *menée par les deux autres points de contact.* (F. J.)

Solution par MM. J. Jonesco, Strymeersch, Klompers *et* Mandart. La somme des moments des forces par rapport à l'axe du disque doit être nulle. La question revient donc à démontrer que

$$\frac{1}{AA_1}+\frac{1}{BB_1}+\frac{1}{CC_1}=0(*), \qquad (1)$$

A_1, B_1, C_1 désignant les points de rencontre des tangentes en A, B, C avec les côtés opposés du triangle ABC; les segments AA_1, BB_1, CC_1 sont supposés soumis à la règle des signes, d'après le sens de la rotation que des forces représentées par ces segments imprimeraient au disque.

Les triangles semblables AA_1B, CA_1A donnent successivement

$$\frac{AA_1}{A_1B}=\frac{A_1C}{AA_1}=\frac{b}{c}, \quad A_1B=AA_1\frac{c}{b}, \quad A_1C=AA_1\frac{b}{c},$$

$$a=A_1C-A_1B=AA_1\frac{b^2-c^2}{bc}, \quad \frac{1}{AA_1}=\frac{b^2-c^2}{abc}.$$

Par analogie

$$\frac{1}{BB_1}=\frac{c^2-a^2}{abc}, \quad \frac{1}{CC_1}=\frac{a^2-b^2}{abc}, \text{ etc.}$$

Question 1011.

(Voir *Mathesis*, (2), V, p. 80).

Par un point quelconque M *d'une parabole on mène deux cordes* MA, MB *parallèles chacune à une direction donnée.* 1° *La corde* AB *enveloppe une parabole*; 2° *Le lieu du centre de gravité du triangle* MAB *est une parabole.* (E. N. Barisien.)

Solution par M. Cristesco. Soient $y^2=2px$ l'équation de la parabole donnée. Si les coordonnées des points M, A, B sont

$$\left(\frac{\beta^2}{2p},\beta\right), \quad \left(\frac{y_1^2}{2p},y_1\right), \quad \left(\frac{y_2^2}{2p},y_2\right),$$

(*) Question 620 du Journal de Vuibert. (Tzitzeica.)

Les coefficients angulaires des cordes MA, MB seront

$$\frac{\beta - y_1}{\frac{\beta^2}{2p} - \frac{y_1^2}{2p}} = \frac{2p}{\beta + y_1}; \quad \frac{2p}{\beta + y_2}.$$

Comme ils sont constants on aura,

$$\beta + y_1 = m, \quad \beta + y_2 = n. \tag{1}$$

L'équation de la corde AB est

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_1 + y_2}\left(x - \frac{y_1^2}{2p}\right);$$

ou en tenant compte de (1),

$$y + \beta - m = \frac{2p}{m + n - 2\beta}\left[x - \frac{(m-\beta)^2}{2p}\right]. \tag{2}$$

Cette équation, ordonnée par rapport à β, devient

$$\beta^2 + (2y - m - n)\beta + 2px - (m+n)y + mn = 0. \tag{3}$$

En exprimant qu'elle a une racine double en β, on trouve que l'enveloppe de AB est la parabole

$$y^2 - 2px + \frac{1}{4}(m-n)^2 = 0.$$

2° Les coordonnées du centre de gravité du triangle MAB sont

$$x = \frac{\beta^2 + (m-\beta)^2 + (n-\beta)^2}{6p}, \quad y = \frac{\beta + (m-\beta) + (n-\beta)}{3};$$

ou

$$x = \frac{3\beta^2 - 2(m+n)\beta + m^2 + n^2}{6p}, \quad y = \frac{m+n-\beta}{3}.$$

Si l'on élimine β entre ces deux dernières équations, on trouve la parabole

$$27y^2 - 6px - 12(m+n)y + 2(m^2 + mn + n^2) = 0.$$

Solutions analogues par MM. Colart, Droz Farny, Déprez, Buysens, J. Jonesco, B. Jonesco, Mandart.

×Question 1012,

(Voir *Mathesis*, (2) V, p. 80).

Résoudre le système.

$$\operatorname{tg}(y+x) = 4\sin x + 2\cos x,$$
$$\operatorname{tg}(y-x) = 4\sin x - 2\cos x. \qquad \text{(J. Jonesco.)}$$

Solution par MM. Hacken, B. Jonesco, Déprez et Mandart. **Les équations proposées donnent, par addition et par soustraction,**

$$\operatorname{tg}(y+x) + \operatorname{tg}(y-x) = 8\sin x, \tag{1}$$
$$\operatorname{tg}(y+x) - \operatorname{tg}(y-x) = 4\cos x. \tag{2}$$

En divisant (1) par (2) et remplaçant tg **par** $\frac{\sin}{\cos}$ **on trouve**

$$\frac{\sin 2y}{\sin 2x} = 2\operatorname{tg} x, \quad \text{ou} \quad \sin 2y = 4\sin^2 x. \tag{3}$$

L'équation (2) peut s'écrire

$$\frac{2\sin 2x}{\cos 2x + \cos 2y} = 4\cos x. \tag{4}$$

On en déduit d'abord $\cos x = 0$, **solution qui, combinée avec (3), donne** $\sin 2y = 4$, **et, par suite, doit être écartée. On en tire ensuite**

$$\cos 2y = \sin x - \cos 2x. \tag{5}$$

L'élimination de y **entre (4) et (5) est facile. On trouve**

$$1 = 16\sin^4 x + (\sin x - 1 + 2\sin^2 x)^2,$$

ou

$$20\sin^4 x + 4\sin^3 x - 3\sin^2 x - 2\sin x = 0. \tag{6}$$

La solution $\sin x = 0$ **est à rejeter, car elle réduit le système proposé aux équations contradictoires** $\operatorname{tg} y = \mp 1$, $\operatorname{tg} y = \mp 2$. **L'équation (6) est vérifiée par** $\sin x = \frac{1}{2}$, **qui entraîne** $\sin 2y = 1$, **de sorte que**

$$x = n\pi + (-1)\frac{n\pi}{6}, \quad y = n'\pi + \frac{\pi}{4},$$

n **et** n' **étant des nombres entiers quelconques. En écartant la racine** $\sin x = \frac{1}{2}$ **on trouve l'équation**

$$10\sin^2 x + 7\sin x + 2 = 0,$$

dont les racines sont imaginaires.

Question 1070.

(Voir *Mathesis*, (2) VI, p. 128 et N.C.M., p. 238, t. III, p. 128).

Eliminer α et β ***entre les équations***

$$a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 = a^2b^2, \quad c^2\alpha^2 - (c^2 + a^2)\,a^2\alpha + a^4x = 0,$$
$$c^2\beta^2 - (c^2 - b^2)\,b^2\beta - b^4y = 0. \qquad \text{(H. Brocard.)}$$

Solution par M. E. Fauquembergue (La Rochelle). La première équation (ellipse) est vérifiée si l'on pose $\alpha = a\cos\varphi$, $\beta = b\sin\varphi$, et les deux autres deviennent :

$$c^2\cos^2\varphi - (c^2 + a^2)\cos\varphi + ax = 0, \tag{1}$$

$$c^2\sin^2\varphi - (c^2 - b^2)\sin\varphi - by = 0. \tag{2}$$

De celles-ci on déduit

$$ax\cos\varphi + by\sin\varphi = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi, \tag{3}$$

$$-ax\sin\varphi + by\cos\varphi = -2c^2\sin\varphi\cos\varphi. \tag{4}$$

L'équation (3) est celle de la perpendiculaire menée à l'extrémité $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ du diamètre de l'ellipse et l'équation (4) en est la dérivée relative à φ. Donc le problème proposé par M. Brocard revient à trouver l'enveloppe de cette perpendiculaire, problème traité par Tortolini, qui, en éliminant φ entre les équations (3) et (4), est parvenu à l'équation

$$[4(a^4 + b^4 - a^2b^2) - 3(a^2x^2 + b^2y^2)]^3$$
$$= [9a^2(2b^2 - a^2)x^2 + 9b^2(2a^2 - b^2)y^2 - 4(a^2 + b^2)(2a^2 - b^2)(2b^2 - a^2)]^2.$$

Mais, comme l'a fait observer Catalan (*Cours d'Analyse*, p. 461), au lieu de discuter cette équation, il vaut mieux tirer x et y des équations (3) et (4) ou plutôt, ici, des équations (1) et (2) :

$$x = \frac{a^2 + c^2\sin^2\varphi}{a}\cos\varphi, \quad y = \frac{b^2 - c^2\cos^2\varphi}{b}\sin\varphi,$$

et ces formules permettent de construire la courbe par points.

QUESTIONS D'EXAMEN.

768. Résoudre l'équation

$$\sqrt{x^2 + ax + b^2} + \sqrt{x^2 - ax + b^2} = \sqrt{a^2 + 2b^2}.$$

769. Résoudre et discuter l'équation

$$(1-m)x^2-2(1+m^2)x+1-m^2=0.$$

770. Trouver pour a, b des valeurs *entières* qui rendent possible le système

$$3x-2y=5a+3b-43,$$
$$4x+3y=2a+b+7,$$
$$9x+4y=5a+8.$$

771. Pour quelle valeur de a passe par un minimum la somme des carrés des racines de l'équation

$$(a-1)x^2-(5a+2)x+4a-7=0?$$

772. Trouver le nombre de permutations distinctes formées avec les lettres des mots : constitutionnellement, parallélipipède.

773. Montrer que dans aucun cas, une corde normale à l'ellipse ne peut passer par l'un de ses foyers. (E. N. Barisien.)

A déduire de ce que l'abcisse du pied de la normale sur l'axe focal a pour maximum $(c^2 : a.)$

774. La normale en un point quelconque M d'une hyperbole équilatère est divisée en deux parties égales par les axes de la courbe et le point M. (E. N. Barisien.)

A déduire de ce que le rapport des distances des segments de la normale compris entre M et les axes est égale à $b^2 : a^2.$)

775. Par une droite donnée mener un plan qui soit également incliné sur deux plans donnés. Le problème peut-il être indéterminé ?

QUESTIONS PROPOSÉES.

1092. (*Énoncé rectifié*). La tangente en un point M quelconque d'une ellipse rencontre le grand axe en T et le petit axe en T'; la normale au même point M rencontre le grand axe en N et le petit axe en N'; la normale au point M_1 conjugué de M rencontre le grand axe en N_1 et le petit axe en N'_1. La tangente en M_1 rencontre le grand axe en T_1 et le petit en T'_1. Montrer que :

1° Le lieu du point de rencontre des droites NN'_1 et N_1N' est une ellipse.

2° Le lieu du point de rencontre des droites TT'_1 et T_1T' est une kreuzcurve.

3° Le lieu du point de rencontre des droites NN'_1 TT'_1, ainsi que le lieu du point de rencontre des droites N_1N' et T_1T' se composent chacun d'une hyperbole équilatère.

4° Le lieu de la projection du centre de l'ellipse sur la perpendiculaire élevée à TT′ en son milieu, est une courbe du 8° degré.

5° La perpendiculaire élevée à NN′ en son milieu enveloppe une courbe fermée dont on demande d'évaluer l'aire.

6° La projection du centre de l'ellipse sur la perpendiculaire précédente est une courbe du 6° degré dont on demande l'aire.

7° Les perpendiculaires élevées à NN′ et $N_1N'_1$ en leurs milieux se rencontrent sur une courbe dont on demande l'aire. (E. N. Barisien.)

1097. Un mobile A parcourt une droite fixe Δ. On le vise au moyen d'un théodolite bien réglé. La lunette, de longueur $2a$, est mobile autour de son milieu, dans un cercle vertical, situé à une distance b de l'axe vertical de l'instrument. On demande la courbe décrite dans l'espace pour le centre de l'objectif.

Cas particuliers et vérifications diverses. (H. Brocard.)

1098. Soient A, B, C, D les pieds des normales menées d'un point P à une ellipse. Si les cordes AB, CD sont parallèles, 1° le lieu du point P se compose de deux droites; 2° les centres des circonférences PAB, PCD décrivent une hyperbole; 3° ces circonférences passent par un point fixe. (Déprez.)

×**1099.** Discuter le système

$$x^2 = a(x-y)(x-z),$$
$$y^2 = b(y-x)(y-z),$$
$$z^2 = c(z-x)(z-y).$$

1100. On considère une parabole P et la droite D, symétrique de la tangente au sommet de P par rapport à sa directrice. Soient M un point quelconque de D et AB la corde polaire de M par rapport à P. Montrer que :

1° Tous les triangles MAB ont leur orthocentre au sommet de P;

2° Le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et le centre du cercle des neuf points du triangle MAB décrivent chacun une parabole.

TABLE DES MATIÈRES(*).

ARITHMÉTIQUE; ANALYSE INDÉTERMINÉE.

Pages.

×Sur la division des nombres entiers; par M. Stuyvaert 21
×Sur la définition de la multiplicaton ; par MM. Laisant et Lemoine . . . 85
×Problème; par M. E. Barbette 131
×Sur les nombres parfaits impairs; par M. Stuyvaert 132
×Sur les fractions décimales périodiques mixtes; par M Socolof 132
×Du meilleur système de numération et de poids et mesures; par M. E. Gelin. 161
×Sur le moindre multiple; par M. Stuyvaert 198, 229
×Question 949; solutions par MM. Soons et Fauquembergue 27, 274
×Question 1009; solution par M. Fauquembergue 28
Question 1024; solution par M. Fauquembergue 30
Questions 219, 314, 315, 316, 362, 599, 553, 554 de la NCM; solution par M. Fauquembergue 54, 76, 101, 127, 140, 191, 210, 212
Question 933; solutions par M. J. Jonesco 134

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

Sur les valeurs principales des radicaux; par M. De Tilly 5
Sur le calcul des annuités viagères; par M. Fagnart 64
Sur une formule de Newton; par M. P. Mansion 84
Sur une suite récurrente; par M. J. Neuberg 88
Problème d'algèbre ; par M. J. Neuberg 201
×Questions 383 et 505; solutions par M. Stuyvaert. 229, 256
×Question 1012 ; solution par MM. Hacken, Mandart, etc. 277
Question 1070; solution par M. Fauquembergue 278

×GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE, MÉTAGÉOMÉTRIE.

Sur la géométrie non euclidienne; par MM. Dauge et Mansion 7
Problème de géométrie solide; par Hachette 18
Problème de Bruno; par Quetelet et M. Neuberg 19
Sur certains triangles; par M. E. N Barisien 33, 60
Un triangle est isoscèle, s'il a deux bissectrices égales (G. Tarry) 41
Théorème de géométrie ; par M. Soons 57
Sur les triangles à la fois semblables et homologiques; par M. V. Jerabek . 81
Sur un lieu géométrique élémentaire (J. N.) 83

(*) Rectifications, pp 56, 192, 264, 279. Les articles marqués d'une croix n'exigent, pour être compris, que la connaissance des mathématiques élémentaires. Page 134, lire question 933 et non 953.

Pages.

E. Carvallo. Résolution des équations 133
F. Chomé. Éléments de géométrie descriptive 87
E. Colart. Compléments d'algèbre (M. Stuyvaert) 44
G. Darboux. Théorie générale des surfaces. 271
M. Demartres. Cours d'analyse 47
G. Dickstein. Wronski 271
V. Eberhard. Grundgebilde der ebenen Geometrie 247
A. Faifofer. Aritmetica; algebra; geometria 174
de Galdeano. Geometria general 272
E. Gelin Précis de trigonométrie; problèmes d'arithméthique . . . 86, 273
L. Gérard. Géométrie; géométrie descriptive 46
J.-C. Glashan. Arithmetic 133
E. Goursat. Équations aux dérivées partielles du second ordre. 69
J. Graindorge. Notice nécrologique. 48
Hagen Index operum L. Euleri. 272
F. J Exercices de géométrie (J. N.) 47, 201
Jablonski, Cosmographie 46
C. Jordan. Cours d'analyse de l'École Polytechnique (P. M.) 249
L. Jowa. Géométrie plane. 247
C. Juel. Stereometri 247
F. Klein. Questions choisies de géométrie élémentaire (fr. et all.). . . . 87
A. Laisant. Problèmes d'algèbre, théorie des nombres, géométrie du triangle; (J. N.) 46, 252
A. Lambert. Géométrie élémentaire 47
Ad. Lebègue. Tables de logarithmes 274
G Lechalas. Étude sur l'espace et le temps 68
Lobatchefsky (Rapport du Comité; prix). 68, 228
W. J. Loudun. Rigid Dynamics. 272
Massau. Dynamique; hydrostatique; hydrodynamique 133
Mc Lellan. Algebra 174
Ch. Méray. Analyse infinitésimale. 88
B. Niewenglowski. Géométrie analytique (J. N.) 175
M. d'Ocagne. Géométrie descriptive et géométrie infinitésimale (P. M.) . . 207
E. Pascal. Calcolo infinitesimale (P. M.) 174
P. Painlevé. Leçons sur le Frottement 47
E. Picard. Cours d'analyse, t. III 271
Proceedings of the Edinburgh Society (J. N.) 203
Répertoire bibliographique des sciences mathématiques 68, 274
F. Rouché et Ch. de Comberousse Leçons de géométrie 87
T. J. Stieltjes. Essai sur la théorie des nombres. 47
J. Tannery et J. Molk. Fonctions elliptiques 88
G. Teixeira. Calculo differential (P. M.) 174
F. Tisserand. Exercices de calcul infinitésimal 177

Pages.

P. Tisserand et E. Andoyer. Cosmographie (H. B.) 247

G. A. Wenthworth, J. A. Mc Lellan et J. C. Glashan. Algebraic Analysis 271

QUESTIONS D'EXAMEN.

Questions 714 à 718 (p. 30); 719 à 724 (p. 55); 725 à 733 (p. 78); 734 à 747 (p. 102); 748 et 749 (p. 128); 750 à 752 (p. 141); 753 et 754 (p. 191); 755 à 761 (p. 214); 762 et 763 (p. 239); 764 à 767 (p. 263); 768 à 775 (p. 278).

SUPPLÉMENTS (108 pages).

P. Mansion. La géométrie non euclidienne avant Lobatchefsky (11 pages). — A. Demoulin. La géométrie réglée de M. G. Königs (4 pages).

E. Gelin. Problèmes d'arithmologie (32 pages).

E. Vigarié La bibliographie de la géométrie du triangle (14 pages).

P. Mansion. Premiers principes de Métagéométrie (17 pages).

QUESTIONS(*).

	POSÉE (1) I ou (2) I	RÉSOL (2) VI
95	206 (28)	
	(1) III ou (2) I	
252	143 (28)	NR
267	175 (28)	NR
	(1) IV ou (2) I	
×333	119 (29)	NR
353	159	
×357	159	
383	231 (29)	229
387, 2e p.	231 (29)	NR
	(1) V ou (2) I	
411	23 (29)	NR
415	46	NR
	(1) VI ou (2) I	
505, 2e p.	23 (30)	256
×513	71 (30)	NR
	(1) VII ou (2) I	
594	264 (31)	NR
597	280	
598	280 (31)	NR
	(1) X	
699	279	
	(2) II	
767	128	
778	176	NR
782	215	92
×783	216	

	POSÉE (2) II	RÉSOL (2) VI
784	216	
785	216	NR
×789	240	
	(2) III	
×803	31	
×814	56	114
815	56	NR
825	80	NR
857	176	
876	216	NR
882	240	
×886	240	
×889	264	
892	264	
892bis	280	
	(2) IV	
901	31	
905	32	NR
×909	55	
910	55	
932	104	NR
933	104	134
935	104	22
939	127	
940	127	23
942	128	25
×944	128	
945	128	26
946	151	
×947	151	134
×948	151	

	POSÉE (2) IV	RÉSOL (2) VI
×949	151	27, 274
952	152	
953	152	
954	152	135
955	175	117
956	175	136
957	175	137
×959	175	
×960	176	69
×961	176	177
962	176	180
×963	176	94
964	214	181
965	215	183
966	215	185
967	215	232
×968	215	123
×969	215	125
970	216	70
971	216	
972	216	95
×973	216	
974	239	73
975	239	97
976	239	49
977	239	98
978	239	
979	240	NR
×980	240	187
×981	240	28
983	263	188
984	263	139

(*) La rédaction de *Mathesis* a en portefeuille de bonnes solutions des questions qui ne sont pas marquées des lettres NR (non résolues); elle engage ses collaborateurs à porter de préférence leurs efforts sur celles-ci.

	POSÉE (2) IV	RÉSOL (2) VI
985	263	
×986	263	
×987	264	49
988	264	50
×989	264	
990	264	
991	264	207
992	279	100
993	279	116
994	279	
×995	280	52, 75
×996	280	189
×997	280	209
998	280	190
999	280	
1000	280	
	(2) V	
×1001	31	274
×1002	32	
1003	32	
×1004	32	237
1005	32	
1006	56	257
1007	56	260
×1008	56	260
×1009	56	28
1010	80	262
1011	80	275
×1012	80	277
1013	80	NR
1014	104	
×1015	164 et 240	
×1016	104	
×1017	104	
×1018	104	
×1019	128	
×1020	128	
1021	128	
1022	128	
×1023	152	
1024	152	30
1025	152	
1026	152	

	POSÉE (2) V	RÉSOL (2) VI
×1027	176	
1028	176	
×1029	176	
1030	176	
×1031	215	
1032	215	
1033	215	
×1034	216	
1035	216	
1036	216	
1037	216	
×1038	216	
×1039	240	
1040	240	
×1041	240 et 264	
1042	240	
1043	264 (t. VI, 31)	
×1044	264	
1045	264	
1046	264	
1047	280	
1048	280	NR
1049	280	
1050	280	
	(2) VI	
×1051	32	
1052	32	
×1053	32	
1054	32	
1055	32	
1056	56	
1057	56	
×1058	56	
1059	56	
1060	80	
1061	80	
×1062	80	
×1063	80	
1064	104	
1065	104	
1066	104	
×1067	104	
×1068	128	

	POSÉE (2) VI	RÉSOL (2) VI
1069	128	
1070	128	278
×1071	128	
1072	142	
×1073	142	
1074	142	NR
1075	142	
1076	192	
1077	192	
×1078	192	
1079	192	NR
×1080	215	
1081	215	NR
1082	215	
×1083	215	
1084	215	
1085	216	
1086	216	
1087	216	NR
1088	216	NR
×1089	240	NR
1090	240	NR
×1091	240	
1092	240, 280	NR
1093	264	
1094	264	NR
×1095	264	NR
1096	264	
1097	280	NR
1098	280	NR
1099	280	NR
1100	280	NR

QUESTIONS DE LA N. C. M.

219	54
314	76
315	101
316	127
362	140
599	191
553	210
554	212

TABLE DES NOMS.

Abel, 204.
Adams, 204.
Ampère, 69, 253.
Anderson, 203.
Andoyer, 247.
André, 88.
Anonyme, 49, 97.
Apollonius, 136, 202.
Appell, 88.
Archimède, 112, 245.
Aubry, 42.
Antomari, 272.
Ball, 69.
Barbarin, 143.
Barbette, 73, 132, 264.
Barisien, 14, 22, 24, 26, 30, 31, 32, 33, 49, 60, 71, 73, 97, 98, 100, 116, 124, 135, 136, 137, 139, 180, 183, 185, 188, 191, 192, 193, 208, 214, 215, 216, 232, 236, 239, 240, 259, 260, 263, 265, 275, 279, 280.
Bastin, 25, 26, 97, 117, 122, 125, 136, 137, 237.
Bégault, 66.
Beltrami, 10, 228.
Beman, 47.
Bernardières (de), 18.
Bertrand (J.), 252.
Bessel, 251, 272.
Biermann, 204.
Bobillier, 200.
Borel, 176, 205.
Boudin, 64.
Bourrienne, 184.
Boutin, 29.
Brahy, 17.
Breithof, 133.
Brierley, 104.
Brisson, 250.
Brocard, G., 217, 221.
Brocard, H., 15, 28, 32, 50, 56, 80, 98, 104, 128, 142, 203, 216, 234, 249, 278, 280.
Brunner, 18.
Bruno, 19.
Buisseret, 100, 122, 207.
Buysens, 122, 259, 260, 267.
C. (A.), 121, 237.
Calinon, 68.
Camus, 237.
Cantor (M.), 68.
Carnot, 42.
Carvallo, 133.
Catalan, 18, 143, 200, 256, 278.
Cauchy, 69, 177, 204, 250, 252.
Cesaro (E), 229.
Chasles, 55, 113, 193, 265.
Chomé, 87.
Clairaut, 250.
Clebsch, 225.
Colart, 44, 52, 100, 122, 124, 209, 237, 259, 270.
Collenne, 164.
Comberousse (de), 87.
Copernic, 248.
Cornu, 18, 274.
Cotes, 42.
Couturier, 214.
Critescu, 23, 24, 26, 28, 30, 50, 73, 74, 99, 117, 122, 136, 137, 140, 180, 184, 233, 237, 261, 275.
Darboux, 250, 271.
Davidoglou, 237.
Davis, 203.
Dauge, 7, 13.
Delahaye, 50, 123, 214.
Delaunay, 249.
Demartres, 47.
Demoulin, 25, 42.
Denobele, 124.
Déprez, 24, 32, 49, 50, 51, 52, 54, 56, 73, 75, 94, 97, 98, 100, 117, 122, 125, 136, 137, 179, 183, 188, 208, 209, 236, 237, 240, 259, 260, 261, 262, 276, 277, 280.
Descartes, 228, 245.
Deschacht, 49.
Dickstein, 271.
Dirichlet, 69, 204.
Dobbs, 125.
Drach, 205.
Droz Farny, 25, 27, 49, 50, 53, 73, 94, 95, 97, 98, 100, 101, 117, 122, 123, 128, 134, 135, 137, 178, 181, 182, 190, 193, 208, 215, 235, 237, 240, 261, 264, 265, 276.
Duhamel, 112.
Dupin, 112.
Duporcq, 80, 104, 118, 142, 192.
Duran Loriga, 105.
Durège, 37.
Eberhard, 247.
Engel, 9.
Estève, 18.
Euclide, 13, 109, 225.
Euler, 29, 250, 272.
Fagnart, 64.
Faifofer, 174.
Fairon, 23, 28, 123, 185, 237, 259.
Fauquembergue, 22, 27, 28, 30, 54, 76, 101, 127, 140, 210, 212, 274, 278.
Faure, 202.
Fermat, 245.
Fibonacci, 92.
Fleuriais, 18.
Foucault, 273.
François, 28.
Francq, 50.
Frenet, 177.
Fresnel, 18.
Frolov, 109, 225.
Fuhrmann, 203.
Fuss, 272.
Galois, 176.
Garcia de Galdeano, 272.
Gauss, 204.
Gelin, 21, 55, 86, 161, 273.
Genese, 79.
Gérard (L.), 46.
Gerono, 191, 255.
Gibson, 203.
Gillet, 27, 49, 73, 97, 98, 136, 137, 180, 183, 236.
Glashan, 133, 271.
Gob, 42, 50, 129, 223.
Goursat, 69, 88.
Gräfe, 133.
Graindorge, 48.
Gregory, 42
Griess, 87.
Haas (Mlle de), 129.

Habich, 42.
Hachette. 18, 19, 112.
Hacken, 23, 24, 28, 49, 98, 187, 277.
Hagen, 273.
Halphen, 251.
Halsted, 47.
Hardy, 67.
Hopkins, 272.
Houël, 225.
Humbert, 22.
J. (F.), 47, 201, 275.
J. (Liége), 239, 264.
Jablonski, 46.
Jacobi, 250.
Janssen, 18, 274.
Jeřabek, 15, 37, 81.
Joachimsthal, 136.
Jonesco (B.), 122, 237, 276, 277,
Jonesco (J), 23, 26, 28, 29, 50, 51, 53, 73, 74, 79, 95, 98, 117, 122, 123, 134, 136, 139, 180, 185, 189, 236, 237, 261, 275, 276, 277.
Jordan, 249.
Jowa, 247.
Juël, 247.
Keelhoff, 73, 99.
Kepler, 248.
Kiepert, 164, 223.
King, 66.
Klein (F.), 87, 204.
Klompers, 28, 49, 50, 52, 69, 73, 97, 99, 100, 122, 189, 190, 209, 257, 261, 275.
Kronecker, 204, 232.
Kummer, 250.
Lachlan, 202.
Lagrange, 19.
Laisant, 46, 85, 89, 129, 252.
Lambert (Th.), 47.
Lamé, 251.
Laurens, 125, 237.
Laurent, 252.
Lebègue, 272.
Lechalas, 68.
Leclerc, 67.
Legendre, 13, 45, 109.
Leibniz, 68, 69, 204, 245.
Lemaire, 47.
Lemoine, 71, 85, 203, 204, 255.
Leverrier, 249.
Lie, 9, 69, 174, 250.
Liénard, 262.
Lindemann, 221.
Liouville, 251.
Lobatschefsky, 9, 68, 228.
Lœwy, 274.
Longchamps (de), 25, 89, 245.
Loudon, 272.
Lucas (Ed.), 30, 76, 101, 127.
Maclaurin, 42.
Mackay, 203.
Magnus, 272.
Mandart, 28, 49, 73, 98, 189, 257, 260, 275, 276, 277.
Mansion, 7, 13, 45, 69, 84, 112, 114, 174, 175, 207, 225, 245, 252.
Massau, 133.
Mayer, 250.
Mc Lellan, 174, 274.
M'Clellan, 202.
Meray, 88.
Merlin, 237.
Milne, 202.
Mister, 18.
Moigno, 252.
Moivre, 44.
Molk, 88.
Monge, 69, 112, 135, 251.
Neuberg, 25, 26, 32, 40, 50, 52, 56, 57, 60, 69, 75, 80, 84, 88, 91, 94, 101, 128, 137, 142, 164, 176, 178, 182, 189, 190, 192, 203, 204, 209, 215, 216, 221, 237, 240, 253.
Newton, 42, 68, 84, 204.
Niewenglowski, 175.
Nyt. 78.
Ocagne (d'), 42, 89, 206.
Painlevé, 47, 177.
Pagani, 142.
Pascal (E.), 174.
Pell, 45.
Pelz, 37.
Picard (E.), 251, 271.
Poincaré, 84.
Polak, 122.
Poort, 28, 69, 98, 123.
Pressland, 203.
Quetelet (A), 19, 142.
Realis, 30, 54, 140, 209, 212.
Reiss, 42, 113.
Retali, 49, 71, 97, 100, 122, 192.
Retsin, 202.
Ribaucour, 25.
Riemann, 9, 227.
Roberval, 112,
Rocquigny (de), 28, 134.
Rouché, 87.
Rouse, 260.
Salmon, 46.
Schmit, 202.
Schoute, 117.
Schröter, 37.
Seligmann, 237.
Servais, 25, 26, 42, 92, 120, 134, 135, 136, 137, 207, 262.
Smith, 46.
Socolof, 133.
Sollertinsky, 142.
Sondat, 80.
Soons, 27, 28, 49, 57, 98, 263, 274.
Steiner, 25, 37, 42, 223, 243.
Stieltjes, 47.
Stolz, 205,
Strymeersch, 275.
Stuyvaert, 21, 46, 56, 92, 129, 132, 198, 229, 256,
Sutton, 66.
Sylvester, 30.
Tannery (J.), 22, 88, 205.
Tarry, 41.
Taylor, 203.
Teixeira, 174.
Thélie, 202.
Thirion, 248.
Tiete, 237.
Tilly (De) 5, 8, 13, 246.
Tisserand, 18, 177, 247, 273, 274.
Tortolini, 278.
Transon, 187.
Tucker, 104, 164, 202, 204.
Tzitzéica, 71, 237, 275.
Vaschy, 250.
Van Aubel (H.), 50, 57, 94.
Verdeyen, 100, 101, 117.
Verhelst, 49.
Verhulst, 200.
Vuibert, 103, 104.
Wasteels (C. E.), 241.
Weierstrass, 204, 250.
Wentworth, 271.
Wolstenholme, 80.
Wronski, 271.

LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE AVANT LOBATCHEFSKY.

THEORIE DER PARALLELLINIEN *von Euclid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der Nichteuclidischen Geometrie*, in Gemeinschaft mit FRIEDRICH ENGEL herausgegeben von PAUL STAECKEL. Mit 145 Figuren im Text und der Nachbildung eines Briefes von Gauss. — Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1895. — In-8° de x-325 pages, avec une planche de *fac-simile*.

Le livre que vient de publier M. Stäckel, professeur à l'Université de Königsberg, en collaboration avec M. Engel, professeur à l'Université de Leipzig, est l'un des plus intéressants qui aient paru depuis longtemps sur l'histoire des principes de la Géométrie.

Il contient, en traduction ou en original, d'une manière complète ou dans leurs parties essentielles, les travaux des géomètres sur la théorie des parallèles, pourvu qu'ils soient antérieurs à ceux de Lobatchefsky et de Bolyai et qu'ils aient de l'importance au point de vue de la Géométrie non euclidienne.

Ce n'est donc pas une histoire complète de la théorie des parallèles que M. Stäckel a voulu écrire : comme il le fait remarquer dans la préface, rien que pour rassembler les matériaux d'une pareille histoire, il faudrait beaucoup de temps. Nous ajouterons que, d'après ce qui a déjà été fait dans cette direction (1), on peut conjecturer, sans crainte de se tromper beaucoup, que la chose n'en vaut pas la peine : la plupart de ceux qui, depuis Euclide, ont voulu et veulent encore édifier la théorie des parallèles sur de nouvelles bases, manquent d'originalité ou de rigueur, et il n'y a aucune utilité à tirer des essais sans valeur et sans portée du juste oubli où ils sont ensevelis.

Mais un petit nombre de géomètres, parmi lesquels il faut citer Euclide lui-même, puis surtout Saccheri, Lambert, Legendre,

(1) Voir, par exemple, *Euclidis Elementorum libri sex priores graece et latine*. Edidit J.-C. CAMERER, Berolini, 1824, t. I, pp. 402-442 : *Excursus ad Elementorum*, I. 29, où sont analysés un grand nombre d'essais de démonstration du postulat 5 d'Euclide ou de propositions équivalentes. Ces essais sont la plupart sans valeur.

Gauss, Schweikart et Taurinus, doivent être regardés comme ayant préparé les découvertes de Lobatchefsky, de Bolyai et de Riemann, et c'est à ceux-là qu'est consacré surtout le livre de M. Stäckel.

Leurs écrits, sauf une page ou deux du dernier opuscule de Taurinus, n'exigent pour être compris que la connaissance des mathématiques élémentaires et, par suite, ils sont à la portée de tout le monde. Ils peuvent donc servir d'introduction à la géométrie non euclidienne et aider les esprits non encore initiés aux vues modernes sur les principes de la géométrie à se familiariser avec ces principes et à les comprendre. Ils peuvent aussi contribuer à ouvrir les yeux aux philosophes qui, sur la foi de Kant et sans autre raison que les assertions sans preuve de la *Kritik der reinen Vernunft*, croient à la valeur absolue de la seule géométrie euclidienne.

Nons allons analyser successivement les diverses sections de l'ouvrage de M. Stäckel, en ajoutant ou substituant çà et là nos propres vues aux siennes.

1. *Préface et tables des matières* (pp. III-X). L'auteur raconte comment M. Beltrami a retrouvé, en 1889, le livre oublié de Saccheri, et lui-même, en 1893, un mémoire de Lambert sur la théorie des parallèles, puis, pendant l'impression du présent ouvrage, les *Elementa* de Taurinus, qui sont le complément et la continuation des travaux de Saccheri et de Lambert. Il fait ensuite ressortir l'importance historique et philosophique de ces divers écrits.

2. *Euclide* (vers 300 avant J.-C.) (pp. 1-14). L'auteur donne une notice sommaire sur Euclide. Il traduit ensuite les définitions, les postulats et les axiomes du livre I, les énoncés des 32 premières propositions, avec les démonstrations, en abrégé, des propositions 5, 6, 7, 13, 18, 20, et, textuellement, celles des propositions 16 (L'angle extérieur d'un triangle surpasse chacun des deux intérieurs opposés), 27 (Deux droites sont parallèles si elles font avec une sécante des angles alternes internes égaux), 29 (Réciproque de 27 et 28), 32 (L'angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des intérieurs opposés ; la somme des trois angles est égale à deux droits).

L'auteur signale avec raison la perfection logique du premier livre des éléments. Euclide a très bien vu, dit-il, les difficultés cachées qui existent dans la théorie des parallèles. C'est pourquoi il a établi à part, par exemple, la proposition 16, qui est indépendante du postulatum (comme d'ailleurs toutes les autres

propositions du premier livre jusqu'à la 28e inclusivement), bien qu'elle soit un corollaire de la proposition 32.

Nous trouvons que M. Stäckel a raison d'apprécier comme il le fait l'ouvrage immortel d'Euclide. Nous sommes persuadé qu'il aurait placé plus haut encore le premier livre des *Éléments*, si, au lieu d'employer le texte de Heiberg, il avait employé l'édition de Peyrard ou celle de Camerer. Dans celles-ci (qui sont d'ailleurs d'accord aves les meilleurs manuscrits, d'après Heiberg lui-même), il y a six postulats et neuf axiomes, tandis que Heiberg, pour des raisons insuffisantes et à tort, selon nous, a placé le sixième postulat parmi les axiomes et supprimé ou mis en doute les axiomes 4, 5, 6, et 7 (1).

Or, quand on met sur la même ligne d'importance les postulats 5 et 6, savoir :

> 5. Si une droite rencontrant deux droites fait du même côté des angles intérieurs dont la somme soit moindre que deux droits, les deux droites prolongées indéfiniti-vement se rencontrent du côté dont la somme est inférieure à deux droits;
>
> 6. Deux droites ne comprennent pas d'espace;

on reconnaît que tous les systèmes possibles de géométrie sont compris dans le tableau suivant :

A. *Géométrie euclidienne,* fondée sur les postulats 5 et 6.

B. *Géométrie lobatchefskienne,* qui repose sur le postulat 6 seulement, tandis que le postulat 5 n'est pas vrai dans ce système.

C. *Géométrie riemannienne,* où le postulat 5 est vrai, même pour deux droites quelconques, mais où le postulat 6 n'est pas vrai (2).

Euclide a donc si admirablement choisi ses postulats fondamentaux qu'il suffit de faire toutes les hypothèses possibles sur leur existence pour obtenir tous les systèmes de géométrie où la droite, le plan et l'espace sont supposés homogènes.

3. *Wallis* (1616-1707) (pp. 15-30). Le célèbre auteur de l'*Arithmetica infinitorum,* premier titulaire de la chaire fondée par Sir Henry Saville, à Oxford, spécialement pour y expliquer

(1) Voir notre article *Sur les postulats et les axiomes d'Euclide* (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1889-1890, t. XIV, 2e partie, pp. 35-45).

(2) Voir notre note *Sur la métagéométrie et ses trois subdivisions* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1895, 3e série, t. XXX, pp. 495-498).

Euclide, a publié, en 1693, deux notes relatives aux Éléments, où l'on trouve la substance des leçons académiques faites par lui en 1651 et en 1663. La seconde, qui contient une démonstration du 5e postulat, est traduite dans le livre de M. Stäckel. Wallis admet comme point de départ un nouveau postulat souvent reproduit dans la suite : *il existe des triangles semblables*. La démonstration de Wallis n'est pas tout à fait rigoureuse, même si l'on admet son postulat, mais elle peut être rendue telle, si l'on remplace sa proposition 7, qui n'est pas vraiment démontrée, par une autre qu'il est facile d'imaginer. Le postulat de Wallis est d'ailleurs trop étendu : on peut établir le cinquième postulat d'Euclide, si l'on admet l'existence de deux triangles équiangles non équivalents, comme l'a remarqué Saccheri.

Le travail de Wallis n'est donc pas une étude approfondie sur la théorie des parallèles et aurait pu être exclu sans inconvénient du livre que nous analysons.

4. *Saccheri* (1667-1733) (pp. 31-136). Nous avons publié, il y a quelques années, une analyse sommaire du premier livre de l'ouvrage du P. Saccheri : *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Milan, 1733), où cet ingénieux géomètre essaie à son tour de démontrer le cinquième postulat d'Euclide, mais sans en introduire aucun autre (1). Ce premier livre est ici traduit complètement, et la traduction n'occupe pas moins de 96 pages du Recueil de M. Stäckel.

L'ouvrage de Saccheri, bien qu'ayant été cité maintes fois au siècle passé et dans celui-ci (Camerer, en particulier, le résume très exactement dans son édition des Éléments d'Euclide), était à peu près oublié quand Beltrami, en 1889, en fit ressortir l'importance au point de vue de la géométrie non euclidienne.

Saccheri a commis de graves erreurs de raisonnement chaque fois qu'il a eu recours à la notion de l'infini ; mais dans les autres parties de sa dissertation, il est presque toujours rigoureux. C'est ainsi qu'il a très bien établi les premières propriétés de l'équidistante d'une droite et qu'il a prouvé le théorème suivant : *Si le postulat 5 d'Euclide n'est pas vrai, deux droites se rencontrent, ou sont asymptotes l'une de l'autre (parallèles dans le sens lobatchefskien), ou perpendiculaires à une droite commune à partir de laquelle elles divergent indéfiniment.*

Il est donc un vrai précurseur de Lobatchefsky.

(1) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1889-1890, XIV, 2e partie, pp. 46-59.

On peut aussi, en un certain sens, le regarder comme un précurseur de Riemann ; car, dès le début, il considère les trois hypothèses suivantes qui correspondent évidemment aux trois géométries possibles : Dans un quadrilatère birectangle où deux côtés opposés adjacents aux angles droits sont égaux, les deux autres angles peuvent être droits (Euclide), ou obtus (Riemann), ou aigus (Lobatchefsky). La majeure partie de son livre est consacrée à cette troisième hypothèse qu'il appelle l'hypothèse de l'angle aigu. Mais il examine aussi l'hypothèse de l'angle obtus, c'est-à-dire qu'il donne maints théorèmes de géométrie riemannienne. Il montre aisément d'ailleurs que cette hypothèse est incompatible avec le postulat 6 d'Euclide, ou plutôt avec la proposition 16 du livre I des Éléments, qui repose au fond sur ce postulat.

M. Stäckel, dans son introduction à l'ouvrage de Saccheri, semble admettre que ce dernier a prouvé rigoureusement la proposition suivante : *Si l'une des trois hypothèses est vraie dans un seul cas, il en est de même dans tous les autres.* Mais dans les notes ajoutées à la traduction, il a signalé certains défauts de la démonstration. Ce théorème n'est d'ailleurs pas si facile à démontrer d'une manière complète, et nous ne croyons pas qu'il l'ait été avant 1879, dans l'*Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique* de M. De Tilly.

Ajoutons, pour terminer, que Saccheri, qui a donné de mauvaises raisons pour rejeter l'hypothèse de l'angle aigu, n'a jamais douté de la vérité absolue du 5e postulat d'Euclide : il croyait vraiment l'avoir démontré. Sur ce point, il est plus loin de Lobatchefsky qu'Euclide lui-même. Il en est ainsi, d'ailleurs, de tous les suivants, Gauss et Schweikart exceptés.

La partie critique de l'ouvrage où Saccheri examine les essais de Proclus, Nassareddin, Clavius, Borelli et Wallis est très bien faite.

5. *Lambert* (1728-1777) (pp. 136-208). Ce géomètre suisse (il était né à Malhouse, ville qui n'a été annexée à la France qu'en 1798) a écrit, en 1766, une dissertation sur la théorie des parallèles qui a été publiée après sa mort, en 1786, mais qui ne semble pas avoir été connue autant qu'elle méritait de l'être. C'est M. Stäckel qui, en 1893, l'a retrouvée, et elle a été signalée au monde savant par Lie dans la préface du tome III de sa *Théorie des groupes de transformation.*

Il est possible que Lambert n'ait pas eu en mains l'ouvrage de Saccheri, mais il en a eu au moins une connaissance

indirecte, par exemple, par l'analyse de Klügel (1763) qu'il cite. Son point de départ est le même, au fond, que celui de Saccheri. Il considère un quadrilatère trirectangle et examine successivement les trois hypothèses suivantes : le quatrième angle est droit, obtus, ou aigu. Il traite à part ces trois hypothèses. Il prouve sans peine que la première conduit à la géométrie euclidienne et que la seconde est incompatible avec le postulat 6 d'Euclide ; mais il observe qu'elle est réalisée sur la sphère, les grands cercles y jouant le même rôle que les droites dans le plan, ce qui est une idée nouvelle et féconde.

Dans l'étude de la troisième hypothèse, il arrive à ce résultat remarquable : *l'aire d'un triangle est proportionnelle au déficit angulaire,* en donnant ce nom à la différence entre deux droits et la somme des angles du triangle, somme qui est inférieure à deux droits. Il conjecture que cette hypothèse est réalisée sur une surface qu'il ne définit pas et qu'il appelle une sphère imaginaire. On sait que Beltrami a prouvé, en 1868, l'exactitude de cette conjecture. Enfin, Lambert remarque que, dans l'hypothèse de l'angle aigu et dans celle de l'angle obtus, il existe une mesure absolue pour les grandeurs géométriques.

Dans son dernier paragraphe, il rejette à son tour, comme Saccheri, l'hypothèse de l'angle aigu, pour une mauvaise raison. Si elle était vraie, on pourrait inscrire un polygone régulier dans l'équidistante d'une droite. Or, pareil polygone, selon lui, est évidemment inscriptible dans une circonférence dont le centre est du côté de la droite où ne se trouve pas l'équidistante ; par suite, ce polygone et l'équidistante devraient rencontrer la droite, ce qui est absurde.

M. Stäckel semble croire que le Mémoire de Lambert a été sans influence sur les géomètres qui sont venus après lui. Nous ne partageons pas cette opinion : Legendre et Gauss connaissent le résultat le plus important trouvé par le savant suisse ; il en est de même de Taurinus, qui d'ailleurs cite explicitement Lambert.

6. *Legendre* (1752-1833) (*passim*, pp. 19, 37-38, 212-213). L'ouvrage de M. Stäckel ne contient pas d'article spécial consacré à Legendre, bien que les écrits de ce géomètre aient contribué beaucoup plus que ceux de Wallis aux progrès de la théorie des parallèles. Ils sont aussi plus originaux qu'ils ne le paraissent au premier abord. Voici comment on peut les résumer :

1° Il a donné une démonstration analytique du théorème sur la somme des trois angles d'un triangle, insérée d'abord dans le texte des deux premières éditions de ses *Éléments de Géométrie,*

puis rejetée dans la note II de ses éditions ultérieures. Cette démonstration, — plus complète dans l'édition anglaise publiée par Brewster, en 1822, à Édimbourg, que dans les autres, — est beaucoup plus profonde que celle de Wallis avec laquelle on peut la confondre à première vue. Elle suppose implicitement un postulat, il est vrai; mais si on l'affranchit de ce postulat, elle conduit d'une manière naturelle à la géométrie non euclidienne, comme nous l'avons vérifié.

2° Il a prouvé, d'une manière simple et rigoureuse, dans les éditions 3 à 8 de ses *Éléments* (le postulat 6 d'Euclide étant supposé admis), que la *somme des angles d'un triangle ne peut surpasser deux droits.* Dans la douzième édition (1823), il a donné (I, 19) une démonstration du théorème : *la somme des trois angles d'un triangle est égale à deux droits.* Cette démonstration complétée par Lobatchefsky (*Études,* n° 19), comme elle doit évidemment l'être, prouve en réalité que la somme des angles n'est pas supérieure à deux droits.

3° Il a établi rigoureusement, en 1833, que si la somme des angles est égale à deux droits dans un seul triangle, il en est de même dans tous. Par suite, d'après le 2°, si elle est moindre dans un seul triangle, elle est moindre dans tous (le postulat 6 d'Euclide étant toujours supposé vrai).

En maints endroits de ses écrits sur la théorie des parallèles, Legendre est loin d'avoir toujours été rigoureux. Mais il a bien vu les difficultés de cette théorie. " Il fallait, dit-il dans sa note II, déduire de la définition de la ligne droite une propriété... qui exclût toute ressemblance avec la forme d'une hyperbole comprise entre ses deux asymptotes. „

Il connaît le théorème de Lambert : " Le déficit, s'il y en avait un dans les triangles rectilignes, serait proportionnel à l'aire du triangle, „ dit-il dans la note II de sa douzième édition (1).

7. *Gauss* (1777-1855) (pp. 209-236). M. Stäckel a réuni dans son livre tous les passages des écrits de Gauss où il parle des principes de la géométrie, savoir : 8 lettres, dont une à W. Bolyai (1799), une à Gerling sur Schweikart (1819), une à Taurinus (1824), deux à Bessel (1829, 1830), trois à Schumacher (1831, 1831, 1846), puis deux comptes rendus (1816, 1822) où il réfute aisément des démonstrations superficielles du postulatum. Les

(1) Ce passage ne se trouve pas dans les éditions 3, 4, 8, ni dans la traduction anglaise faite sur la 11e. Il manque donc probablement dans les onze premières éditions.

lettres de 1819 et de 1824 étaient inédites avant la publication du livre de M. Stäckel,

On peut déduire de ces documents les conclusions suivantes :

1° Gauss s'est occupé des principes de la géométrie dès 1792.

2° C'est probablement lui qui, le premier, a reconnu que la géométrie non euclidienne pouvait n'être pas la seule absolument rigoureuse, et que la géométrie physique pouvait correspondre à la géométrie idéale où la somme des trois angles est plus petite que deux droits. Aussi se prononce-t-il nettement (1830) contre la conception kantienne de l'espace (1).

3° Rien ne prouve que Gauss soit allé d'abord bien loin dans ses spéculations sur la géométrie non euclidienne. Jusqu'en 1824, il ne cite aucun théorème qui ne soit une conséquence de ceux de Saccheri et de Lambert.

4° Plus tard (voir lettres de 1829 et de 1846), il a développé ces vues. Peut-être les *Elementa* de Taurinus ont-ils été l'occasion de ces nouvelles recherches. En tout cas, ce n'est qu'en 1831, dans sa lettre du 12 juillet à Schumacher, qu'il donne une formule n'appartenant pas à la partie élémentaire de la géométrie non euclidienne. Elle se trouve d'ailleurs dans les *Elementa* de Taurinus.

5° Gauss, qui n'a rien écrit de suivi sur ce sujet jusqu'en 1831 (lettre du 17 mai), et dont la méthode diffère, dit-il, de celle de Lobatchefsky (lettre de 1846), n'a pu avoir aucune influence sérieuse sur celui-ci, pas plus que sur Jean Bolyai.

En somme, selon nous, d'après les documents produits jusqu'à présent, Gauss occupe, dans l'histoire de la géométrie non euclidienne, une place moins élevée que nous ne le pensions avant la publication du livre de M. Stäckel.

8. *Schweikart* (1780-1857) (pp. 243-248). Schweikart, successivement professeur de droit à Charkof (1812-1816), à Marbourg (1816-1820) et à Königsberg, a publié, en 1807, une théorie des parallèles qui ne contient rien de nouveau. Mais ultérieurement, vers 1819, il est arrivé, sans aucune influence de Gauss, à la conviction qu'il existe une géométrie parfaitement rigoureuse, indépendante du 5e postulat d'Euclide, et qu'il appelle *Astralgeometrie*. Elle est d'ailleurs identique à la géométrie lobatchefskienne. Schweikart a convaincu Bessel de la valeur de l'Astral-

(1) Voir dans GAUSS, *Werke*, II, pp. 177, la même idée exprimée plus nettement encore. On la trouve aussi chez AMPÈRE, *Philosophie des sciences*, t. I, p. 64 de la seconde édition.

geometrie et a eu la plus grande influence sur son neveu Taurinus.

Les théorèmes de l'Astralgeometrie qui sont cités par Schweikart dans ses lettres sont ceux que l'on peut tirer de Saccheri et de Lambert (existence de l'asymptote d'une droite, aire du triangle non euclidien).

9. *Taurinus* (pp. 236-286). Taurinus (né à König dans l'Odenwald en 1794, mort à Cologne en 1874), après avoir fait des études de droit, a vécu comme particulier à Cologne, où il se fixa en 1822. Sous l'influence de son oncle Schweikart, il se livra vers 1824 à une étude approfondie des premiers principes de la géométrie. Il soumit ses premiers essais à Gauss qui l'encouragea et lui parla avec conviction de l'absolue rigueur de la géométrie où l'on suppose la somme des angles d'un triangle inférieure à deux droits. La lettre de Gauss est reproduite en fac-simile à la fin de l'ouvrage.

Taurinus publia, en 1825, une brochure intitulée : *Theorie der Parallellinien* (102 pages), en 1826 un complément intitulé : *Geometriae prima Elementa* (76 p.), dont presque tous les exemplaires ont été brûlés par l'auteur, quand il eut constaté avec quelle indifférence cet opuscule était accueilli. Des fragments de ces deux brochures sont reproduits par M. Stäckel.

Taurinus connaît Saccheri et Lambert, mais il va plus loin qu'eux sur un point important. Il pense comme eux que c'est la géométrie euclidienne qui est réalisée dans la nature : il lui semble absurde que la géométrie réelle dépende d'une certaine constante. Plus explicitement que Lambert, il affirme que la seconde hypothèse de celui-ci correspond à la géométrie sphérique et que c'est pour cela qu'elle ne contient aucune contradiction. Mais la géométrie fondée sur la troisième hypothèse est aussi absolument logique, car elle correspond à la relation suivante entre les angles et les côtés d'un triangle :

$$\mathrm{Ch}\,\frac{a}{R} = \mathrm{Ch}\,\frac{b}{R}\,\mathrm{Ch}\,\frac{c}{R} - \mathrm{Sh}\,\frac{b}{R}\,\mathrm{Sh}\,\frac{c}{R}\cos A,$$

qui n'a rien de contradictoire. Cette formule est trouvée par induction, en supposant imaginaires les côtés d'un triangle sphérique. Taurinus ne sait pas si cette trigonométrie correspond à quelque réalité, c'est-à-dire à une géométrie relative à certaines courbes tracée sur une surface; mais cela ne l'empêche pas de résoudre diverses questions de géométrie métrique non euclidienne, entre autres de donner l'aire du triangle en fonction de ses côtés, la longueur de la circonférence et l'aire du cercle.

En somme, Taurinus, le premier, a publié une esquisse de trigonométrie non euclidienne.

10. *Liste des écrits sur la théorie des parallèles jusque* 1837. *Table alphabétique des auteurs cités : 1° dans cette liste; 2° dans le texte. Additions et corrections* (287-325). Au moyen des indications contenues dans ces diverses tables, on peut retrouver aisément dans le volume de M. Stäckel les nombreux renseignements qu'il contient, non seulement sur les géomètres cités plus haut, mais aussi sur un grand nombre d'autres dont nous n'avons pas parlé; entre autres sur ceux-ci : Nassareddin, Clavius, Borelli, Giordano da Bitonto, Kaestner, Klügel, Hindenburg, d'Alembert, Fourier, Lagrange, Seiffer, Lobatchefsky, les deux Bolyai.

La longue analyse qui précède permet au lecteur de se faire une idée de la haute valeur historique du livre publié par MM. Stäckel et Engel.

Nous le signalons à l'attention de tous ceux qui s'intéressent à la question des premiers principes de la Géométrie.

On peut résumer comme il suit les résultats obtenus par les géomètres sur les principes fondamentaux de la géométrie, avant la première publication de Lobatchefsky. On suppose admis le postulat 6 d'Euclide.

I. *Théorème de Legendre.* La somme des angles d'un triangle ne peut surpasser deux droits. Elle est égale ou inférieure à deux droits dans tous les triangles si elle l'est dans un seul.

II. *Théorème de Saccheri.* Dans l'hypothèse où la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux droits, deux droites se rencontrent, ou sont asymptotes l'une de l'autre, ou ont une perpendiculaire commune à partir de laquelle elles divergent.

III. *Théorème de Lambert.* Dans la même hypothèse, l'aire d'un triangle est proportionnelle à son déficit angulaire.

IV. *Théorème de Taurinus.* Cette même hypothèse répond à la relation suivante :

$$\operatorname{Ch}\frac{a}{R} = \operatorname{Ch}\frac{b}{R}\operatorname{Ch}\frac{c}{R} - \operatorname{Sh}\frac{b}{R}\operatorname{Sh}\frac{c}{R}\cos A,$$

entre les côtés a, b, c et un angle A d'un triangle. Par suite, elle ne peut conduire à aucune contradiction logique.

V. *Théorème de Gauss et de Schweickart.* Cette hypothèse peut être réalisée dans la nature, contrairement aux assertions gratuites de Kant dans la *Kritik der reinen Vernunft.*

VI. *Remarque.* Saccheri, Lambert et Taurinus ont trouvé les premières propositions de la géométrie riemannienne; les deux derniers savent qu'elle correspond à la géométrie euclidienne de la sphère et soupçonnent une correspondance semblable pour la géométrie où la somme des trois angles d'un triangle est inférieure à deux droits.

Enfin, la conclusion suprême à déduire de cette étude historique est la suivante : *La découverte de la géométrie non euclidienne, vers* 1830, *était inévitable* (HALSTED).

P. MANSION.

Extrait de la *Revue des questions scientifiques*,
2e série, 1895, t. VIII, pp. 603-613.

Extrait de la *Revue des questions scientifiques*,
2e série, 1895, t. VIII, pp. 613-617.

LA GÉOMÉTRIE RÉGLÉE ET SES APPLICATIONS, par G. KŒNIGS, professeur suppléant au Collège de France. — In-4° de 148 pages. — Paris, Gauthier-Villars et fils, 1895.

Ce travail, qui a déjà paru dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, est divisé en cinq chapitres d'étendue inégale.

Dans le chapitre I (pp. 3-15), l'auteur définit d'abord les coordonnées tétraédriques de la droite, puis il cherche, dans ce système de coordonnées, la condition de rencontre de deux droites. Généralisant ensuite la notion des coordonnées tétraédriques, il met en évidence la proposition suivante :

A tout système de six variables $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ *liées par une relation quadratique* $\omega(x) = 0$, *de discriminant non nul, on peut faire correspondre une droite déterminée de l'espace, la correspondance ayant ce caractère que l'équation*

$$\omega(x \mid x') = \frac{1}{2}\sum_{i}^{6} x_i \frac{\partial \omega}{\partial x'_i} = 0$$

exprime la rencontre de deux droites x *et* x'.

Le chapitre II (pp. 16-24) débute par une courte étude géométrique du complexe linéaire, considéré au point de vue projectif : définition du plan polaire d'un point, du pôle d'un plan, notions sur les droites conjuguées et propriétés qui s'y rattachent. La fin du chapitre contient une définition analytique de l'invariant d'un complexe linéaire et la détermination des coordonnées de la conjuguée d'une droite donnée.

Ces rapides indications sur le complexe linéaire sont utilisées au chapitre III (pp. 25-56) dans lequel on s'occupe des systèmes de complexes linéaires. La discussion est faite avec le plus grand soin.

Le chapitre IV, consacré aux premiers principes de géométrie infinitésimale en coordonnées de droites, traite de plusieurs sujets distincts.

M. Kœnigs considère d'abord une surface réglée, et il étudie les systèmes de complexes linéaires qui ont avec cette surface un contact du $p^{\text{ième}}$ ordre, c'est-à-dire qui renferment $p + 1$

génératrices consécutives de la surface. La discussion conduit l'auteur à examiner le cas où l'on a, pour toute génératrice rectiligne, $\omega(x') = 0$, x' désignant la dérivée de x par rapport au paramètre t dont dépendent les génératrices. La surface réglée est alors développable. Si, en outre, on a identiquement $\omega(x'') = 0$, x'' étant la dérivée seconde de x par rapport à t, la surface réglée est constituée soit par les génératrices d'un cône, soit par les tangentes d'une courbe plane.

M. Kœnigs se pose ensuite la question suivante : soit un faisceau plan variable, déterminé par deux droites a et b qui se coupent en O. Quelle est la condition pour que la tangente au lieu du point O fasse partie du faisceau plan, quelles que soient les variations des paramètres dont dépendent les droites a et b ? La réponse, en coordonnées de droites, revêt la forme la plus simple : Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et il suffit qu'on ait $\omega(b \mid da) = 0$. La solution montre en outre que le nombre des paramètres se réduira nécessairement à deux et que le faisceau plan devra être constitué :

Soit par un point d'une surface et le plan tangent en ce point;

Soit par un point d'une courbe et un plan quelconque tangent à la courbe en ce point;

Soit par le plan tangent d'une développable et un quelconque des points de contact de ce plan avec la développable;

Soit par un point et un plan d'une droite, arbitrairement associés;

Soit par un point d'un plan, associé à ce plan;

Soit par un plan mené par un point, associé à ce point.

Dans tous ces cas, M. Kœnigs dit que le faisceau plan a une enveloppe.

Ce résultat si élégant permet de démontrer deux théorèmes importants. L'un est le théorème bien connu dû à M. Pasch :

Dans tout complexe de droites, le lieu des points singuliers coïncide avec l'enveloppe des plans singuliers.

L'autre est le théorème suivant, partiellement trouvé par M. Cayley et complété par M. Klein:

Si toutes les droites d'un complexe sont singulières, elles ont une enveloppe, c'est-à-dire qu'elles touchent une surface fixe, non développable ou développable, ou bien coupent une courbe fixe.

La fin du chapitre traite des congruences. L'auteur établit d'abord par la géométrie et l'analyse cette propriété fondamentale : Les droites d'une congruence sont tangentes à deux

surfaces : les focales de la congruence. Elles peuvent se grouper en deux familles de séries réglées développables ; sur chacune des surfaces focales, les arêtes de rebroussement des développables d'une famille et les lignes de contact avec les développables de l'autre famille forment un système conjugué.

M. Kœnigs examine ce qui arrive lorsque pour chaque droite de la congruence les plans focaux sont confondus, et il obtient les deux cas suivants, dont le second est assez rarement considéré : ou bien la congruence est constituée par l'ensemble des tangentes aux lignes asymptotiques d'une famille d'une surface, ou bien elle est le lieu des tangentes à une développable aux différents points d'une courbe tracée sur cette développable.

La notion du contact d'une complexe linéaire avec une congruence conduit à la considération d'une classe remarquable de congruences : ce sont celles qui possèdent suivant chacune de leurs droites un complexe linéaire osculateur. Toute congruence de la nature indiquée est caractérisée par ce fait que les coordonnées de chacune des droites qui la composent, exprimées en fonction de deux paramètres arbitraires, vérifient une même équation de la forme de Laplace. C'est ce que montre M. Kœnigs, qui prouve en outre par des considérations géométriques que cette propriété caractéristique peut être remplacée par la suivante, trouvée par M. Darboux :

Les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale.

On a vu, au chapitre I, qu'il existe une infinité de systèmes de coordonnées de droites et que chacun d'eux est caractérisé par la relation $\omega(x) = 0$ qui existe entre ces coordonnées. Deux systèmes présentent un intérêt particulier : l'un est défini par l'équation :

$$(\text{I}) \qquad x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6 = 0 ;$$

l'autre, considéré par M. Klein en premier lieu, est tel qu'on a :

$$(\text{II}) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0.$$

L'étude de ces systèmes forme l'objet de la première moitié du chapitre V (pp. 92-146). On montre que les coordonnées du type (I) sont les coordonnées tétraédriques relatives à un certain tétraèdre. Quant au type (II), il met en évidence l'existence de six complexes linéaires $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_5 = 0$. La configuration de ces six complexes jouit de propriétés nombreuses et intéressantes qui sont exposées dans tous leurs détails.

Dans la seconde partie du chapitre V, l'auteur montre, d'après M. Klein, que *la géométrie de la droite dans l'espace ordinaire est identique à celle d'un point sur une quadrique à quatre dimensions dans un espace à cinq dimensions*, puis il complète cette vue en établissant que *la géométrie réglée, au point de vue dualistique et projectif, est identique à la géométrie anallagmatique d'un espace à quatre dimensions.* Autrement dit, on peut faire correspondre à toute droite de l'espace à trois dimensions un point de l'espace à quatre dimensions de manière qu'à toute transformation dualistique ou projective de l'espace réglé corresponde, dans l'espace à quatre dimensions, une transformation n'altérant pas les sphères de cet espace.

L'auteur termine en cherchant ce qui correspond dans l'espace à quatre dimensions aux principales figures de l'espace réglé : complexe linéaire, congruence linéaire, faisceau plan et hyperfaisceau.

Comme on le voit par cette courte analyse, M. Koenigs s'est surtout attaché aux questions fondamentales, et il les a traitées avec une grande ampleur et une grande netteté. Il est probable que son exposition des principes de la géométrie réglée est destinée à devenir promptement classique. Puisse le savant professeur suppléant du Collège de France trouver le temps de compléter son livre en publiant la suite du traité didactique dont le présent ouvrage peut être considéré comme l'introduction magistrale.

A. Demoulin.

450 QUESTIONS

D'ARITHMOLOGIE

PAR

L'ABBÉ M. GIELIN

Docteur en Philosophie et en Théologie

Professeur de Mathématiques supérieures au Collège Saint-Quirin à Huy

HUY

COLLÈGE SAINT-QUIRIN

—

1896

PROPRIÉTÉ.

Imprimerie de Ad. Wesmael-Charlier, rue de Fer, 53, Namur.

Questions d'arithmologie.

2388. Combien y a-t-il de nombres de n chiffres? Combien faut-il de chiffres pour les écrire?

2389. Quel est le nombre de chiffres nécessaire pour écrire tous les nombres depuis 1 jusqu'à celui qui est formé de n chiffres 9?

2390. On écrit la suite des nombres naturels sans séparer les différents chiffres: quel est le milliardième chiffre de cette suite, et à quel nombre appartient-il? — *R.* 1; 123 456 790.

2391. On écrit tous les nombres depuis 1 jusqu'à celui qui est formé de n chiffres 9 : combien de fois écrit-on : 1° le chiffre zéro; 2° chaque chiffre significatif?

2392. Les cinq premières pages d'un dictionnaire ne sont pas numérotées; mais la pagination des autres pages a nécessité l'emploi de 33 336 caractères : quel est le nombre de pages de ce dictionnaire? — *R.* 8612.

2393. On lit les nombres de 1 à 9 à l'aide de neuf mots différents; de 10 à 99, à l'aide de quinze nouveaux mots. Pour les lire de 100 à 999, il faut un mot de plus, le mot *cent*; de 1000 à 999 999, le mot *mille*; de 1 000 000 à 999 999 999, le mot *million*. On lit donc les nombres de 1 à 999 999 999 à l'aide de 27 mots différents. Supposons que, pour lire les nombres de plus de neuf chiffres, on les partage en tranches de neuf chiffres, à partir de la droite, et qu'on appelle ces tranches, à partir de la deuxième jusqu'à la onzième, *milliards*, *billiards*, *trilliards*, *quatrilliards*, *quintilliards*, *sextilliards*, *septilliards*, *octilliards*, *nonilliards*, *décilliards*. On demande à l'aide de combien de mots différents on pourra lire tous les nombres ayant moins de cent chiffres. (GELIN.)

2394. Vérifier que, pour énoncer les nombres de 1 à 99, il faut 174 mots, si les nombres 70, 80, 90 se lisent *septante*, *octante*, *nonante*, et 202 mots, si les nombres 70, 80, 90 se lisent *soixante-dix*, *quatre-vingt*, *quatre-vingt-dix*.

2395. Faire voir que, pour énoncer les nombres de 1 à 999, il faut dix fois autant de mots que pour énoncer les nombres de 1 à 99, plus 1700 mots, c'est-à-dire 3440 ou 3720 mots. (GELIN.)

2396. Faire voir que, pour énoncer les nombres de 1 à 999 999, il faut deux mille fois autant de mots que pour énoncer les nombres de 1 à 999, plus 998 000 mots, c'est-à-dire 7 878 000 ou 8 438 000 mots. (GELIN.)

2397. Faire voir que, pour énoncer les nombres de 1 à 999 999 999, il faut trois millions de fois autant de mots que pour énoncer les nombres de 1 à 999 999, plus 1997 millions de mots, c'est-à-dire 12 317 ou 13 157 millions de mots. En admettant que l'on prononce, en moyenne, 165 mots par minute, combien faudra-t-il d'années de 365 jours pour énoncer tous les nombres de *un* à *un milliard*? (GELIN.) — *R.* 142 ou 152 ans.

2398. Trouver : 1° le plus grand et le plus petit nombre de six chiffres; 2° le plus grand et le plus petit nombre composé de six chiffres différents.

2399. Quinze chrétiens et quinze Turcs se trouvent sur un navire en danger. Après avoir jeté à la mer toutes les marchandises, le pilote déclare qu'il est nécessaire de sacrifier encore la moitié des passagers. Il les fait mettre en ligne, et les comptant par ordre, fait jeter à l'eau chaque neuvième homme. Il se

trouve que les quinze chrétiens sont sauvés. Quelles places occupaient-ils? — *R.* 1, 2, 3, 4, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 20, 21, 25, 28, 29.

2400. Cent hommes étant disposés sur un rang, on fait sortir du rang le premier, le onzième, le vingt-unième, le trente-unième, et ainsi de suite jusqu'au nonante-unième, puis on fait serrer le rang. On recommence l'appel de la même manière, et on continue ainsi jusqu'à ce qu'il ne reste plus que neuf hommes. Quels sont les numéros que possédaient ces hommes dans le rang primitif? — *R.* 37, 42, 47, 53, 59, 66, 74, 83, 93.

2401. Écrire les trente-deux premiers nombres entiers dans le système binaire.

2402. La différence entre un nombre de deux chiffres et ce nombre renversé est égale à 9 fois la différence des deux chiffres.

2403. La différence entre un nombre de trois chiffres et ce nombre renversé est égale à 99 fois la différence des chiffres extrêmes.

2404. La différence entre un nombre de trois chiffres et ce nombre renversé a 9 pour chiffre du milieu et 9 pour somme des chiffres extrêmes.

2405. La différence entre deux nombres composés des mêmes chiffres, écrits dans un ordre différent, est divisible par 9, et, en général, par la base diminuée de 1.

2406. La différence entre un nombre composé d'un nombre impair de chiffres et le même nombre renversé est divisible par 99, et, en général, par le carré de la base, diminué de 1.

2407. La somme des six nombres de deux chiffres que l'on peut former avec trois chiffres différents est égale à 22 fois la somme de ces chiffres. On suppose, dans cette proposition et les quatre suivantes, que le même nombre ne renferme pas plusieurs fois le même chiffre. (GELIN.)

2408. La somme des six nombres de trois chiffres que l'on peut former avec trois chiffres différents est égale à 222 fois la somme de ces chiffres. (GELIN.)

2409. La somme des douze nombres de deux chiffres que l'on peut former avec quatre chiffres différents est égale à 33 fois la somme de ces chiffres. (GELIN.)

2410. La somme des vingt-quatre nombres de trois chiffres que l'on peut former avec quatre chiffres différents est égale à 666 fois la somme de ces chiffres. (GELIN.)

2411. La somme des vingt-quatre nombres de quatre chiffres que l'on peut former avec quatre chiffres différents est égale à 6666 fois la somme de ces chiffres. (GELIN.)

2412. En admettant que le même chiffre puisse entrer plusieurs fois dans le même nombre, on peut, avec trois chiffres donnés, former neuf nombres de deux chiffres, dont la somme est égale à 33 fois la somme des chiffres donnés, ou vingt-sept nombres de trois chiffres, dont la somme est égale à 999 fois la somme des chiffres donnés. (GELIN.)

2413. Un nombre est formé de deux chiffres dont la somme est 10, et ce nombre diminue de 72 lorsqu'on intervertit l'ordre de ses chiffres. Quel est-il? — *R.* 91.

2414. Quel est le nombre de trois chiffres qui jouit des propriétés suivantes : 1° la somme de ses deux chiffres extrêmes est 10; 2° la somme des six nombres que l'on peut former en permutant ses trois chiffres est égale à 3330; 3° l'excès de ce nombre sur le même nombre renversé est 396? — *R.* 753.

2415. Trouver un nombre de quatre chiffres, sachant : 1° qu'il reste le même

quand on écrit ses chiffres dans l'ordre inverse; 2° que la somme des quatre chiffres est 26; 3° que l'excès du nombre formé par les deux chiffres de droite sur le nombre formé par les deux chiffres de gauche est 27. — *R.* 5885.

2416. Quels sont les nombres de trois chiffres qui sont égaux, chacun, à la somme des six nombres de deux chiffres que l'on peut former en prenant leurs chiffres deux à deux? — *R.* 132, 264, 396.

2417. Soient deux nombres de n chiffres, et dont la différence est d; on écrit ces deux nombres à la droite, puis à la gauche l'un de l'autre : la différence entre les deux nombres ainsi obtenus est égale à d fois le nombre formé de n chiffres 9. On a, par exemple, $361\,354 - 354\,361 = 6993 = 999 \times 7$. (GELIN.)

2418. Soient trois nombres de n chiffres, et dont la différence du premier au deuxième et du deuxième au troisième est d; on écrit ces trois nombres à la droite, puis à la gauche l'un de l'autre : la différence entre les deux nombres ainsi obtenus est égale à $2d$ fois le nombre formé de $2n$ chiffres 9. On a, par exemple, $381\,374\,367 - 367\,374\,381 = 13\,999\,986 = 999\,999 \times 14$. (GELIN.)

2419. Soient quatre nombres de n chiffres et dont la différence de chacun au suivant est d; on écrit ces quatre nombres à la droite, puis à la gauche les uns des autres : la différence entre les deux nombres ainsi obtenus est égale au produit de trois facteurs, qui sont : la différence d, le nombre formé de n chiffres 9, et le nombre 343, dans lequel on intercale, entre 3 et 4, et entre 4 et 3, $n-1$ zéros, c'est-à-dire à $d \times 9 \times 343$, $d \times 99 \times 30\,403$, $d \times 999 \times 3\,004\,003$, et ainsi de suite. On a, par exemple, $381\,374\,367\,360 - 360\,367\,374\,381 = 21\,006\,992\,979 = 7 \times 999 \times 3\,004\,003$. (GELIN.)

2420. Si l'on écrit m zéros entre les chiffres 6 et 7 et n zéros entre les chiffres 5 et 3 du nombre 675 348, ce nombre augmente : 1° du produit de 600 000 par un nombre formé de $m+n$ chiffres 9; 2° du produit de 675 000 par un nombre formé de n chiffres 9.

2421. On prend un nombre quelconque, de quatre chiffres, par exemple. On multiplie le chiffre des unités par 2; on ajoute un chiffre quelconque, 9, par exemple; on multiplie par 5; on ajoute le chiffre des dizaines; on multiplie par 2; on ajoute un chiffre quelconque, 8, par exemple; on multiplie par 5; on ajoute le chiffre des centaines; on multiplie par 2; on ajoute un chiffre quelconque, 7, par exemple; on multiplie par 5; on ajoute le chiffre des mille. Connaissant le résultat final de cette suite d'opérations, trouver le nombre pensé. (GELIN.) — *R.* On soustrait, du résultat final, le produit par 5 du nombre 987, formé des chiffres ajoutés : le nombre pensé est égal au reste renversé.

2422. On prend une date quelconque, celle de sa naissance, par exemple. On multiplie le quantième du mois par 2; on ajoute 7; on multiplie par 50; on ajoute le rang qu'occupe le mois dans l'année; on soustrait 365; on multiplie par 100; on ajoute le nombre formé par les deux derniers chiffres à droite de l'année; on ajoute 1500. Connaissant le résultat final de cette suite d'opérations, 200 970, par exemple, trouver la date pensée. (GELIN.) — *R.* Le 20 septembre 1870. Les deux premiers chiffres à gauche du résultat final indiquent le quantième du mois; les deux chiffres suivants, le rang du mois dans l'année, et les deux derniers chiffres, l'année.

2423. On écrit le chiffre 1, et on dit, en multipliant constamment par 2, et en écrivant les chiffres des unités des produits successifs à la gauche les uns

des autres : 2 fois 1 2; 2 fois 2 4; 2 fois 4 8; 2 fois 8 16; 2 fois 6 12, et 1 13; 2 fois 3 6, et 1 7, et ainsi de suite. Démontrer : 1° que les dix-huit premiers chiffres obtenus se reproduiront indéfiniment dans le même ordre; 2° que les neuf premiers chiffres sont les compléments à 9 des neuf chiffres suivants; 3° que, si l'on appelle N le nombre formé par les dix-huit premiers chiffres, le produit de N par les nombres de 1 à 18 est formé des mêmes chiffres, écrits dans le même ordre, mais en commençant par un chiffre différent; 4° que le produit de N par 19 est un nombre formé de dix-huit chiffres 9.

2424. Faire l'addition des nombres 83 765, 43 708, 38 976, 64 812, 94 077, 25 049, 35 621, 82 473, 78 964 : 1° par la méthode ordinaire; 2° sans retenues, en écrivant intégralement la somme des chiffres de chaque colonne, et en faisant ensuite le total de ces sommes partielles; 3° en marquant un point pour chaque dizaine ou chaque vingtaine à retenir, et en reportant ensuite ces dizaines ou ces vingtaines à la colonne suivante; 4° en comptant le nombre de fois que le chiffre 4 ou 5 est contenu dans chaque colonne, et en ajoutant au multiple de 4 ou de 5 ainsi obtenu la somme des compléments à 4 ou 8, ou à 5, de tous les chiffres de cette colonne. (GELIN.)

2425. De deux nombres quelconques, le plus grand est égal à leur demi-somme plus leur demi-différence, et le plus petit est égal à leur demi-somme moins leur demi-différence.

2426. Étant donnés trois nombres de n chiffres, comment peut-on écrire, à vue, trois autres nombres tels que la somme des six nombres soit égale au nombre formé du chiffre 2, suivi de $n - 1$ chiffres 9, suivis du chiffre 7? — *R.* On écrit les compléments à 9 des chiffres de chacun des nombres donnés.

2427. Écrire les produits de 12 345 679 par 8 et par 9. Quel devrait être le multiplicateur pour que le produit fût formé de neuf chiffres 7? — *R.* 98 765 432; 111 111 111; 63.

2428. Si l'on multiplie par 9 les nombres 9, 98, 987, 9876, 98 765, 987 654, 9 876 543, 98 765 432, et qu'aux produits obtenus on ajoute respectivement 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, on aura pour sommes des nombres formés de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 chiffres 8. (LUCAS.)

2429. Si l'on multiplie par 9 les nombres 1, 12, 123, 1234, 12 345, 123 456, 1 234 567, 12 345 678, et qu'aux produits obtenus on ajoute respectivement 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, on aura pour sommes des nombres formés de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 chiffres 1. (LUCAS.)

2430. Si l'on multiplie par 8 les nombres 1, 12, 123, 1234, 12 345, 123 456, 1 234 567, 12 345 678, 123 456 789, et qu'aux produits obtenus on ajoute respectivement 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, on aura pour sommes les nombres 9, 98, 987, 9876, 98 765, 987 654, 9 876 543, 98 765 432, 987 654 321. (LUCAS.)

2431. Pour faire le produit d'un nombre formé de n chiffres 9 par un nombre formé de n chiffres 7, on écrit $n - 1$ chiffres 7, puis 6, puis $n - 1$ chiffres 2, puis 3. On a, par exemple, $9999 \times 7777 = 77\,762\,223$. (IBN ALBANNA.)

2432. Pour multiplier un nombre par 5, 25, 125, 625, on écrit un, deux, trois, quatre zéros à sa droite, et on divise par 2, 4, 8, 16 le nombre ainsi obtenu.

2433. Pour multiplier un nombre par 11, on écrit le premier chiffre à droite du nombre, puis, à gauche, successivement, la somme de chaque chiffre avec celui qui le précède. Former, d'après cette règle, le produit par 11 des nombres 1896 et 89 675 — *R.* 20 856; 986 425.

2434. Pour multiplier un nombre par 9, on écrit le complément à 10 du dernier chiffre à droite de ce nombre, puis on ajoute, successivement, en allant de droite à gauche, chaque chiffre avec le complément à 9 du chiffre suivant; le dernier chiffre est ajouté à 9, mais on n'écrit pas la dizaine de cette somme. Former, d'après cette règle, le produit par 9 des nombres 1896 et 54 908 763. — *R.* 17 064; 494 178 867.

2435. Pour multiplier par 9 un nombre formé de deux chiffres consécutifs, on peut opérer comme il suit : Si le chiffre le plus grand est celui des unités, on écrit le chiffre des dizaines, puis 0, puis le complément à 10 du chiffre des unités. Si le chiffre le plus grand est celui des dizaines, on écrit le chiffre des unités, puis 8, puis le complément à 10 du chiffre des unités. Former, d'après cette règle, le produit par 9 des nombres 67, 76, 78, 87, 89, 98. — *R.* 603, 684, 702, 783, 801, 882.

2436. Pour multiplier un nombre par un autre ayant le même nombre de chiffres, tous égaux à 9, on écrit, à la droite du nombre diminué de 1, le complément de ce nombre. Former, d'après cette règle, le produit de 87 par 99, ou de 1896 par 9999. — *R.* 8613; 18 958 104.

2437. Pour multiplier un nombre de $m + n$ chiffres par un nombre de n chiffres, tous égaux à 9, on retranche du premier nombre, diminué de 1, le nombre formé par ses m premiers chiffres à gauche, et on écrit à droite le complément du nombre formé par ses n derniers chiffres à droite. Former, d'après cette règle, le produit de 257 par 99, ou de 648 109 532 par 9999. — *R.* 25 443; 6 480 447 210 468.

2438. Deux nombres étant terminés par 5, leur produit sera terminé par 25 lorsque les chiffres de leurs dizaines seront de même parité.

2439. Deux nombres étant terminés par 1 ou 3 ou 7 ou 9, leur produit sera terminé respectivement par 01 ou 09 ou 49 ou 81 lorsque la somme des chiffres de leurs dizaines sera 0 ou 10. (GELIN.)

2440. Deux nombres étant terminés par 2 ou 4 ou 6 ou 8, leur produit sera terminé respectivement par 04 ou 16 ou 36 ou 64 lorsque la somme des chiffres de leurs dizaines sera 0, 5, 10 ou 15. (GELIN.)

2441. Deux nombres étant terminés l'un par 7 et l'autre par 8, leur produit sera terminé par 56, lorsque les chiffres 7 et 8 seront précédés du même chiffre pair, ou qu'ils seront précédés le premier d'un chiffre impair, le second d'un chiffre pair, dont la différence est 5. (GELIN.)

2442. Un produit de deux nombres est terminé par 99 dans les cas suivants : 1° l'un des nombres est terminé par 1 et l'autre par 9, et le chiffre des dizaines du premier surpasse de 1 le chiffre des dizaines du second; 2° les deux nombres sont terminés par 3, et la somme des chiffres de leurs dizaines est 3 ou 13; 3° les deux nombres sont terminés par 7, et la somme des chiffres de leurs dizaines est 5 ou 15. (GELIN.)

2443. En multipliant un nombre par 17, on l'augmente de 208. Quel est-il?

2444. Que devient le produit de deux nombres : 1° lorsqu'on augmente ou qu'on diminue l'un de ces nombres d'une unité; 2° lorsqu'on les augmente ou qu'on les diminue l'un et l'autre d'une unité; 3° lorsqu'on augmente l'un et qu'on diminue l'autre d'une unité?

2445. Le produit de deux nombres est 42 807. Si l'on augmente l'un d'eux de 4, le produit devient égal à 43 435. Quels sont les deux nombres? — *R.* 751, 157.

2446. Étant données deux suites de nombres qui en contiennent l'une autant que l'autre, la somme des produits obtenus en multipliant les nombres qui occupent le même rang dans les deux suites est la plus grande possible lorsque les nombres de chacune de ces suites sont disposés par ordre de grandeur.

2447. Diviser 5 631 351 470 947 265 625 par 95 367 431 640 625 : 1° par la méthode ordinaire; 2° par la méthode des compléments; 3° par la décomposition en facteurs du dividende et du diviseur; 4° en divisant cinq fois successivement le dividende par 9; 5° en divisant vingt fois successivement le dividende et le diviseur par 5; 6° en multipliant dix fois successivement le dividende et le diviseur par 4. — *R*. 59049.

2448. Si, dans la division de deux nombres entiers, pour vérifier le chiffre du quotient d'une division partielle, on multiplie le premier chiffre à gauche du diviseur, ou les deux premiers, ou les trois premiers, etc., par le chiffre à essayer, et que l'on retranche le produit de la partie correspondante du dividende, le chiffre essayé est exact dans les cas suivants : 1° si le reste est supérieur ou égal au chiffre que l'on essaie; 2° si le reste est supérieur au chiffre suivant du diviseur; 3° si le reste est égal au premier chiffre suivant du diviseur et en même temps tel que, si on l'ajoute au chiffre suivant du dividende, la somme soit supérieure ou égale au chiffre que l'on essaie, ou supérieure au deuxième chiffre suivant du diviseur. (Allotte.)

2449. La somme de deux nombres est 9 999 999 999; si on les divise l'un par l'autre, le quotient est 80 et le reste 90 : quels sont ces deux nombres? — *R*. 9 876 543 210, 123 456 789.

2450. La différence de deux nombres est 864 197 532; si on les divise l'un par l'autre, le quotient est 8 et le reste 9 : quels sont ces deux nombres? — *R*. 987 654 321, 123 456 789.

2451. En divisant un nombre par 17, on le diminue de 208. Quel est-il?

2452. Quels sont les nombres qui, divisés par n, donnent un reste égal au quotient? — *R*. Les $n-1$ premiers multiples de $n+1$.

2453. Quel est le quotient et quel est le reste de la division de $ab-1$ par a? — *R*. $b-1$, $a-1$.

2454. Dans toute division, le dividende est plus grand que le double du reste.

2455. Pour qu'on puisse, sans changer le reste d'une division, intervertir le diviseur et le quotient, il faut et il suffit que le reste soit inférieur au quotient.

2456. Le plus grand nombre qu'on puisse ajouter au dividende, sans changer le quotient, est égal au diviseur moins le reste moins 1.

2457. Pour qu'on puisse, sans changer le quotient, augmenter le diviseur de m unités, il faut et il suffit que le reste soit égal ou supérieur à m fois le quotient.

2458. Pour qu'on puisse, sans changer le quotient, diminuer le diviseur de m unités, il faut et il suffit que l'excès du diviseur sur le reste soit supérieur à m fois le quotient augmenté de 1.

2459. Pour qu'on puisse, sans changer le quotient, ajouter un même nombre m au dividende et au diviseur, il faut et il suffit que le reste soit égal au moins à m fois le quotient diminué de 1.

2460. Pour diviser un nombre par un produit de plusieurs facteurs, on peut le diviser d'abord par le premier facteur, puis le quotient obtenu par le deu-

ième facteur, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait employé tous les facteurs : e dernier quotient obtenu est le quotient cherché; quant au reste, il est égal ı la somme des restes des divisions successives, multipliés chacun par les liviseurs précédents.

2461. Si l'on divise la somme de deux nombres par leur quotient augmenté le 1, on obtient le plus petit de ces nombres. (BOURGEOIS.)

2462. Si l'on divise la différence de deux nombres par leur quotient diminué le 1, on obtient le plus petit de ces nombres. (BOURGEOIS.)

2463. Le produit de n nombres a au plus autant de chiffres qu'il y en a dans es n facteurs, et au moins autant qu'il y en a dans les n facteurs, moins $n - 1$.

2464. Le nombre des chiffres d'un quotient est égal à la différence entre le nombre des chiffres du dividende et le nombre des chiffres du diviseur, ou à cette différence augmentée de 1.

2465. La puissance de degré m d'un nombre de n chiffres a au plus mn et au moins $mn - m + 1$ chiffres.

2466. Le nombre des chiffres de la racine entière de degré m d'un nombre de n chiffres est compris entre $n : m$ et $n - 1 : m - 1$. (GELIN.)

2467. Deux nombres, divisés par leur différence, donnent des restes égaux.

2468. Les puissances semblables de deux nombres, divisées par la différence de ces nombres, donnent des restes égaux.

2469. La différence des puissances semblables de deux nombres est divisible par la différence de ces nombres.

2470. La différence des mêmes puissances paires de deux nombres est divisible par la somme de ces nombres.

2471. La somme des mêmes puissances impaires de deux nombres est divisible par la somme de ces nombres.

2472. Si deux nombres, divisés par un même diviseur, donnent des restes égaux, il en sera de même des deux nombres obtenus en les augmentant ou en les diminuant l'un et l'autre d'un même nombre, ou en les multipliant par un même nombre.

2473. Si les termes d'une somme diffèrent respectivement des termes d'une autre somme de multiples d'un même nombre, les deux sommes, divisées par ce nombre, donneront des restes égaux.

2474. Soient, dans un système quelconque de numération, 1, a, b, c, etc., les restes de la division des puissances successives de la base, 1, 10, 100, 1000, etc., par un diviseur D : un nombre est divisible par D, lorsque la somme des produits de ses chiffres, à partir de la droite, respectivement par 1, a, b, c, etc., est divisible par D. On peut remplacer un reste quelconque par son complément au diviseur, et soustraire au lieu d'ajouter le produit correspondant à ce reste. Déduire, de ce théorème : 1° qu'un nombre est divisible par 3 ou par 9, lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3 ou par 9; 2° qu'un nombre est divisible par 6, lorsque la différence entre le chiffre de ses unités et le double de la somme des autres chiffres est divisible par 6; 3° qu'un nombre est divisible par 12, lorsque le nombre formé par ses deux derniers chiffres à droite, ajouté à quatre fois la somme des autres chiffres, donne un nombre divisible par 12; 4° qu'un nombre est divisible par 15, 18 ou 45, lorsque le nombre formé par ses deux derniers chiffres à droite, ajouté à dix fois la

somme des autres chiffres, donne un nombre divisible par 15, 18 ou 45; 5° qu'un nombre est divisible par 7, lorsqu'ayant été partagé en tranches de trois chiffres, la différence entre la somme des produits des chiffres des tranches de rang impair, respectivement par 1, 3, 2, et la somme des produits des chiffres des tranches de rang pair, respectivement par les mêmes nombres, est divisible par 7; 6° qu'un nombre est divisible par 4, lorsque la différence entre le chiffre de ses unités et le double du chiffre de ses dizaines est divisible par 4; 7° qu'un nombre est divisible par 8, lorsque le chiffre de ses unités, plus deux fois le chiffre de ses dizaines, plus ou moins quatre fois le chiffre de ses centaines, est divisible par 8.

2475. Plus généralement, soient 1, a, b, c, etc., les restes de la division des puissances 1, 10^n, 10^{2n}, 10^{3n}, etc., de la base, par un diviseur D : un nombre est divisible par D, lorsque la somme des produits de ses tranches de n chiffres, à partir de la droite, respectivement par 1, a, b, c, etc., est divisible par D. Déduire, de ce théorème : 1° qu'un nombre est divisible par 11, lorsque la somme de ses tranches de deux chiffres est divisible par 11; 2° qu'un nombre est divisible par 7, 11 ou 13, lorsqu'ayant été partagé en tranches de trois chiffres, la différence entre la somme des tranches de rang impair et la somme des tranches de rang pair est divisible par 7, 11 ou 13; 3° qu'un nombre est divisible par 27 ou par 37, lorsque la somme de ses tranches de trois chiffres est divisible par 27 ou par 37.

2476. Plus généralement encore, soient 1, a, b, c, etc., les restes de la division des puissances 1, 10^m, 10^{m+n}, 10^{m+n+p}, etc., de la base, par un diviseur D : un nombre est divisible par D, lorsqu'ayant été partagé en tranches respectivement de m, n, p, etc., chiffres, la somme des produits de ces tranches respectivement par 1, a, b, c, etc., est divisible par D.

2477. Un nombre est divisible par un diviseur D de 10^n, lorsque le nombre formé par ses n premiers chiffres à droite est divisible par D. Déduire, de ce théorème, des caractères de divisibilité par 2 et 5, 4 et 25, 8 et 125.

2478. Un nombre est divisible par un diviseur D de $10^n - 1$, lorsque la somme de ses tranches de n chiffres est divisible par D. Déduire, de ce théorème, des caractères de divisibilité par 3 et 9, 11, 27 et 37.

2479. Un nombre est divisible par un diviseur D de $10^n + 1$, lorsqu'ayant été partagé en tranches de n chiffres, l'excès de la somme des tranches de rang impair sur la somme des tranches de rang pair est divisible par D. Déduire, de ce théorème, des caractères de divisibilité par 11, 101, 7 et 13, 73 et 137.

2480. Un nombre est divisible par un diviseur D de $m.10^n - 1$, lorsque, ayant séparé n chiffres sur la droite de ce nombre, la somme du nombre de gauche et de m fois le nombre de droite est divisible par D. Déduire, de ce théorème : 1° qu'un nombre est divisible par 29 ou par 31, diviseurs de 899, ou 900 — 1, lorsque le nombre de ses centaines, augmenté de 9 fois le nombre formé par ses deux premiers chiffres à droite, est divisible par 29 ou par 31; 2° qu'un nombre est divisible par 31 ou par 43, diviseurs de 3999 ou 4000 — 1, lorsque le nombre de ses mille, augmenté de 4 fois le nombre formé par ses trois premiers chiffres à droite, est divisible par 31 ou par 43. (GELIN.)

2481. Un nombre est divisible par un diviseur D de $m.10^n + 1$, lorsque, ayant séparé n chiffres sur la droite de ce nombre, la différence entre le nombre de gauche et m fois le nombre de droite est divisible par D. Déduire, de ce

théorème : 1° qu'un nombre est divisible par 17 ou par 53, diviseurs de 901, lorsque le nombre de ses centaines, diminué de 9 fois le nombre formé par ses deux premiers chiffres à droite, est divisible par 17 ou par 53; 2° qu'un nombre est divisible par 23 ou par 29, diviseurs de 2001, lorsque le nombre de ses mille, diminué de 2 fois le nombre formé par ses trois premiers chiffres à droite, est divisible par 23 ou par 29. (JACOB DE GELDER.)

2482. Soit D un diviseur de $10^n - p$: un nombre est divisible par D, lorsque, ayant séparé n chiffres sur la droite de ce nombre, la somme de p fois le nombre de gauche et du nombre de droite est divisible par D. Déduire, de ce théorème : 1° qu'un nombre est divisible par 47, diviseur de 94 ou 100 — 6, lorsque le produit du nombre de ses centaines par 6, augmenté du nombre formé par ses deux premiers chiffres à droite, est divisible par 47; 2° qu'un nombre est divisible par 83, diviseur de 996 ou 1000 — 4, lorsque le produit du nombre de ses mille par 4, augmenté du nombre formé par ses trois premiers chiffres à droite, est divisible par 83. (GELIN.)

2483. Soit D un diviseur de $10^n + p$: un nombre est divisible par D, lorsque, ayant séparé n chiffres sur la droite de ce nombre, la différence entre p fois le nombre de gauche et le nombre de droite est divisible par D. Déduire, de ce théorème : 1° qu'un nombre est divisible par 53, diviseur de 106, lorsque le produit du nombre de ses centaines par 6, diminué du nombre formé par ses deux premiers chiffres à droite, est divisible par 53; 2° qu'un nombre est divisible par 19 ou par 53, diviseurs de 1007, lorsque le produit du nombre de ses mille par 7, diminué du nombre formé par ses trois premiers chiffres à droite, est divisible par 19 ou par 53. (GELIN.)

2484. Soit D un diviseur de $m.10^n - p$, et D premier avec m : un nombre est divisible par D, lorsque, ayant séparé n chiffres sur la droite de ce nombre, la somme de p fois le nombre de gauche et de m fois le nombre de droite est divisible par D. Déduire, de ce théorème, qu'un nombre est divisible par 53 ou par 283, diviseurs de 29998 ou 30000 — 2, lorsque la somme de 2 fois le nombre de ses dizaines de mille et de 3 fois le nombre formé par ses quatre premiers chiffres à droite est divisible par 53 ou par 283. (GELIN.)

2485. Soit D un diviseur de $m.10^n + p$, et D premier avec m : un nombre est divisible par D, lorsque, ayant séparé n chiffres sur la droite de ce nombre, la différence entre p fois le nombre de gauche et m fois le nombre de droite est divisible par D. Déduire, de ce théorème, qu'un nombre est divisible par 53 ou par 151, diviseurs de 8003, lorsque la différence entre 3 fois le nombre de ses mille et 8 fois le nombre formé par ses trois premiers chiffres à droite est divisible par 53 ou par 151. (GELIN.)

2486. Un nombre est divisible par un diviseur D de $m.10^n - 1$, lorsque, ayant séparé n chiffres sur la droite de ce nombre, le quotient du nombre de gauche par m, augmenté du nombre formé en écrivant le nombre de droite à la droite du reste, est divisible par D. Déduire, de ce théorème : 1° qu'un nombre est divisible par 29 ou par 31, diviseurs de 899 ou 900 — 1, lorsque le quotient du nombre de ses centaines par 9, augmenté du nombre formé en écrivant à la droite du reste ses deux premiers chiffres à droite, est divisible par 29 ou par 31; 2° qu'un nombre est divisible par 31 ou par 43, diviseurs de 3999 ou 4000 — 1, lorsque le quotient du nombre de ses mille par 4, augmenté

du nombre formé en écrivant à la droite du reste ses trois premiers chiffres à droite, est divisible par 31 ou par 43. (GELIN.)

2487. Un nombre est divisible par un diviseur D de $m.10^n + 1$, lorsque, ayant séparé n chiffres sur la droite de ce nombre, le quotient du nombre de gauche par m, diminué du nombre formé en écrivant le nombre de droite à la droite du reste, est divisible par D. Déduire, de ce théorème : 1° qu'un nombre est divisible par 17 ou par 53, diviseurs de 901, lorsque le quotient du nombre de ses centaines par 9, diminué du nombre formé en écrivant à la droite du reste ses deux premiers chiffres à droite, est divisible par 17 ou par 53; 2° qu'un nombre est divisible par 23 ou par 29, diviseurs de 2001, lorsque le quotient du nombre de ses mille par 2, diminué du nombre formé en écrivant à la droite du reste ses trois premiers chiffres à droite, est divisible par 23 ou par 29. (GELIN.)

2488. Soit D un diviseur de $m.10^n - p$: un nombre est divisible par D, lorsque, ayant séparé n chiffres sur la droite de ce nombre et divisé le nombre de gauche par m, la somme de p fois le quotient et du nombre formé en écrivant le nombre de droite à la droite du reste est divisible par D. Déduire, de ce théorème, qu'un nombre est divisible par 571, diviseur de 3997 ou 4000 — 3, lorsque, ayant divisé par 4 le nombre de ses mille, la somme de 3 fois le quotient et du nombre formé en écrivant à la droite du reste ses trois premiers chiffres à droite est divisible par 571. (GELIN.)

2489. Soit D un diviseur de $m.10^n + p$: un nombre est divisible par D, lorsque, ayant séparé n chiffres sur la droite de ce nombre et divisé le nombre de gauche par m, la différence entre p fois le quotient et le nombre formé en écrivant le nombre de droite à la droite du reste est divisible par D. Déduire, de ce théorème, qu'un nombre est divisible par 53 ou par 151, diviseurs de 8003, lorsque, ayant divisé le nombre de ses mille par 8, la différence entre 3 fois le quotient et le nombre formé en écrivant à la droite du reste ses trois premiers chiffres à droite est divisible par 53 ou par 151. (GELIN.)

2490. Un nombre est divisible par 4 lorsqu'il est terminé par un chiffre pairement pair, précédé d'un chiffre pair, ou par un chiffre impairement pair, précédé d'un chiffre impair. (GELIN.)

2491. Un nombre est divisible par 8 lorsque, le chiffre de ses centaines étant pair, le nombre formé par ses deux derniers chiffres à droite est divisible par 8; ou lorsque, le chiffre de ses centaines étant impair, le nombre formé par ses deux derniers chiffres à droite est divisible par 4 sans l'être par 8. (GELIN.)

2492. Déterminer les chiffres x et y de manière que le nombre $365xy$ soit divisible par 47. — *R.* 1, 9.

2493. Déterminer les chiffres x et y de manière que le nombre $1234xy$ soit divisible par 8 et par 9. — *R.* 8, 0 ou 0, 8.

2494. Déterminer les chiffres x, y, z de manière que le nombre $2xy75z$ soit divisible par 792. — *R.* 0, 2, 2.

2495. Dans la multiplication de 126357 par 9805, l'opérateur a placé le premier chiffre à droite du second produit partiel sous le second chiffre à droite du premier produit partiel. Il fait ensuite la preuve par 7 ou par 9 ou par 11. Découvrira-t-il son erreur? — *R.* Non.

2496. N étant un nombre formé de m chiffres 9, et A un nombre formé de

m chiffres quelconques, tout commun diviseur des deux nombres N et A divise les nombres obtenus en échangeant les chiffres de A par permutation circulaire, c'est-à-dire les nombres formés successivement en enlevant le premier chiffre à gauche du nombre précédent pour le transporter à sa droite. Par exemple, le nombre 13, qui divise 999999 et 675038, divise aussi les cinq nombres 750386, 503867, 038675, 386750, 867503, formés successivement en enlevant le premier chiffre à gauche du nombre précédent pour le transporter à sa droite.

2497. La somme ou la différence de deux nombres pairs, ou de deux nombres impairs, est un nombre pair; et la somme ou la différence de deux nombres, l'un pair, l'autre impair, est un nombre impair.

2498. Le produit de plusieurs nombres, tous impairs, est un nombre impair; et le produit de plusieurs nombres, dont un au moins est pair, est un nombre pair.

2499. De deux nombres pairs consécutifs, l'un est impairement pair et l'autre pairement pair.

2500. Tout nombre pairement pair est la somme de deux nombres impairs consécutifs.

2501. Tout nombre impair est égal à un multiple de 4, augmenté ou diminué d'une unité.

2502. Si l'on prend au hasard deux nombres entiers, l'un d'eux ou leur somme ou leur différence est un multiple de 3.

2503. Parmi n nombres consécutifs, il y en a un qui est divisible par n.

2504. Le produit de trois nombres consécutifs est divisible par 6. Il en est de même de leur somme.

2505. Le produit de quatre nombres consécutifs est divisible par 24.

2506. Le produit de cinq nombres consécutifs est divisible par 120.

2507. Le produit de six nombres consécutifs est divisible par 720.

2508. Le produit de sept nombres consécutifs est divisible par 5040.

2509. Si mn est un multiple de d, plus 1, un nombre quelconque, écrit dans la base m, et le même nombre renversé, supposé écrit dans la base n, sont en même temps divisibles ou non divisibles par d. (GELIN.)

2510. Si les deux sommes $ax + by$ et $ay + bx$ sont divisibles par un certain nombre, les deux produits $(a + b)(x + y)$ et $(a - b)(x - y)$ seront aussi divisibles par le même nombre.

2511. Si les différences $a - b$ et $c - d$ sont divisibles par un certain nombre, les différences $ac - bd$ et $ad - bc$ seront aussi divisibles par le même nombre.

2512. Si $ma + nb$ est divisible par $m - n$, le produit $(a + b)(m + n)$ l'est aussi. La réciproque n'est pas vraie.

2513. Le produit $n(2n + 1)(3n + 1)(4n + 1)\ldots(mn + 1)$ est divisible par tous les nombres premiers inférieurs à m.

2514. Trouver n nombres entiers consécutifs dont aucun ne soit premier. — *R.* Au produit de tous les nombres de 2 à $n + 1$, ajouter successivement tous les nombres de 2 à $n + 1$.

2515. A l'exception des nombres premiers et des nombres simplement pairs, tout nombre entier est égal à une somme de nombres impairs consécutifs.

2516. Tout nombre premier, autre que 2 et 3, est un multiple de 6, augmenté ou diminué d'une unité. La réciproque n'est pas vraie.

2517. Décomposer en leurs facteurs premiers les nombres 281474976710656, 1001129150390625, 2478758911082496, 7837433594376961, 9227446944279201.

2518. Trouver tous les diviseurs des nombres 96, 360, 1024, 64000, 331776.

2519. Trouver le nombre, la somme et le produit des diviseurs d'un nombre entier.

2520. Le nombre des diviseurs d'un nombre entier est pair, excepté si ce nombre est un carré.

2521. Trouver le plus petit nombre admettant 12 ou 15 ou 100 ou 180 diviseurs. — *R.* 60; 144; 45360; 277200.

2522. Déterminer un nombre composé des facteurs premiers 2, 5, 7 et tel que, si on le multiplie par 5 ou par 7, on augmente de 8 ou de 12 le nombre de ses diviseurs. — *R.* 1400.

2523. Quel est le nombre de deux chiffres qui admet le plus grand nombre de diviseurs? — *R.* 60, 72, 84, 90 ou 96.

2524. Décomposer les nombres 96, 144 et 360 en deux facteurs entiers, de toutes les manières possibles.

2525. Décomposer le nombre 364535248833068544 en quatre facteurs premiers entre eux deux à deux. — *R.* $512 \times 59049 \times 823543 \times 14641$.

2526. De combien de manières un nombre entier peut-il être décomposé en un produit de deux facteurs entiers?

2527. De combien de manières un nombre entier peut-il être décomposé en un produit de deux facteurs premiers entre eux?

2528. De combien de manières un nombre entier peut-il être décomposé en deux facteurs de même parité?

2529. La somme des diviseurs d'un nombre pair, donnant des quotients pairs, est égale à la somme des diviseurs de la moitié de ce nombre.

2530. Un nombre pair étant décomposé, de toutes les manières possibles, en deux facteurs, l'un pair, l'autre impair, la différence entre la somme des facteurs pairs et la somme des facteurs impairs est égale à la somme des diviseurs de la moitié de ce nombre.

2531. Le nombre des diviseurs d'une puissance d'un nombre est premier avec le degré de cette puissance.

2532. On appelle *nombre parfait* celui qui est égal à la somme de ses parties aliquotes. Démontrer : 1° que les nombres de la forme $2^{n-1}(2^n - 1)$ sont parfaits, lorsque $2^n - 1$ est premier (EUCLIDE); 2° qu'il n'existe pas de nombres parfaits pairs autres que ceux qui sont compris dans cette formule (EULER); 3° que la somme des inverses des diviseurs d'un nombre parfait est égale à 2.

2533. On ne connaît que neuf nombres parfaits, correspondant aux valeurs 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61 de n dans la formule $2^{n-1}(2^n - 1)$. Calculer ces nombres. — *R.* 6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056, 137438691328, 2305843008139952128, 2658455991569831744654692615953842176.

2534. Démontrer : 1° que tout nombre parfait pair, autre que 6, est un multiple de 9, plus 1; 2° que tout nombre parfait pair, autre que 28, est un multiple de 7, plus ou moins 1; 3° que les nombres parfaits pairs sont terminés par 6 ou par 28; 4° que tout nombre parfait pair terminé par 6 est un multiple de 45, plus 1; 5° que tout nombre parfait pair, terminé par 8, est un multiple de 30, moins 2; 6° que le nombre des centaines d'un nombre parfait terminé

par 8 est un multiple de 9; 7° que tout nombre parfait pair, autre que 6 ou 496, est terminé par 16, 28, 36, 56 ou 76; 8° que l'octuple d'un nombre parfait pair, augmenté de 1, est un carré.

2535. Vérifier que les six nombres suivants sont *sous-doubles*, ou égaux à la moitié de la somme de leurs parties aliquotes : $2^3.3.5$, $2^5.3.7$, $2^8.5.7.19.37.73$, $2^9.3.11.31$, $2^{13}.3.11.43.127$, $2^{14}.5.7.19.31.151$. (DESCARTES et FERMAT.)

2536. Vérifier que les nombres $2^5.3^3.5.7$ et $2^3.3^2.5.7.13$ ou 30 240 et 32 760 sont *sous-triples*, ou égaux au tiers de la somme de leurs parties aliquotes. (DESCARTES.)

2537. Vérifier que les quatre nombres suivants sont *sous-quadruples* : $2^7.3^4.5.7.11^2.17.19$, $2^{10}.3^4.5.7^2.11^2.19.23.89$, $2^{17}.5.7^2.13.19^2.37.73.127$, $2^{20}.3^3.5.7^2.13^2.19.31.61.127.337$. (FERMAT.)

2538. Vérifier que les deux nombres suivants sont *sous-quintuples* : $2^{23}.3^7.5^3.7^4.11.13^2.17^2.31.41.61.241.307.467.2801$, $2^{27}.3^5.5^3.7.11.13^2.19.29.31.43.61.113.127$. (FERMAT.)

2539. Vérifier que le plus petit nombre abondant impair est 10 665. On appelle *nombre abondant* celui qui est moindre que la somme de ses parties aliquotes.

2540. Si le nombre $2^n + 1$ est premier, le nombre $2^{n-1}(2^n + 1)$ surpasse de 2 la somme de ses parties aliquotes.

2541. Vérifier que la somme des diviseurs du cube de 7 ou du cube de 751 530 est un carré. — *R.* 400; $1\,292\,054\,400^2$.

2542. On appelle *amiables* deux nombres dont chacun est égal à la somme des parties aliquotes de l'autre. Démontrer que les nombres $2^n(3^2.2^{2n-1} - 1)$ et $2^n(3.2^{n-1} - 1)(3.2^n - 1)$ sont amiables, lorsque les facteurs entre parenthèses sont premiers. On connaît trois couples de nombres amiables, correspondant aux valeurs 2, 4 et 7 de n : calculer ces trois couples. — *R.* 220 et 284, 17 296 et 18 416, 9 363 584 et 9 437 056.

2543. Vérifier que les nombres $3^5.7^2.13.19.53.6959$ et $3^5.7^2.13.19.179.2087$ sont amiables. (EULER.)

2544. Tout nombre premier absolu est premier avec tous les nombres qui ne sont pas ses multiples.

2545. Si un nombre premier ne divise aucun des facteurs d'un produit, il ne peut diviser ce produit.

2546. Deux nombres consécutifs, et, en général, autant de nombres qu'on voudra, parmi lesquels il y a deux nombres consécutifs, sont premiers entre eux.

2547. Trois nombres entiers consécutifs, dont un seul pair, sont premiers entre eux deux à deux.

2548. Tout diviseur d'un nombre est premier avec le nombre qui le précède ou qui le suit.

2549. Deux nombres impairs consécutifs sont premiers entre eux.

2550. Deux nombres premiers entre eux sont aussi premiers avec leur somme et avec leur différence.

2551. Si la somme de deux nombres est un nombre premier, ces deux nombres sont premiers eux.

2552. Si la différence de deux nombres est un nombre premier, ces deux nombres sont multiples de ce nombre premier, ou sont premiers entre eux.

2553. Si a et b sont premiers entre eux, $a + b$ et $a^2 - ab + b^2$ ne peuvent avoir d'autre commun diviseur que 3.

2554. Si deux nombres sont premiers entre eux : 1° leur somme et leur produit sont premiers entre eux ; 2° leur différence et leur produit sont premiers entre eux ; 3° leur somme et leur différence sont premières entre elles ou ont 2 pour plus grand commun diviseur.

2555. Si a, b, c, d sont quatre nombres premiers avec p et si les différences $ab - cd$ et $a - c$ sont divisibles par p, la différence $b - d$ est aussi divisible par p.

2556. Si $a + b$ n'est pas divisible par le nombre impair n, le quotient de $a^n + b^n$ par $a + b$ est premier avec $a + b$. Mais si $a + b$ est divisible par n^m, le quotient de $a^n + b^n$ par $n(a + b)$ est premier avec $a + b$.

2557. Si $N = a^m b^n c^p$, a, b, c étant des nombres premiers, démontrer qu'il y a $a^{m-1} b^{n-1} c^{p-1} (a - 1) (b - 1) (c - 1)$ nombres premiers avec N moindres que N.

2558. Le nombre des nombres entiers premiers avec un nombre N et moindres que sa moitié est la moitié du nombre des nombres premiers avec N et moindres que lui.

2559. Trouver le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple des trois nombres 722 204 136 308 736, 1 352 605 460 594 688, 7 213 895 789 838 336. — *R.* 110 075 314 176, 47 330 370 277 129 319 496.

2560. Partager, sans mélange, 2479 litres d'un liquide et 1517 litres d'un autre liquide en le plus petit nombre possible de volumes, tous égaux. — *R.* 67 et 41 volumes de 37 litres.

2561. Dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres par la méthode des divisions successives : 1° le quotient de la dernière division ne peut être inférieur à 2 ; 2° un reste quelconque est au moins égal à la somme des deux restes suivants et il est moindre que la moitié du reste qui le précède de deux rangs.

2562. Trouver les deux plus petits nombres dont le plus grand commun diviseur soit 12 et s'obtienne par dix divisions successives. — *R.* 1728, 1068.

2563. Le nombre de divisions à effectuer pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres est au plus égal au degré de la plus haute puissance de 2, non supérieure au plus petit des deux nombres.

2564. Le nombre des divisions à faire pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres ne peut excéder cinq fois le nombre des chiffres du plus petit des deux nombres proposés, ni même trois fois ce nombre, si l'on fait en sorte qu'aucun des restes n'excède la moitié du diviseur correspondant.

2565. Pour avoir la limite la plus approchée du nombre des divisions à faire, dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres, parmi celles qui ne diminuent pas lorsque le plus petit des deux nombres augmente, il suffit d'écrire les termes de la suite 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, etc., où chaque terme est égal à la somme des deux qui le précèdent, jusqu'au premier terme supérieur au plus petit des nombres donnés, et de *compter le nombre des termes précédents*. Si l'on fait en sorte qu'aucun des restes n'excède la moitié du diviseur correspondant, on substitue à la série donnée la suivante : 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, etc., où chaque terme est égal au double de celui qui le précède, plus l'avant-précédent.

2566. Le plus grand commun diviseur de deux nombres est le même que celui de l'un de ces nombres et de leur différence.

2567. Le plus grand commun diviseur des nombres a et b est le même que celui des nombres $a + bm$ et $a \pm b + bm$.

2568. Pour trouver le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres, on divise par le plus petit de ces nombres chacun des autres nombres; on opère de la même manière sur le plus petit nombre et les restes obtenus, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à des nombres dont le plus petit divise chacun des autres : ce plus petit nombre est le plus grand commun diviseur cherché.

2569. Pour trouver le plus grand commun diviseur d'un nombre a et du produit bc, on cherche le plus grand commun diviseur D de a et b; on divise a par D et on cherche le plus grand commun diviseur d du quotient et de c : le produit Dd est le plus grand commun diviseur cherché.

2570. Étendre la méthode précédente à la recherche du plus grand commun diviseur d'un nombre et du produit de plusieurs autres.

2571. Le plus grand commun diviseur de deux nombres a et b est égal au nombre des multiples de b contenus dans la suite a, $2a$, $3a$, ... ba.

2572. Étant donnés trois nombres a, b, c, on forme les deux suites a, $2a$, $3a$, ... ca, b, $2b$, $3b$, ... cb, et on cherche combien de fois deux termes de même rang de ces deux suites sont simultanément divisibles par c : ce nombre de fois est le plus grand commun diviseur des trois nombres.

2573. Trois nombres impairs quelconques ont le même plus grand commun diviseur que les demi-sommes de ces nombres pris deux à deux.

2574. Étant donnés n nombres dont la somme est s et dont le plus grand commun diviseur est d, démontrer que le plus grand commun diviseur des nombres obtenus en retranchant de s chacun des nombres donnés est égal au produit de d par un diviseur de $n - 1$.

2575. Trouver les trois plus petits nombres qui, divisés successivement par 9, 10, 11, 12, 13, donnent toujours 8 pour reste. — *R.* 25 748, 51 488, 77 228.

2576. Trouver les trois plus petits nombres qui, divisés successivement par 9, 10, 11, 12, 13, donnent respectivement pour restes 1, 2, 3, 4, 5. — *R.* 25 732, 51 472, 77 212.

2577. En divisant 1347, 1965, 2386, 9306 par un certain nombre, on obtient respectivement pour restes 51, 21, 10, 18 : quel est ce nombre? — *R.* 54, 72, 108 ou 216.

2578. On demandait à un marchand de chevaux combien il en avait. Il répondit : J'en ai plus de 500 et moins de 1000; en les comptant quatre par quatre, ou cinq par cinq, ou six par six, il en reste chaque fois un; mais en les comptant sept par sept, il n'en reste point. Combien ce marchand avait-il de chevaux? — *R.* 903.

2579. Les neuf Muses, portant chacune le même nombre de couronnes, rencontrent les trois Grâces et leur offrent des couronnes. Les Grâces et les Muses ont alors chacune le même nombre de couronnes. Quel est le nombre de celles-ci? — *R.* Un multiple de 36.

2580. Les trois Grâces portent des oranges, chacune le même nombre; elles rencontrent les neuf Muses et leur donnent chacune le même nombre d'oranges : chacune des Grâces et des Muses se trouve alors également partagée. Quel est le nombre des oranges? — *R.* Un multiple de 12.

2581. On place l'une contre l'autre trois règles, longues chacune de 360 millimètres, de manière qu'elles aient les extrémités communes. Chacune est

divisée en parties égales; mais les divisions de la première valent 8 millimètres, celles de la seconde 12 millimètres et celles de la troisième 20 millimètres. Déterminer les traits de division qui coïncident sur les trois règles. — *R.* 15, 10, 6; 30, 20, 12; 45, 30, 18.

2282. A quelles heures les deux aiguilles d'une horloge sont-elles l'une sur l'autre? — *R.* Les onze premiers multiples de $1\frac{1}{11}$ heure.

2283. A quelles heures les deux aiguilles d'une horloge sont-elles en ligne droite? — *R.* Les onze premiers multiples impairs de $\frac{6}{11}$ d'heure.

2284. A quelles heures les deux aiguilles d'une horloge sont-elles perpendiculaires l'une à l'autre? — *R.* Les 22 premiers multiples impairs de $\frac{4}{11}$ d'heure.

2285. A quelles heures l'angle des deux aiguilles d'une horloge est-il égal à $\frac{1}{100}$ d'angle droit? — *R.* Les onze premiers multiples de $1\frac{1}{11}$ heure, augmentés ou diminués de $\frac{1}{1100}$ d'heure.

2286. Quelles sont les heures auxquelles on peut permuter les aiguilles d'une horloge, de telle sorte que la nouvelle position puisse se produire par le mouvement même de l'horloge? (LAISANT.) — *R.* Les 143 premiers multiples de $\frac{12}{143}$ d'heure.

2287. Trois aiguilles se meuvent uniformément sur le cadran d'une horloge. L'aiguille des heures fait le tour du cadran en 12 heures; l'aiguille des minutes, en 1 heure; l'aiguille des secondes, en 1 minute. Les trois aiguilles coïncident à midi. Faire voir : 1° que chaque aiguille fera le même angle avec chacune des deux autres respectivement après des intervalles de $\frac{12}{730}$, $\frac{12}{697}$ et $\frac{12}{1427}$ d'heure; 2° que ce phénomène se reproduira respectivement 730, 697, 1427, et, en tout, 2854 fois en 12 heures.

2288. Pour qu'un commun multiple de plusieurs nombres soit le plus petit, il faut et il suffit qu'en le divisant successivement par chacun de ces nombres, on obtienne des quotients premiers entre eux.

2289. Quand un nombre est divisible par plusieurs nombres premiers entre eux deux à deux, il est divisible par leur plus petit commun multiple.

2290. Le plus petit commun multiple des nombres 1, 2, 3, ... $2n$ est le même que celui des nombres $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, ... $2n$. (CATALAN.)

2291. Plus généralement, le plus petit commun multiple des nombres 1, 2, 3, ... a, b, $b + 1$, $b + 2$, ... $b + a - 1$ est le même que celui des nombres b, $b + 1$, $b + 2$, ... $b + a - 1$. ([illegible])

2292. Si les quotients de la division de deux ou plusieurs nombres par un certain nombre sont premiers entre eux, ce dernier nombre est le plus grand commun diviseur des autres nombres.

2293. Si les quotients de la division d'un nombre par deux ou plusieurs autres sont premiers entre eux, le premier nombre est le plus petit commun multiple des autres nombres.

2294. Le plus petit commun multiple de plusieurs nombres est égal à un [illegible] commun [illegible] plus grand commun diviseur des [illegible] de chacun de ces nombres.

2295. [illegible] est divisé [illegible] des nombres $n - 1$ à $n - 1$.

2296. [illegible] plus grand [illegible] commun multiple [illegible]

3° leur produit et leur plus petit commun multiple; ou 4° leur plus grand commun diviseur et leur plus petit commun multiple.

2597. On marque m points sur une circonférence, et on les joint de n en n en parcourant la circonférence toujours dans le même sens. Démontrer : 1° qu'on reviendra au point de départ après avoir franchi un nombre de points égal au plus petit commun multiple de m et n; 2° que le nombre des points de division qu'on aura touchés sera égal au quotient de m par le plus grand commun diviseur de m et n; 3° que le nombre de fois que l'on aura parcouru la circonférence sera égal au quotient de n par le même plus grand commun diviseur.

2598. Un nombre terminé par 2, 3, 7 ou 8 ne peut être un carré parfait.

2599. Le chiffre des dizaines d'un nombre carré est pair, excepté lorsque ce carré est terminé par 6.

2600. Le carré d'un nombre terminé par 5 est terminé par 025, 225 ou 625.

2601. Tout nombre carré est terminé par l'un des vingt-deux nombres suivants de deux chiffres : 1° par les nombres 00 ou 25; 2° par les nombres 01, 21, 41, 61, 81, ou 04, 24, 44, 64, 84, ou 09, 29, 49, 69, 89, formés d'un chiffre pair suivi de 1 ou 4 ou 9; 3° par les nombres 16, 36, 56, 76, 96, formés d'un chiffre impair suivi de 6.

2602. Quand un carré est terminé par 1 ou par 9, le chiffre de ses centaines est pair ou impair, suivant que le chiffre des dizaines est pairement ou impairement impair. (GERONDAL.)

2603. Les carrés terminés par deux chiffres égaux sont terminés par 00 ou 44, et leurs racines sont terminées par 0, 12 ou 88, 38 ou 62.

2604. Les carrés des nombres terminés par 0 000 000 000 ou 0 000 000 001 ou 1 787 109 376 ou 8 212 890 625 sont terminés respectivement par les mêmes chiffres.

2605. Connaissant les neuf derniers chiffres 224 406 889 du carré d'un nombre, trouver les neuf derniers chiffres de ce nombre. (GELIN.) — *R.* 265 810 083, 765 810 083, 363 466 333, 863 466 333, ou les compléments à 1 000 000 000 de ces quatre nombres.

2606. Si l'on écrit les uns à la suite des autres les chiffres des dizaines des carrés successifs terminés par 1 ou par 4 ou par 6 ou par 9, la suite que l'on obtiendra sera périodique, la période aura dix chiffres, et les deux chiffres à égale distance des extrêmes dans la période seront égaux.

2607. Toute somme de deux carrés a un nombre pair de dizaines, si elle est terminée par 1, 5 ou 9, et un nombre impair de dizaines, si elle est terminée par 3 ou 7. (GERONDAL.)

2608. Pour faire le carré d'un nombre terminé par 5, du nombre 95, par exemple, on multiplie le nombre 9 de ses dizaines par le nombre suivant 10, et on écrit 25 à droite du produit.

2609. Réciproquement, un nombre terminé par 25 est un carré parfait, lorsque le nombre de ses centaines est le produit de deux nombres consécutifs.

2610. Pour former le carré d'un nombre composé de n chiffres 9, on écrit $n-1$ chiffres 9, puis 8, puis $n-1$ chiffres 0, puis 1. On a, par exemple, $9999^2 = 99\,980\,001$. (IBN ALBANNA.)

2611. Le carré du nombre 9 090 909 091 est formé de deux parties identiques. Il en est de même des carrés de ses neuf premiers multiples. — *R.* 00 826 446 281 00 826 446 281.

2612. Trouver les carrés parfaits de trois, quatre, cinq ou six chiffres qui, retournés, sont encore des carrés parfaits. — *R.* 1° 121, 144 et 441, 169 et 961, 484, 676; 2° 1089 et 9801; 3° 14 641, 69 696; 4° 698 896.

2613. Si A est un nombre composé de $2m$ chiffres 1 ou 4 et B un nombre composé de m chiffres 4, le nombre $A + B + 1$ est un carré.

2614. Dans tout système de numération, les nombres 121, 12 321, 1 234 321, 123 454 321, etc., sont des carrés de nombres formés d'autant de chiffres 1 que l'indique le chiffre du milieu de chacun de ces nombres.

2615. Dans la base 12 et dans la base 16, un carré ne peut être terminé que par l'un des chiffres 0, 1, 4 ou 9. (GELIN.)

2616. Dans tout système de numération, le double du nombre qui précède la base et le carré de ce nombre s'écrivent avec les mêmes chiffres, pris dans l'ordre inverse.

2617. Pour écrire dans la base B^2 un nombre écrit dans la base B, on partage ce nombre en tranches de deux chiffres, et on remplace chaque tranche par le chiffre qui la représente dans la base B^2.

2618. La différence des carrés de deux nombres est égale à la somme de ces nombres multipliée par leur différence.

2619. Le produit de deux nombres est égal au carré de leur demi-somme moins le carré de leur demi-différence.

2620. Le carré d'un nombre impair est un multiple de 8, plus 1.

2621. Le carré d'un nombre premier, autre que 2 et 3, est un multiple de 24, plus 1.

2622. Le carré d'un nombre pair, divisé par 16, donne pour reste 0 ou 4.

2623. La différence des carrés de deux nombres consécutifs est égale à la somme de ces nombres.

2624. Trouver deux nombres consécutifs, sachant que la différence de leurs carrés est 1789. — *R.* 894, 895.

2625. Tout nombre impair est la différence de deux carrés consécutifs.

2626. Tout nombre pairement pair est la différence de deux carrés entiers.

2627. Si deux nombres sont premiers avec 3, la différence de leurs carrés est divisible par 3.

2628. Si deux nombres sont premiers avec 5, la somme ou la différence de leurs carrés est divisible par 5.

2629. La somme des carrés de deux nombres entiers n'est divisible par 3, 7, 11, 19, 23, 31, que si ces nombres sont eux-mêmes divisibles par 3, 7, 11, 19, 23, 31. (GELIN.)

2630. Si la somme des carrés de deux nombres est le double d'un carré, la différence des mêmes carrés est divisible par 48.

2631. La somme d'un nombre impair et du carré de la moitié du nombre immédiatement inférieur est un carré.

2632. Le double produit de deux nombres quelconques, la demi-différence et la demi-somme de leurs carrés sont trois nombres tels que la somme des carrés des trois premiers est égale au carré du troisième.

2633. Si un carré entier a^2 est égal à la somme de deux autres carrés entiers b^2 et c^2 : 1° l'un des nombres b, c est divisible par 3; 2° l'un des nombres b, c est divisible par 4; 3° l'un des nombres a, b, c est divisible par 5.

2634. Si le carré d'un nombre entier est la somme des carrés de deux autres, et si les trois nombres contiennent le facteur 2 respectivement aux puissances a, b, c, l'un des nombres b ou c est égal à a et l'autre au moins égal à $a+2$.

2635. Si un nombre pair est la somme de deux carrés entiers, sa moitié est aussi la somme de deux carrés entiers.

2636. Tout nombre premier, autre que 2, est, d'une seule manière, la différence de deux carrés entiers.

2637. Si un nombre premier est décomposable en une somme de deux carrés entiers, il ne l'est que d'une manière.

2638. Si deux nombres, l'un pair, l'autre impair, sont premiers entre eux, la différence de leurs carrés ne peut être un carré que si leur somme et leur différence sont elles-mêmes des carrés.

2639. Si deux ou plusieurs nombres sont chacun la somme de deux carrés, leur produit est aussi la somme de deux carrés.

2640. Si deux ou plusieurs nombres sont chacun la somme d'un carré et d'un même multiple d'un autre carré, leur produit est aussi la somme d'un carré et du même multiple d'un autre carré.

2641. Le produit de deux ou trois ou quatre ou cinq nombres consécutifs n'est jamais un carré.

2642. Le produit de quatre nombres consécutifs, augmenté de 1, est un carré.

2643. La somme des produits deux à deux de trois nombres impairs quelconques n'est jamais un carré. (DE ROCQUIGNY.)

2644. Si un nombre est la somme de trois carrés, son carré est la somme de quatre carrés.

2645. Le cube d'un nombre terminé par 5 est terminé par 125, 375, 625 ou 875.

2646. Si un cube est terminé par 2 ou par 6, le chiffre de ses dizaines est impair. S'il est terminé par 4 ou par 8, le chiffre de ses dizaines est pair.

2647. Si un cube est terminé par n chiffres 9, sa racine cubique est aussi terminée par n chiffres 9. (GELIN.)

2648. Trouver les six derniers chiffres d'un nombre, sachant que son cube est terminé par 777 777. (GELIN.) — *R.* 260 753.

2649. La différence des cubes de deux nombres consécutifs est égale au triple produit de ces nombres, plus 1.

2650. Trouver deux nombres consécutifs, sachant que la différence de leurs cubes est 197 377. — *R.* 256, 257.

2651. Si l'on écrit les uns à la suite des autres les chiffres des dizaines des cubes successifs terminés par 2 ou par 4 ou par 6 ou par 8, la suite que l'on obtiendra sera périodique et la période aura cinq chiffres.

2652. Tout cube entier est un multiple de 7, ou un multiple de 7, plus ou moins 1.

2653. Tout cube entier est un multiple de 9, ou un multiple de 9, plus ou moins 1.

2654. Le cube d'un nombre premier, autre que 2 et 3, est un multiple de 18, plus ou moins 1.

2655. Si l'on divise un nombre et son cube par 6, on trouve le même reste.

2656. Les restes de la division par 9 des cubes consécutifs se reproduisent périodiquement de trois en trois.

2657. La somme des cubes de trois nombres consécutifs est divisible par 9 et par le triple du nombre du milieu.

2658. La somme des cubes de trois nombres dont aucun n'est divisible par 2, 3, 5, 7 ou 13 n'est divisible par 2, 3, 5, 7 ou 13. (GELIN.)

2659. Le cube d'un nombre entier est la différence de deux carrés dont l'un est divisible par 9.

2660. Si au cube d'un nombre entier on ajoute 3, 4, 5 ou 6 unités d'un ordre quelconque, la somme n'est jamais un cube.

2661. Le cube d'un nombre entier est égal à la somme de ce nombre et de son produit par le nombre qui le précède et le nombre qui le suit.

2662. Le cube de la somme de deux nombres est égal à la somme des cubes de ces nombres, plus trois fois leur produit multiplié par leur somme.

2663. Le cube de la différence de deux nombres est égal à la différence des cubes de ces nombres, moins trois fois leur produit multiplié par leur différence.

2664. Le produit de deux ou trois ou quatre nombres consécutifs n'est jamais un cube.

2665. La quatrième puissance d'un nombre terminé par 5 est terminée par 0625, et sa huitième puissance est terminée par 90625.

2666. La quatrième puissance d'un nombre non terminé par 0 ni par 5 est terminée par 1 ou par 6.

2667. La différence des quatrièmes puissances de deux nombres non divisibles par 5 est divisible par 5.

2668. La quatrième puissance d'un nombre impair, non terminé par 5, est un multiple de 80, plus 1.

2669. Si un nombre est la somme de deux autres : 1° la somme des carrés des produits deux à deux des trois nombres est un carré; 2° la somme des carrés des trois nombres et des carrés de leurs produits deux à deux, augmentée de 1, est un carré; 3° la somme des cubes des trois nombres, ajoutée à leur triple produit, est le double d'un cube; 4° la somme des produits du carré de chaque nombre par la somme des deux autres nombres, ajoutée au produit des trois nombres, est le double d'un cube; 5° la somme des quatrièmes puissances des trois nombres est le double d'un carré. (GELIN.)

2670. La cinquième puissance d'un nombre est terminée par le même chiffre que ce nombre. Par suite, les derniers chiffres des puissances successives d'un nombre se reproduisent périodiquement de quatre en quatre degrés.

2671. Le chiffre des dizaines de la cinquième puissance d'un nombre n'est jamais 1 ni 8. (GELIN.)

2672. La différence des sixièmes puissances de deux nombres non divisibles par 7 est divisible par 7.

2673. La différence des dixièmes puissances de deux nombres non divisibles par 11 est divisible par 11.

2674. La différence des douzièmes puissances de deux nombres non divisibles par 13 est divisible par 13.

2675. La différence des seizièmes puissances de deux nombres non divisibles par 17 est divisible par 17.

2676. Le chiffre des dizaines de mille d'une puissance quelconque de 3 n'est jamais 3 ni 8. (LAISANT.)

2677. Le chiffre des dizaines d'une puissance quelconque de 7 est 0 ou 4. (GELIN.)

2678. Lorsque le chiffre des dizaines d'un nombre impair est pair, le chiffre des dizaines d'une puissance quelconque de ce nombre est aussi pair. (GELIN.)

2679. Lorsqu'un nombre est terminé par 6 et que le chiffre de ses dizaines est impair, le chiffre des dizaines d'une puissance quelconque de ce nombre est aussi impair. (GELIN.)

2680. Toute puissance d'un nombre terminé par 24 est terminée par 76 ou par 24, suivant que le degré de la puissance est pair ou impair. (GELIN.)

2681. Toute puissance d'un nombre terminé par 26 est terminée par 76; de plus, à l'exception du carré, le chiffre des centaines de cette puissance est impair. (GELIN.)

2682. Toute puissance d'un nombre terminé par 76 est terminée par 76; de plus, le chiffre des centaines de cette puissance est impair. (GELIN.)

2683. La somme des puissances semblables de dix nombres consécutifs est terminée par 3 ou par 5, suivant que le degré de la puissance est divisible ou n'est pas divisible par 4.

2684. Dans un système de numération dont la base est $2n$: 1° les nombres terminés par n ont toutes leurs puissances terminées par n, si n est impair, et par 0, si n est pair; 2° les nombres terminés par $n+1$ ont leurs puissances terminées par $n+1$, si n est impair, et alternativement par $n+1$ et 1, si n est pair; 3° les nombres terminés par $n-1$ ont leurs puissances terminées alternativement par $n-1$ et $n+1$, si n est impair, et alternativement par $n-1$ et 1, si n est pair.

2685. Dans tout système de numération dont la base est $2n$, deux nombres terminés par deux chiffres dont la somme est $2n$, ont leurs puissances paires aussi terminées par deux chiffres dont la somme est $2n$.

2686. Toute puissance d'un nombre entier est la différence de deux carrés entiers.

2687. Toute puissance d'un nombre entier n est égale à la somme de n nombres impairs consécutifs.

2688. Si un nombre est une somme de trois carrés, toute puissance de ce nombre est aussi une somme de trois carrés. (CATALAN.)

2689. La somme des produits deux à deux de quatre nombres impairs consécutifs n'est puissance d'aucun nombre. (DE ROCQUIGNY.)

2690. La somme des mêmes puissances paires de neuf ou douze nombres consécutifs n'est puissance d'aucun nombre. (GELIN.)

2691. Plus généralement, si n est un multiple de 9 mais non de 27, ou un multiple impair de 12, la somme des mêmes puissances paires de n nombres entiers consécutifs n'est puissance d'aucun nombre. (GELIN.)

2692. n étant un nombre entier quelconque :

1° $n(n+1)(n+2)$, $n(n+1)(2n+1)$, $n(n+1)(4n+1)$, n^3+n et n^3-n sont multiples de 6;

2° $n^2(n^4-1)$ est multiple de 60;

3° $n(n^2-1)(n^2-4)$ est multiple de 120;

4° $n^2(n^4-1)(n^4-16)$ est multiple de 3600;

5° $n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)$ est multiple de 5040;

6° $n(n^2-1)(4n^2-1)(4n^2-9)$ est multiple de 630;

7° $n(n-2)(2n+3)(n^2-1)(4n^2-1)$ est multiple de 2520 ;
8° $n(n^{12}-1)$ est multiple de 2730.

2693. Si n est pair :
1° $n(n^2-4)$ est multiple de 48 ;
2° $n(n^4-16)$ est multiple de 1920 ;
3° $n^2(n^4+144)$ est multiple de 2880.

2694. Si n est impair :
1° $n(n^4-1)$ est multiple de 240 ;
2° $n^2(n^2-1)(n^4-1)$ est multiple de 5760 ;
3° $n^2(n^2-1)(n^6-1)$ est multiple de 4032 ;
4° $n^2(n^4-1)(n^8-1)$ est multiple de 115 200.

2695. Si n est impair et premier avec 5, $(n^4-1)(n^8-1)$ est multiple de 12800.

2696. Si n est pair et premier avec 3, 5, 13, 17, $(n^8-1)(n^8-16)$ est multiple de 795 600.

2697. Si n est impairement pair, $n(n^2-1)(n^2-4)$ est multiple de 480.

2698. $n^4(n^4-1)^3$ est multiple de 54 000, si n est pair, et de 13 824 000, si n est impair.

2699. a et b étant des nombres entiers, $ab(a^4-b^4)$ est multiple de 30.

2700. Si a et b sont premiers avec 10, le produit $ab(a^2-1)(b^2-1)(a^4-b^4)$ est multiple de 46 080.

2701. Si a, b, c sont trois nombres premiers avec 2, 3, 5, le produit $(a^4-b^4)(a^4-c^4)(b^4-c^4)$ est divisible par 13 824 000.

2702. Si a et b sont deux nombres premiers plus grands que 7, le produit $(a^2-1)(b^2-1)(a^6-b^6)$ est multiple de 580 608.

2703. Si n est premier avec 3, $a^{2n}+a^n+1$ est multiple de a^2+a+1.

2704. n étant un nombre entier quelconque :
1° $2^{n+2}+3^{2n+1}$ est multiple de 7 ;
2° $2^{6n+1}+3^{2n+2}$ est multiple de 11 ;
3° $2^{6n+3}+3^{4n+2}$ et $2^{3n+1}+3.5^{2n+1}$ sont multiples de 17 ;
4° $2^{n+1}+2^{n+4}+5^{2n+1}$ est multiple de 23 ;
5° $3^{3n-3}+7^n.2^{3n-1}$ est multiple de 29 ;
6° $11^{2n}-2^{6n}$ est multiple de 57 ;
7° $2^{8n+2}+7^{4n+4}$ est multiple de 65 ;
8° $3^{12n+6}+1$ est multiple de 730 ;
9° $2^{5n}.3^{4n}-4^{3n}.5^{2n}$ est multiple de 992 ;
10° $6^{12n+6}+8^{36n+18}$ est multiple de 308 800.

2705. n étant un nombre entier quelconque :
1° $2^{2n}-3n-1$ est multiple de 9 ;
2° $2^{3n+2}+21n-4$ est multiple de 49 ;
3° $3^{2n}-8n-1$ est multiple de 64 ;
4° $2^{4n}-15n-1$ est multiple de 225 ;
5° $7^{2n+1}-48n-7$ est multiple de 288.

2706. Quels sont les restes de la division des puissances successives de 61 par 13, ou des puissances successives de 13 par 61, ou des puissances successives de 101 par 31 ? — *R.* 9, 3, 1 ; 13, 47, 1 ; 8, 2, 16, 4, 1.

2707. Trouver le reste de la division de 13^{31} par 7, 9, 11, 17, 19, 23, 29, 31. — *R.* 6, 4, 2, 4, 15, 3, 22, 13.

2708. Quelle est la plus haute puissance de 17 ou de 144 qui divise le produit de tous les nombres de 1 à 1 000 000 000? Par combien de zéros est terminé ce produit? — *R.* $17^{62\,499\,997}$; $144^{249\,999\,998}$; 249 999 998 zéros.

2709. Tout nombre, autre que 5, de la forme $2^{4k+2}+1$, ou n^4+4, est composé.

2710. Si 2^m+1 est le produit de deux nombres a et b, $a-1$ et $b-1$ sont divisibles par la même puissance de 2.

2711. Vérifier que le nombre $2^{26}+1$ est divisible par 274 177.

2712. Vérifier que le nombre $2^{112}+1$ est divisible par 144 689.

2713. Pour extraire la racine carrée d'un nombre, dans le cas où cette racine doit avoir un grand nombre de figures, on détermine, par la méthode ordinaire, plus de la moitié des chiffres de cette racine; on obtient ensuite les autres chiffres en divisant le dernier reste, suivi des tranches non employées, par le double de la racine déjà trouvée, suivi d'autant de zéros qu'il reste de chiffres à obtenir : seulement le dernier chiffre à droite de la racine peut être trop fort d'une unité.

2714. Pour extraire la racine cubique d'un nombre, dans le cas où cette racine doit avoir un grand nombre de figures, on détermine, par la méthode ordinaire, plus de la moitié des chiffres de cette racine; on obtient ensuite les autres chiffres en divisant le dernier reste, suivi des tranches non employées, par le triple carré de la racine déjà trouvée, suivi de deux fois autant de zéros qu'il reste de chiffres à obtenir : seulement le dernier chiffre à droite de la racine peut être trop fort d'une unité.

2715. Si deux nombres entiers ont le même nombre de chiffres, et qu'ils aient plus de la moitié des chiffres à gauche en commun, la différence de leurs racines carrées sera moindre que $\frac{1}{2}$ et la différence de leurs racines cubiques sera moindre que $\frac{1}{3}$.

2716. Pour réduire une fraction à sa plus simple expression, connaissant le plus petit commun multiple de ses deux termes, on divise ce plus petit commun multiple par les deux termes de la fraction, et on renverse la nouvelle fraction ainsi obtenue.

2717. Si les deux termes d'une fraction ont le même nombre de chiffres, ou si on les ramène à en avoir le même nombre en écrivant des zéros à la gauche du terme qui en a le moins, on ne change pas la valeur de cette fraction en écrivant plusieurs fois de suite le numérateur et un même nombre de fois le dénominateur.

2718. a, b, c, d étant quatre nombres entiers tels que l'on ait $ad-bc=1$, démontrer que les fractions $a:b$, $c:d$, $a:a+c$, $c:a+c$, $b:b+d$, $d:b+d$, $a+mb:c+md$, $a+nc:b+nd$ sont irréductibles.

2719. Étant données plusieurs fractions, les remplacer par d'autres qui leur soient égales et telles que le dénominateur de chacune soit égale au numérateur de la suivante. — *R.* On multiplie les deux termes de chaque fraction par les dénominateurs de toutes celles qui précèdent et par les numérateurs de toutes celles qui suivent.

2720. Les numérateurs de plusieurs fractions égales sont des équimultiples des quotients obtenus en divisant les dénominateurs par leur plus grand commun diviseur.

2721. On range, par ordre de grandeur, toutes les fractions irréductibles, moindres que l'unité, dont le dénominateur est inférieur à un nombre donné, 10, par exemple. Vérifier les propriétés suivantes de la suite de fractions ainsi obtenue : 1° Deux fractions équidistantes des extrêmes ont le même

dénominateur et leur somme est l'unité; 2° la différence des produits du numérateur de chacune de deux fractions consécutives par le dénominateur de l'autre est égale à l'unité; 3° chaque fraction est égale à celle qu'on obtient en ajoutant terme à terme celle qui précède et celle qui suit. (FAREY.)

2722. Pour trouver le numérateur de la différence de deux fractions, dont on prend pour dénominateur le produit des dénominateurs de ces deux fractions, on peut multiplier le numérateur de la première par la différence des deux termes de la seconde, et le numérateur de la seconde par la différence des deux termes de la première : la différence de ces deux produits est le numérateur cherché. (BARDEL.)

2723. Si l'on soustrait deux fractions, dont le dénominateur de chacune surpasse le numérateur de n, le numérateur de la différence sera égal à n fois la différence des numérateurs. (GELIN.)

2724. La somme ou la différence de deux fractions irréductibles, de dénominateurs différents, est une fraction irréductible.

2725. La somme ou la différence d'une fraction irréductible et de son carré est une fraction irréductible.

2726. La somme de trois fractions irréductibles ne peut être un nombre entier, si l'un des trois dénominateurs contient un facteur premier qui ne divise aucun des deux autres.

2727. La somme de plusieurs fractions irréductibles, dont les dénominateurs sont premiers entre eux deux à deux, n'est jamais un nombre entier.

2728. Pour qu'une fraction soit un cube, il faut et il suffit que le produit de l'un de ses termes par le carré de l'autre soit un cube.

2729. Quel est le plus petit nombre par lequel il faut multiplier les deux termes d'une fraction pour que le dénominateur de la nouvelle fraction soit un carré ou un cube parfait?

2730. Quelles sont les fractions, de dénominateur n, qui sont égales à leur racine carrée prise à $1 : n$ près? — $R.\ n-2 : n,\ n-1 : n,\ n+1 : n$.

2731. Trouver la fraction génératrice de la fraction décimale périodique simple 0·181818... en prenant successivement pour période 18, 1818, 181818. Faire voir à priori l'équivalence des fractions génératrices obtenues.

2732. Trouver la fraction génératrice de la fraction décimale périodique mixte 0·4181818... : 1° en prenant pour partie non périodique 4 et pour période 18 ou 1818; 2° en prenant pour partie non périodique 41 et pour période 81 ou 8181. Faire voir à priori l'équivalence des fractions génératrices obtenues.

2733. Trouver les dénominateurs des fractions irréductibles donnant naissance à des fractions décimales périodiques simples dont la période ait quatre chiffres.

2734. Trouver les dénominateurs des fractions irréductibles donnant naissance à des fractions décimales périodiques mixtes dont la partie non périodique ait deux chiffres et la période trois chiffres.

2735. Faire la somme, la différence, le produit et le quotient de deux fractions décimales périodiques simples ou mixtes.

2736. Une fraction égale à la somme des inverses de trois nombres consécutifs engendre une fraction décimale périodique mixte.

2737. Pour convertir en fraction décimale une fraction ordinaire ayant pour numérateur l'unité et pour dénominateur un nombre formé de n chiffres 9,

on écrit, à la droite du point décimal, $n - 1$ zéros, puis 1, puis $n - 1$ zéros, puis 1, et ainsi de suite indéfiniment. On a, par exemple, $\frac{1}{999} = 0{\cdot}001001001\ldots$

2738. Pour convertir en fraction décimale une fraction ordinaire dont le numérateur est l'unité et dont le dénominateur est formé d'un nombre M, composé de m chiffres quelconques, suivi d'un nombre N, composé de n chiffres 9, on écrit, à la droite du point décimal, $m + n - 1$ zéros, puis les n chiffres du quotient obtenu en divisant par M + 1 l'unité suivie de $m + n - 1$ zéros; puis, successivement, les n chiffres du quotient obtenu en divisant par M + 1 le reste suivi du quotient de la division précédente. Pour diviser 1 par 15999, par exemple, on écrit 0·0000; puis on divise 10000 par 16 : le quotient est 625 et le reste 0; on divise 625 par 16 : le quotient est 039 et le reste 1; on divise 1039 par 16 : le quotient est 064 et le reste 15; on divise 15064 par 16 : le quotient est 941 et le reste 8 : on trouve ainsi 0·0000625039064941... pour le quotient demandé. Diviser, d'après la règle énoncée, 1 par 19, 199, 1999..., 29, 299, 2999... (GELIN.)

2739. Les fractions irréductibles de même dénominateur engendrent des fractions décimales limitées qui ont le même nombre de chiffres décimaux, ou des fractions décimales périodiques qui ont le même nombre de chiffres non périodiques et le même nombre de chiffres périodiques.

2740. Lorsqu'une fraction irréductible donne naissance à une fraction décimale périodique : 1° la période est divisible par 9, si le dénominateur est premier avec 3; 2° la période est divisible par 11, si le nombre de ses chiffres est pair et le dénominateur premier avec 11.

2741. Si deux fractions ordinaires, dont la somme est l'unité, donnent naissance à deux fractions décimales périodiques simples ou mixtes : 1° les chiffres décimaux de même rang ont pour somme 9; 2° les restes de même rang ont pour somme le dénominateur commun.

2742. Lorsqu'une fraction irréductible donne naissance à une fraction décimale périodique dont la période se compose de deux *nombres complémentaires*, c'est-à-dire tels que les chiffres de l'un soient les compléments à 9 des chiffres de même rang de l'autre, les restes correspondant à deux chiffres complémentaires ont pour somme le dénominateur de la génératrice.

2743. Si, en réduisant une fraction ordinaire en fraction décimale, on trouve un reste égal à l'excès du dénominateur sur le numérateur : 1° la fraction décimale sera périodique simple; 2° la période sera composée de deux nombres complémentaires.

2744. Si une fraction irréductible, dont le dénominateur est un nombre premier, donne naissance à une fraction décimale périodique dont la période ait un nombre pair de chiffres, cette période sera composée de deux nombres complémentaires.

2745. Si le dénominateur de la génératrice d'une fraction décimale périodique est un diviseur de $10^n + 1$, la période sera composée de deux nombres complémentaires.

2746. Réciproquement, si la période d'une fraction décimale périodique est composée de deux nombres complémentaires, le dénominateur de la génératrice est un diviseur de $10^n + 1$.

2747. Soit p le dénominateur d'une fraction irréductible donnant naissance

à une fraction décimale périodique simple dont la période ait $p-1$ chiffres : 7 sera de la forme des formes $10m-1$, $10m-3$, $10m+3$ ou $10m+9$. Si $p=10m-1$, chacun des dix chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 entrera m fois dans la période. Si $p=10m-3$, les chiffres 3 et 6 entreront $m+1$ fois dans la période et les autres chiffres m fois. Si $p=10m-7$, les chiffres 0, 3, 6, 9 entreront m fois dans la période et les autres chiffres $m+1$ fois. Si $p=10m-9$, les chiffres 1 et 9 entreront m fois dans la période et les autres chiffres $m-1$ fois. SERRET.

2748. Lorsqu'une fraction irréductible dont le dénominateur est d, donne naissance à une fraction décimale périodique simple dont la période a $d-1$ chiffres : 1° si l'on range ces chiffres en cercle, ce cercle sera le même, quel que soit le numérateur de la fraction; 2° la période sera composée de deux périodes complémentaires.

2749. Si l'on réduit en fractions décimales périodiques les fractions irréductibles dont le dénominateur est un nombre premier p : 1° le nombre des chiffres de chaque période sera un diviseur de $p-1$; 2° si l'on range en cercle les chiffres de chaque période, le nombre des cercles sera un diviseur de $p-1$.

2750. Soit p un nombre premier, et soit n le nombre des chiffres de chacune des périodes auxquelles donnent naissance les fractions irréductibles dont le dénominateur est p^m. Le nombre des chiffres de chacune des périodes auxquelles donnent naissance les fractions irréductibles dont le dénominateur est p^{m+1} sera n ou pn.

2751. Si p est premier, les périodes auxquelles donnent naissance les fractions irréductibles dont les dénominateurs sont des puissances de p, seront toutes composées de deux nombres complémentaires ou auront toutes un nombre impair de chiffres.

2752. Si l'on réduit en décimales une fraction irréductible dont le dénominateur est un produit de nombres premiers, autres que 2 et 5, aucun des restes n'est divisible par un des facteurs premiers du dénominateur.

2753. Si le dénominateur d'une fraction irréductible est le produit de deux facteurs premiers a et b, autres que 2 et 5, le nombre des chiffres de la période sera un diviseur du produit $(a-1)(b-1)$.

2754. Si le dénominateur d'une fraction irréductible est le produit de trois facteurs premiers a, b, c, autres que 2 et 5, le nombre des chiffres de la période sera un diviseur du produit $(a-1)(b-1)(c-1)$.

2755. Si le dénominateur d'une fraction irréductible est un produit de facteurs premiers différents, autres que 2 et 5, le nombre des chiffres de la période est égal au plus petit commun multiple des nombres de chiffres des périodes correspondant aux fractions irréductibles qui ont pour dénominateurs chacun de ces facteurs.

2756. La somme de deux nombres réciproques ou inverses l'un de l'autre est plus grande que 2.

2757. A deux de ses clients, un marchand pèse, avec une balance fausse, c'est-à-dire dont les bras de fléau sont inégaux, un même poids de marchandise. Pour le premier, il met les poids marqués dans le plateau A et la marchandise dans le plateau B. Pour le second, il fait l'inverse. On demande s'il gagne ou s'il perd. On sait qu'une balance est en équilibre lorsque les poids

placés sur les deux plateaux sont en raison inverse des longueurs des bras de fléau correspondants. — *R.* Il perd.

2758. Si l'on doit acquitter en deux paiements égaux une somme empruntée à intérêt composé, la moyenne entre les deux délais de paiement est supérieure au délai qui serait imposé pour la libération en un seul paiement d'importance double.

2759. La moyenne arithmétique de deux nombres est plus grande que leur moyenne géométrique; en d'autres termes, la demi-somme de deux nombres est plus grande que la racine carrée de leur produit.

2760. Plus généralement, la moyenne arithmétique de plusieurs nombres est plus grande que leur moyenne géométrique; en d'autres termes, la n^e partie de la somme de n nombres est plus grande que la racine n^e du produit de ces nombres.

2761. La différence entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de deux nombres est moindre que le carré de leur demi-différence, divisé par le double du plus petit.

2762. Une puissance de degré quelconque de la moyenne arithmétique de plusieurs nombres est moindre que la moyenne arithmétique des puissances de même degré de ces nombres.

2763. Un nombre est dit la *moyenne harmonique* entre plusieurs autres, lorsque l'inverse de ce nombre est la moyenne arithmétique entre les inverses des autres nombres. Démontrer que la moyenne harmonique de plusieurs nombres est moindre que leur moyenne géométrique.

2764. Si quatre termes d'une proportion sont écrits par ordre de grandeur, la somme des extrêmes est plus grande que la somme des moyens.

2765. Démontrer que $(ac + bd)^2$ est égal ou inférieur à $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$, suivant que le rapport $a : b$ est égal ou non égal au rapport $c : d$.

2766. Si, dans une proportion, le premier conséquent est la moyenne arithmétique des deux antécédents, le second antécédent sera la moyenne harmonique des deux conséquents, et réciproquement.

2767. Si quatre nombres sont tels que le second et le troisième soient, respectivement, la moyenne arithmétique et la moyenne harmonique entre les deux qui le comprennent, ces quatre nombres sont en proportion.

2768. Si la moyenne arithmétique de deux nombres est à leur moyenne géométrique comme la moyenne arithmétique de deux autres nombres est à leur moyenne géométrique, ces quatre nombres sont en proportion. Le même théorème a lieu, s'il s'agit des moyennes arithmétique et harmonique, ou géométrique et harmonique.

2769. Dans toute suite de rapports égaux, la moyenne géométrique entre la somme des antécédents et la somme des conséquents est égale à la somme des moyennes géométriques des deux termes de chaque rapport.

2770. Réciproquement, si, dans une suite de rapports, la moyenne géométrique entre la somme des antécédents et la somme des conséquents est égale à la somme des moyennes géométriques des deux termes de chaque rapport, tous ces rapports seront égaux.

2771. Si, dans une suite de nombres, chacun est la demi-somme de ceux qui le comprennent, ces nombres forment une progression par différence.

2772. Si, dans une suite de nombres, chacun est moyen proportionnel entre ceux qui le comprennent, ces nombres forment une progression par quotient.

2773. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ne peuvent faire partie d'une même progression par différence ou par quotient.

2774. Pour que la somme de deux termes quelconques d'une progression par différence fasse partie de cette progression, il faut et il suffit que l'un des termes de la progression soit un multiple de la raison.

2775. Pour que le produit de deux termes quelconques d'une progression par quotient fasse partie de cette progression, il faut et il suffit que l'un des termes de la progression soit une puissance de la raison.

2776. Dans une progression par différence de $3n$ termes, la somme des n termes du milieu est égale à la demi-somme des $2n$ autres termes.

2777. Si, dans une progression par différence ou par quotient, on ajoute chaque terme au suivant, on obtient une nouvelle progression par différence ou par quotient.

2778. Le produit de quatre termes consécutifs d'une progression par différence, augmenté de la quatrième puissance de la raison, est un carré.

2779. Dans une progression par quotient de six termes, la différence des termes extrêmes est plus grande que cinq fois la différence des deux termes du milieu.

2780. Si, dans une progression par différence, trois termes consécutifs sont des nombres premiers, la raison est divisible par 6, à moins que le premier terme ne soit 1, 2 ou 3; s'il y en a cinq, la raison est divisible par 30, à moins que le premier terme ne soit 1, 2, 3 ou 5; s'il y en a sept, la raison est divisible par 210, à moins que le premier terme ne soit 1, 2, 3, 5 ou 7.

2781. Plus généralement, si, dans une progression par différence, n termes consécutifs sont des nombres premiers, la raison de cette progression est divisible par le produit de tous les nombres premiers de 1 à n, à moins que le premier terme ne soit l'un de ces nombres.

2782. La moyenne géométrique des termes d'une progression arithmétique est comprise entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique des termes extrêmes. (TODHUNTER.)

2783. La somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2.

2784. La somme des n premiers nombres entiers est égale à $\frac{1}{2}n(n+1)$.

2785. La somme des carrés des n premiers nombres entiers est égale à $\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)$.

2786. La somme des cubes des n premiers nombres entiers est égale au carré de la somme de ces nombres, ou à $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

2787. Quelle est la somme de tous les nombres contenus dans une table de multiplication qui s'étend jusqu'à n multiplié par n? — *R.* $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

2788. Pour avoir la somme des nombres de 1 à 10^n, on écrit 5, puis $n-1$ chiffres 0, puis 5, puis $n-1$ chiffres 0; ou bien on écrit les deux moitiés du nombre 10^n à la suite l'une de l'autre. (LEVAT.)

2789. Pour avoir la somme des carrés des nombres de 1 à 10^n, on écrit n chiffres 3, puis 8, puis $n-1$ chiffres 3, puis 5, puis $n-1$ chiffres 0. (LEVAT.)

2790. Pour avoir la somme des cubes des nombres de 1 à 10^n, on écrit 25, puis $n-2$ chiffres 0, puis 5, puis $n-1$ chiffres 0, puis 25, puis $2n-2$ chiffres 0. (LEVAT.)

2791. On sépare la suite des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11, etc., en groupes successifs renfermant, le premier un terme, le deuxième deux termes, le troisième trois termes, et ainsi de suite. Démontrer que la somme des termes de chaque groupe est un cube.

2792. La somme des n premiers termes de la suite 1, 3, 6, 10, 15, 21, etc., où la différence de deux termes consécutifs va sans cesse en croissant d'une unité, est $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$.

2793. Plus généralement, la somme des $n+1$ premiers termes de la suite a, $a+r$, $a+3r$, $a+6r$, etc., est égale à $(n+1)a+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)r$.

2794. Le rapport des logarithmes des nombres, pris dans une certaine base, aux logarithmes des mêmes nombres, pris dans une autre base, est constant.

2795. Quelle doit être la base commensurable d'un système de logarithmes pour que le logarithme de 12 soit commensurable? — *R.* 12^n.

2796. On appelle *permutations* de n lettres les résultats que l'on obtient en écrivant ces n lettres les unes à la suite des autres de toutes les manières possibles. Cela posé, démontrer : 1° que le nombre des permutations de n lettres différentes est égal au produit des n premiers nombres; 2° que le nombre des permutations de n lettres, parmi lesquelles il y a α lettres a, β lettres b, γ lettres c,... est égal au produit des n premiers nombres divisé par le produit des nombres de 1 à α, 1 à β, 1 à γ...

2797. De combien de manières vingt-cinq personnes peuvent-elles se ranger autour d'une table? Si elles effectuaient un changement de place par minute, combien leur faudrait-il d'années de 365 jours pour effectuer tous les déplacements? — *R.* 1° 15511210 043330985 984000000; 2° 29 511434633 430338630 ans.

2798. Quel est le nombre des permutations que l'on peut former avec les vingt-six lettres de l'alphabet? Quelle serait la hauteur du papier nécessaire pour écrire toutes ces permutations, si l'épaisseur d'une rame de papier est de 5 cm. et si chaque rame contient 500 feuilles; chaque feuille, 4 pages; chaque page, 50 lignes; chaque ligne, 2 permutations? — *R.* 1° 403291461 126605635 584000000; 2° 100 822865281 651408896 m.

2799. Quel est le nombre des permutations que l'on peut former avec les lettres de ce vers de La Fontaine : *Il faut, autant qu'on peut, obliger tout le monde?* — *R.* 24327668 937172670 334320799 744000000.

2800. De combien de manières peut-on arranger ce vers de Thomas Lansius : *Mars, mors, sors, lis, vis, Styx, pus, nox, fex, mala, crux, fraus*, en conservant le mot *mala* à l'antépénultième place, pour se conformer à la mesure? — *R.* 49916800.

2801. Parmi les permutations des dix lettres du mot *démocratie*, combien y en a-t-il qui commencent par *a*, combien par *ami*, combien où les lettres *a*, *m*, *i* ne sont séparées par aucune autre lettre? — *R.* 362 880; 5040; 241 920.

2802. On appelle *arrangements* de m lettres n à n les résultats que l'on obtient en prenant n des m lettres et en écrivant ensuite ces n lettres les unes à la suite des autres de toutes les manières possibles. Cela posé, démontrer : 1° que le nombre des arrangements de m lettres n à n, au cas où aucune lettre ne puisse être répétée, est égal au produit de n nombres entiers décroissants à partir de m; 2° que le nombre des arrangements, au cas où l'on puisse répéter plusieurs fois la même lettre, est égal à m^n.

2803. Avec les sept couleurs de l'arc-en-ciel, le rouge, l'orangé, le jaune, le vert, le bleu, l'indigo et le violet, combien pourrait-on faire de drapeaux tricolores différant par la nature ou par l'ordre des couleurs? — *R.* 210.

2804. Un coffre-fort est muni d'une serrure à combinaisons, composée de cinq pièces portant chacune les vingt-six lettres de l'alphabet : de combien de manières peut-on former le mot pour ouvrir? — *R.* 11 881 376.

2805. Un télégraphe a six bras, pouvant occuper chacun quatre positions différentes : combien de signaux peut-on faire avec ce télégraphe, tous les bras étant employés dans chaque signal? — *R.* 4096.

2806. Combien peut-on former de nombres de trois chiffres avec les seuls chiffres impairs 1, 3, 5, 7, 9 et quelle est leur somme? — *R.* 125; 69 375.

2807. Combien peut-on former de nombres de trois chiffres avec les seuls chiffres pairs 0, 2, 4, 6, 8 et quelle est leur somme, le zéro ne devant être le troisième chiffre à gauche d'aucun nombre? — *R.* 100; 54 400.

2808. Combien peut-on former de nombres de neuf chiffres avec les neuf chiffres significatifs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et quelle est leur somme? — *R.* 387 420 489; 215 233 604 784 766 395.

2809. Combien peut-on former de nombres de neuf chiffres avec les dix chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et quelle est leur somme, le zéro ne devant être le neuvième chiffre à gauche d'aucun nombre? — *R.* 900 000 000; 494 999 999 550 000 000.

2810. On appelle *combinaisons* de m lettres n à n les résultats que l'on obtient en prenant n des m lettres de toutes les manières possibles, deux résultats devant différer par une ou plusieurs lettres et l'ordre des lettres étant indifférent dans chaque résultat. Cela posé, démontrer : 1° que le nombre des combinaisons de m lettres n à n, dans le cas où aucune lettre ne puisse être répétée, est égal au nombre des arrangements de m lettres n à n, divisé par le nombre des permutations de n lettres, ou au produit de n nombres entiers *décroissants* à partir de m, divisé par le produit des n premiers nombres; 2° que le nombre des combinaisons de m lettres n à n, dans le cas où l'on puisse prendre plusieurs fois la même lettre, est égal au produit de n nombres entiers *croissants* à partir de m, divisé par le produit des n premiers nombres.

2811. D'une compagnie de 100 soldats, combien peut-on tirer de piquets de 10 hommes : 1° de manière à comprendre toujours le même homme; 2° de manière à exclure toujours le même homme? — *R.* 1° 1 731 030 945 644; 2° 13 579 278 510 796.

2812. Avec 15 officiers anglais, 12 français et 12 allemands, combien peut-on former de conseils de guerre composés de 3 officiers anglais, 3 français et 3 allemands? — *R.* 22 022 000.

2813. Le jeu de Boston se compose de 52 cartes, dont on donne treize au premier joueur, treize au deuxième, treize au troisième et treize au quatrième : combien de jeux différents peut offrir le jeu de Boston? — *R.* 53 644 737 765 488 792 839 237 440 000.

2814. De combien de manières la roue de fortune peut-elle amener cinq numéros gagnants à une loterie de 90 numéros? Combien y a-t-il de combinaisons renfermant un numéro désigné d'avance, ou deux numéros, ou trois, ou quatre, ou cinq? Quelle est, d'après cela, la probabilité de gagner pour une

personne qui a pris un extrait, ou un ambe, ou un terne, ou un quaterne, ou un quine? La probabilité est le rapport du nombre des cas favorables au nombre total des cas possibles. — *R.* 1° 43 949 268; 2° 2 441 626, 109 736, 3741, 86, 1; 3° $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{801}$, $\frac{1}{11\,748}$, $\frac{1}{511\,038}$, $\frac{1}{43\,949\,268}$.

2815. Le produit de deux facteurs variables, dont la somme est constante, est maximum lorsque ces deux facteurs sont égaux.

2816. La somme de deux nombres variables, dont le produit est constant, est minimum lorsque ces deux nombres sont égaux.

2817. Le prix d'un diamant est proportionnel au carré de son poids. Prouver qu'en séparant un diamant en deux morceaux, on en diminue la valeur et que la dépréciation est la plus grande quand les deux morceaux ont le même poids.

2818. Tout nombre impair, non terminé par 5, a un multiple formé de tous chiffres 1. (PLATEAU.)

2819. Tout nombre entier a un multiple formé de plusieurs chiffres 9, suivis ou non de plusieurs zéros.

2820. Tout nombre entier a un multiple formé de plusieurs périodes de chiffres donnés, suivies ou non de plusieurs zéros. (CRELLE.)

2821. Le produit $1.2.3.4.5...(p-1)$ n'est pas divisible par p, si p est premier.

2822. Le produit $1.2.3.4.5...(n-2)$ est divisible par n, si n est un nombre non premier, supérieur à 4. (CATALAN.)

2823. Le produit d'une suite de n nombres, dont le premier est 2 et dont chacun surpasse le précédent de 4, est égal au produit de n nombres entiers consécutifs croissants à partir de $n+1$. On a, par exemple, $2.6.10.14.18.22.26.30 = 9.10.11.12.13.14.15.16$.

2824. Le produit de n nombres consécutifs croissants à partir de $n+1$ est égal au produit des $n+1$ premiers nombres impairs, multiplié par 2^n. On a, par exemple, $8.9.10.11.12.13.14 = 1.3.5.7.9.11.13 \times 2^7$.

2825. Le produit des 2^m premiers nombres est égal à 2^m multiplié par le produit des m premiers nombres impairs multiplié par le produit des m premiers nombres entiers.

2826. On divise le produit des $2n$ premiers nombres successivement par chacun de ces nombres : démontrer que la somme des quotients est un multiple de $2n+1$.

2827. Le produit de n nombres entiers consécutifs est divisible par le produit des n premiers nombres.

2828. Le produit $1.2.3.4.5...m$ est divisible par le produit $1.2.3...a \times 1.2.3...b \times 1.2.3...c$, si $a+b+c$ est égal ou inférieur à m.

2829. Si p est premier, le quotient de $(p-1)(p-2)(p-3)...(p-n)$ par $1.2.3...n$ est un multiple de p, augmenté ou diminué de 1, suivant que n est pair ou impair.

2830. Si p est premier, le quotient de $(p-2)(p-3)(p-4)...(p-n)$ par $1.2.3...(n-1)$ est un multiple de p, diminué ou augmenté de n, suivant que n est pair ou impair. (CATALAN.)

2831. Étant donnés deux nombres entiers, si l'on divise le plus grand par le plus petit, le plus petit par le reste de la division, le premier reste par le deuxième, le deuxième par le troisième, et ainsi de suite, démontrer que le rapport du plus petit nombre au plus grand est égal à l'inverse du premier

quotient, moins l'inverse du produit des deux premiers quotients, plus l'inverse du produit des trois premiers quotients, moins l'inverse du produit des quatre premiers quotients, et ainsi de suite.

2832. Dans la suite de FIBONACCI, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, etc., où chaque terme est la somme des deux qui le précèdent : 1° il y a toujours au moins quatre et au plus cinq termes consécutifs qui ont le même nombre de chiffres; 2° si l'on cherche le plus grand commun diviseur de deux nombres quelconques, par la méthode des divisions successives, il est impossible que plus de deux restes consécutifs tombent entre deux termes consécutifs de la série, et, s'il y en a deux, il n'en tombe aucun dans l'intervalle précédent; 3° si l'on considère trois termes consécutifs de la série, la différence entre le carré du terme du milieu et le produit des deux autres termes est égal à 1; 4° si l'on considère quatre termes consécutifs, la différence entre le produit des deux termes moyens et celui des deux termes extrêmes est égale à 1 (GELIN); 5° si l'on considère cinq termes consécutifs, la différence entre la quatrième puissance du terme du milieu et le produit des quatre autres termes est égale à 1 (GELIN); 6° la somme des n premiers termes est égale au terme de rang $n + 2$, moins 2; 7° la somme des n premiers termes de rang impair est égale au terme de rang $2n$, moins 1; 8° la somme des n premiers termes de rang pair est égale au terme de rang $2n + 1$, moins 1; 9° si l'on prend n termes consécutifs, la différence entre la somme des termes de rang pair et la somme des termes de rang impair est égale au terme de rang $n - 1$.

2833. Chaque semestre, un homme achète un pigeon femelle, donnant deux mâles le premier semestre suivant, deux femelles le second, et ainsi alternativement : quels seront les nombres de tous les pigeons mâles et de tous les pigeons femelles au bout de n semestres? (NOËL.) — *R.* $\frac{1}{2}n^2$ et $\frac{1}{2}n^2$, si n est pair; $\frac{1}{2}(n^2 + 1)$ et $\frac{1}{2}(n^2 - 1)$, si n est impair.

2834. Étant donnés quatre points sur une droite, on multiplie la distance de l'un d'eux à chacun des trois autres par la distance des deux points restants : démontrer que l'un de ces produits est égal à la somme des deux autres.

2835. Démontrer qu'avec cinq poids de 1 gramme, cinq poids de 10 grammes, cinq poids de 100 grammes, cinq poids de 1000 grammes, etc., ou avec un poids de 1 gramme, un poids de 2 grammes, un poids de 4 grammes, un poids de 8 grammes, etc., ou avec un poids de 1 gramme, un poids de 3 grammes, un poids de 9 grammes, un poids de 27 grammes, etc., on peut peser un corps dont le poids est un nombre quelconque de grammes.

2836. Disposer les neuf premiers nombres en triangle, de manière à vérifier les conditions suivantes : 1° la somme des quatre nombres écrits sur chaque côté est constante; 2° si l'on prend le nombre écrit à chaque sommet, avec les deux qui le précèdent et les deux qui le suivent, la somme de ces cinq nombres est constante; 3° si l'on prend le nombre écrit à chaque sommet, et les deux qui sont écrits sur le côté opposé, l'excès de la somme de ceux-ci sur le premier est constant. Les propriétés précédentes subsistent pour les carrés des mêmes nombres. (CESARO; GELIN.) — *R.* 2, 3, 7, 8; 8, 1, 6, 5; 5, 4, 9, 2.

2837. Disposer les 9 ou les 25 ou les 49 ou les 81 premiers nombres en *carrés magiques*, c'est-à-dire de telle manière que la somme des nombres pris horizontalement ou verticalement ou diagonalement soit constante.

ASSOCIATION FRANÇAISE

POUR

L'AVANCEMENT DES SCIENCES

FUSIONNÉE AVEC

L'ASSOCIATION SCIENTIFIQUE DE FRANCE

(Fondée par LE VERRIER en 1864).

CONGRÈS DE BORDEAUX — 1895

M. Émile VIGARIÉ

Expert-géomètre à Laissac (Aveyron).

LA BIBLIOGRAPHIE DE LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE [V 9]

— Séance du 5 août 1895 —

Depuis 1873, la géométrie du triangle a pris une extension considérable, au point de constituer aujourd'hui une branche particulière des sciences mathématiques, et un grand nombre de mémoires ont été écrits sur ce sujet.

En 1885, au Congrès de Grenoble, M. Émile Lemoine avait communiqué une notice bibliographique contenant les titres des écrits publiés sur cette nouvelle géométrie avant 1873, et aussi de 1873 à 1885. Au Congrès de Paris, en 1889, nous avions ajouté un certain nombre de titres à ceux de la liste de M. Lemoine, et continué ainsi la bibliographie jusqu'en 1889.

La présente communication a pour but de faire suite aux deux notices bibliographiques dont nous venons de parler, en les complétant et en donnant l'indication des mémoires parus de 1889 à 1895.

Nous ferons usage des abréviations que voici, déjà adoptées par un grand nombre de géomètres, en conformité de diverses

de la Commission du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.

ABRÉVIATIONS EMPLOYÉES

M. Mathesis (Gand).
Z. H. Zeitschrift de Hoffmann (Leipzig).
A. G. Annales de Gergonne (Nismes et Paris).
A. Gr. Archives de Grunert (Leipzig) (et continuations).
A. F. Association Française pour l'Avancement des Sciences.
B. D. Bulletin des Sciences Mathématiques de M. Darboux (Paris).
Cr. Journal de Crelle (Berlin) (et continuations).
N. A. Nouvelles Annales de Mathématiques (Paris).
N. C. Nouvelle Correspondance Mathématique (Bruxelles).
J. E. Journal de Mathématiques Élémentaires de M. de Longchamps (Paris).
J. S. Journal de Mathématiques Spéciales de M. de Longchamps (Paris).
Q. J. The Quarterly Journal... (Londres).
E. T. The Educational Times (Londres).
R. E. T. Reprint of the Educational Times (Londres).
S. M. Société Mathématique de France (Paris).
C. R. Comptes rendus de l'Académie des Sciences (Paris).
M. M. Messenger of Mathematics (Londres et Cambridge).
M. A. Mathematische Annalen (Leipzig).
R. M. Rivista di Matematica (Turin).
J. M. Journal de Liouville (Paris) (et continuations).
S. M. L. Société Mathématique de Londres.
S. M. E. Société Mathématique d'Édimbourg.
S. M. A. Société Mathématique d'Amsterdam.
S. R. L. Société Royale de Londres.
B. A. B. Bulletin de l'Académie de Belgique (Bruxelles).
P. M. S. Progreso Matematico (Saragosse).
R. S. L. Société Royale des Sciences de Liège.
A. N. L. Accademia Pontificia de Nuovi Lincei (Rome).
M. A. B. Mémoires de l'Académie de Belgique.

NOTA. — (3), VI, 363-366, *signifie :* 3me série, tome VI, pages 363 à 365.

ADDITIONS AUX NOTICES BIBLIOGRAPHIQUES

Publiées en 1885 (LEMOINE) et en 1889 (VIGARIÉ)

I. — ÉCRITS ANTÉRIEURS A 1873.

1647. B. CAVALERIUS. Exercitationes geometricæ. 1 vol. (Bononiæ).
1659. VIVIANI . . . . . De maximis et minimis. p. 143 (Florentiæ).
1663. H. FABRY. . . . Synopsis geometrica. 1 vol. (Lyon).
1746. W. CHAPPLE . . Miscellanea curiosa mathematica. I, 123.
1748. L. EULER. . . . Variæ demonstrationes geometricæ. (Novi commentarii Ac. Sc. Imp. Petropol.)
1749. R. SIMSON . . . Apollonii Pergaei Locorum Planorum. Libri II 179-180.
1752. TH. SIMPSON . . Select exercises. 1 vol. (Londres).
1755. J. LANDEN . . . Lucubrationes mathematicæ. 1-6.

1765. RICCATI . . . . . Instituzioni analitiche. 2 vol. (Bologna).
1776. R. SIMSON . . . Opera quædam reliqua. 171.
1816. GRÜSON . . . . . Abhandlungen der Akad. der Wissensch. zu Berlin (1816-1817).
1822. A.-L. CRELLE. . Sammlung math. Aufsätze und Bemerkungen (Berlin).
1827. T.-S. DAVIES . . Symmetrical properties of plane triangles (Phil. Mag.). II, 29-31.
1828. J. STEINER . . . Développements d'une série de théorèmes relatifs aux sections coniques. A. G., XIX, 34-64. (Gesam. Werk. I, 191-210.)
1831. C.-J. MATTHES. Commentatio de proprietatibus quinque circulorum. 41.
1833. J. STEINER . . . Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises. (Gesamm. Werk. I, 489-492.)
1834. HEINEN. . . . . Ueber Systeme von Kräften (Cleve).
1841. J.-R. HIND. . . Trigonometry. 4e édition.
1843. J. BERTRAND. . J. M., VIII, 158.
1846. G.-B. MARSANO. Memoria sui triangoli simili (Genova). 64 p.
1850. LEHMUS. . . . . Cr., tome L.
1859. NIEGEMANN. . . Analytische Entwickelung der Sätze über die Transversalen und merkwürdigen Punkte des Dreiecks aus allgemeinen Prinzipien. Köln. Program. des Kathol. Gymnasiums.
1859. I. TODHUNTER . Plane trigonometry. 1 vol.
1863. R. TOWNSEND . Modern geometry of the point, line and circle. I, 117-143.
1863. J.-B. MARSANO. Considerazioni sul triangolo rettilineo. 1 broch., 71 p. (Genova).
1866. FRENET. . . . . Exercices de calcul infinitésimal. 2e édit., 138.
1866. LINDELÖF. . . . Sur les maxima et minima d'une fonction des rayons vecteurs menés d'un point mobile à plusieurs centres fixes. (Acta Soc. Sc. Fennicæ), 191.
1867. J. GRIFFITHS . . Note on the geometry of the plane triangle. R. E. T., 65.
1869. W.-H. BESANT. Conic Sections. 1 vol.
? J. DÖTTL . . . . Neue merkwürdige Punkte des Dreiecks.

II. — ÉCRITS DE 1873 A 1889.

1873. M. AZZARELLI. . Formole generali per assignare i lati dei triangoli rettangoli primitivi. A. N. L., XXVI, 13 p.
1874. M. AZZARELLI. . Alcuni problemi riguardanti il triangolo rettilineo. A. N. L., XXVII, 42 p.
1877. J. BOOTH . . . . New geometrical Methods. 2 vol.
1878. H. VAN AUBEL. Deux propriétés générales des courbes du 3e degré. N. C., IV, 355-356.

[illegible] H. [illegible] ... [illegible] degré. N. [illegible], 41-47.
[illegible] G. B. Marsano. [illegible] costruzione di un triangolo. [illegible] matematica elementare. T. II, 12 p.
[illegible] J. S. Mackay. The circles associated with a triangle viewed from their centres of similitude. S. M. E., I.
[illegible] J. S. Mackay. The triangle and its six scribed circles. S. M. E., I, 1-128.
1884 J. S. Mackay. Geometrical notes. S. M. E., II, 38-41.
1886 M. Azzarelli. Esercizio geometrico. A. N. L., XXXIX, [illegible] p.
1886 J. S. Mackay. Historical notes on a geometrical theorem and its developments. S. M. E., V.
1887 M. Azzarelli. Alcuni teoremi e problemi sopra i triangoli annessi. A. N. L., XL, 18 p.
1887 J. S. Mackay. Properties of the figure consisting of a triangle and the squares described on its sides. S. M. E., VI.
1888 A. Gob. . . . Notes sur quelques propriétés segmentaires des polygones harmoniques (7 p.) (Annuaire scientifique du Cercle des Normaliens. — Gand).
1888 L. Burmester. Lehrbuch der Kinematik. I, § 337. Beziehungen zum Brocard'schen Kreise als Folgerungen aus der geradlinigen Bewegung eines ähnlichveränderlichen ebenen Systems. 880-884.

BIBLIOGRAPHIE DE 1889 A 1895.

1889

[illegible] Trigonométrie rectiligne suivie des principes de la nouvelle géométrie du triangle. 1 vol. (Paris).
[illegible] Sur la réversibilité de la transformation linéaire. M., IX, 267-268.
[illegible] ... du développ- [illegible] A. F. [illegible]
[illegible]

R. TUCKER. . . . . Isoscelian Hexagrams. S. M. L., XXI, 29 p.

? . . . . . A Syllabus of modern plane geometry. (Associat. for improv. of geomet. teaching.), 32 p.

J. NEUBERG. . . . . et M. D'OCAGNE . . . . . Remarques sur une transformation quadratique. R. S. L. (2), XVI, 18 p.

M. AZZARELLI . . . . . Generalizzazione del problema delle mediane di un triangolo rettilineo. A. N. L., XLII, 14 p.

J.-S. MACKAY . . . . . Historical notes on a geometrical problem and theorem. S. M. E., VIII, 2 p.

S. KEPINSKIEGO . . . . Wlasnosci szczegolnych trojek punktow trojkata. (51 p.). Matematyczno fizycznych. (Varsovie), II.

1890

J.-S. MACKAY . . . . . The Wallace line and the Wallace point. S. M. E., IX.

R. TUCKER. . . . . Some properties of co-normal points of a parabola. S. M. L., XXI, 442-451.

E. CESARO . . . . . Sur l'emploi des coordonnées barycentriques. M. (1), X, 177-190.

J. NEUBERG . . . . . Sur les projections et les contre-projections d'un triangle fixe et sur le système de trois figures directement semblables. M. A. B., XLIV, 86 p.

P. MANSION . . . . . Crelle ou Brocard? M. (1), X, 28-30.

W. FUHRMANN . . . . Synthetische Beweise planimetrischer Sätze. 1 vol., XXIV, 190 p. (Berlin).

G. DE LONGCHAMPS . . Sur le tétraèdre orthocentrique. M. (1), X, 49-53, 77-82.

W. FUHRMANN . . . . Sur un nouveau cercle associé à un triangle. M. (1), X, 105-111.

A. C. . . . . Sur le 176e porisme d'Euclide. M. (1), X, 115.

A. GOB . . . . . Sur quelques transformations de figures. A. F. (Limoges), XIX, 1-18.

J. NEUBERG . . . . . Sur les figures symétriques successives. A. F. (Limoges), XIX, 18-23.

A. POULAIN . . . . . Sur quelques séries de points remarquables dans un triangle. M. (1), X, 246-251.

C.-A. LAISANT. . . . . Propriétés du triangle. — Orientation moyenne. — Points équisegmentaires. A. F. (Limoges), XIX, 23-29.

E. LEMOINE . . . . . Sur les triangles orthologiques et sur divers sujets de la géométrie du triangle. A. F. (Limoges), XIX, 111-146.

J.-J. MILNE . . . . . Le théorème de Feuerbach. J. E. (3), IV, 3-5.

E. LAUVERNAY. . . . . Théorèmes sur les transversales. J. E. (3), IV, 11-14, 51-53.

E. VIGARIÉ. . . . . Sur un ouvrage de Crelle. J. E. (3), IV, 32-35.

L. BENEZECH. . . . . Note de géométrie. J. E. (3), IV, 53-55.

A. BOUTIN . . . . . Exercices divers *(suite)*. J. E. (3), IV, 65-68, 87-89, 134-137 *(à suivre)*.

L. BENEZECH. . . . . Propriétés du triangle. J. E. (3), IV, 73-77, 97-99, 121-122.

E. VIGARIÉ. . . . . Le 176e porisme d'Euclide et ses conséquences. J. E. (3), IV, 83-86.

G. DE LONGCHAMPS . . Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Artzt. J. E. (3), IV, 149-151.

LAUVERNAY . . . . . Le 176e porisme. J. E. (3), IV, 151.

LAUVERNAY . . . . . Le théorème de Feuerbach. J. E. (3), IV, 193-195.

G. DE LONGCHAMPS . . Sur les triangles caractérisés. J. E. (3), IV, 203, 206, 234-237, 252-256.

LAUVERNAY . . . . . Sur un problème de géométrie. J. E. (3), IV, 265-269.

A. POULAIN . . . . . Sur un problème de M. Boutin. J. S. (3), IV, 33-41.

A. BOUTIN . . . . . Exercices divers *(suite)*. J. S. (3), IV, 41-43 *(à suivre)*.

E. VIGARIÉ. . . . . Note bibliographique sur les cubiques. J. S. (3), IV, 63-69.

A. BOUTIN . . . . . Sur un groupe de quatre coniques remarquables du plan d'un triangle. J. S. (3), IV, 104-107, 124-127.

G. TARRY. . . . . Remarques sur le quadrangle harmonique. J. S. (3), IV, 122-124.

A. BOUTIN . . . . . Exercice. J. S. (3), IV, 130-131.

G. DE LONGCHAMPS . . Sur les paraboles de M. Artzt. J. S. (3), IV, 149-153.

A. BOUTIN . . . . . Problèmes sur le triangle (avec notes de M. Neuberg). J. S. (3), IV, 265-270.

E. CATALAN . . . . . Quelques formules relatives aux triangles rectilignes. M. A. B., XLIV, 28 p.

C. SERVAIS. . . . . Sur les points caractéristiques de quelques droites remarquables dans les coniques. B. A. B. (3), XIX, 519-528.

P.-H. SCHOUTE . . . . Sur les figures planes directement semblables. C. R., 3 p.

E. CATALAN . . . . . Sur un théorème de M. Mannheim. 1 brochure, 13 p. (Rome).

A. POULAIN. . . . . Sur deux coniques. J. S. (3), IV, 3.

1891

R.-J.-C. NIXON . . . . Supplement to *Euclid Revised*, being an introduction (within the limits of Euclidian geometry) to the Lemoine and Brocard points, lines and circles. 28 p.

C. THIRY. . . . . Distances des points remarquables du triangle. B. A. B. (3), XXI, 471-481.

Z.-G. DE GALDEANO. . La geometria elemental reciente. P. M. S., I, 75-82.

E. VIGARIÉ. . . . . Los progresos de la geometria del triangulo en 1890. P. M. S., I, 101-106, 128-134, 187-190.

Z.-G. DE GALDEANO. .	Algunos trabajos de M. Neuberg sobre la geometria del triangulo. P. M. S., I, 190-194.
G. DE LONGCHAMPS . .	Développements sur les paraboles de M. Artzt. P. M. S., I, 209-216, 250-253.
Z.-G. DE GALDEANO. .	La evolucion de la geometria del triangulo. P. M. S., I, 223-228, 269-274, 317-318 *(à suivre)*.
E. VIGARIÉ.	Las generalizaciones de la geometria del triangulo. P. M. S., I, 241-247, 274-279.
J.-S. MACKAY	Matthew Stewart's theorem. S. M. E., X.
R. TUCKER.	Two notes on isoscelians. S. M. L., XXII, 178-180.
VAN DEN BERG.	Over zelf-wederkeerige poolkrommen (Ower. Niew. Archiv. Wisk.). XIX, 17 p.
C. THIRY.	Applications remarquables du théorème de Stewart et théorie du barycentre. 1 broch., 94 p. (Paris et Gand).
J. NEUBERG	Sur les quadrangles complets. M. (2), I, 33-35, 67-70, 81-82, 189-195.
A. POULAIN	Sur une correspondance de droites et de points. M. (2), I, 88-90.
H. BROCARD	Sur une classe particulière de triangles. M. (2), I, 153-158.
B. SOLLERTINSKY . . .	Propriétés des coniques. M. (2), I, 177-182.
A. POULAIN	Sur la distance de deux points. M. (2), I, 184-186.
B. SOLLERTINSKY. . .	Théorèmes de géométrie. M. (2), I, 221-222.
M'CLELLAND.	A Treatise on the geometry of the circle. 1 vol., 300 p. (Londres).
G. DE LONGCHAMPS . .	Expression du rayon de courbure dans les coniques inscrites à un triangle de référence. A. F. (Marseille), XX, 11-23.
E. COLLIGNON.	Sur certaines séries de triangles et de quadrilatères. A. F. (Marseille), XX, 38-66.
E. LEMOINE	Sur les transformations systématiques des formules relatives au triangle. — Transformation continue. A. F. (Marseille), XX, 130-159.
J. NEUBERG . . . . . et P.-H. SCHOUTE	Généralisation d'un problème connu. A. F. (Marseille), XX, 168-180.
A. GOB	Sur une série de quadrangles. A. F. (Marseille), XX, 232-241.
J. NEUBERG	Sur la géométrie récente du triangle et du tétraèdre (chapitres du *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse), I, II, 595-616.
E. VIGARIÉ.	Les progrès de la géométrie du triangle en 1890. J. E. (3), V, 8-12, 28-32, 56-59, 80-82.
LORMEAU.	Des coordonnées angulaires. J. E. (3), V, 35-41.
E. VIGARIÉ.	Sur la méthode de transformation de M. Schoute. J. E. (3), V, 101-105, 129-131, 153-157, 181-183, 207-211.
G. DE LONGCHAMPS . .	Sur les points et les droites de Feuerbach. J. E. (3), V, 106-108.

BERNÈS	Lettre à M. de Longchamps. J. E. (3), V, 109-112.
A. POULAIN	Des coordonnées angulaires. J. E. (3), V, 52-56, 73-79.
BERNÈS	Transformation par inversion symétrique. J. E. (3), V, 121-127, 145-148, 175-181, 197-207, 217-224, 244-252, 265-273 *(à suivre)*.
A. BOUTIN	Exercices divers *(suite)*. J. E. (3), V, 132-134, 157-159, 183-186, 211-212, 224-227, 256-257, 277-278 *(à suivre)*.
E. LEMOINE . . . . . . et A. BOUTIN	Lettres à M. de Longchamps. J. E. (3), V, 134-135.
A. POULAIN	Lettre à M. de Longchamps. J. E. (3), V, 254-256.
B. SOLLERTINSKY . . .	Sur les cercles inverses. J. E. (3), V, 173-177.
A. POULAIN	Des équations tripolaires réversibles. J. E. (3), V, 265-276.
P.-H. SCHOUTE	Théorèmes généraux par rapport aux figures planes directement semblables (Annales de l'École polytechnique de Delft), VI, 51-71.
W. STEGEMANN	Dreiecksscharen, Parabelscharen und Kegelschnittbüschel, welche durch drei ähnliche Punktreihen oder durch drei projectivische Strahlenbüschel erzeugt werden. A. Gr., X, 225-260.
A. POULAIN	Principes de la nouvelle géométrie du triangle. 1 broch., 46 p. (Paris).
A. EMMERICH	Die Brocardschen Gebilde. Broch., XV, 153 p. (Berlin).
E. LEMOINE	Sur une transformation relative à la géométrie du triangle. S. M., XIX, 7 p.
E. CATALAN	Sur l'ellipse de Brocard. B. A. B., XLIX, 20 p.
F. M[illegible]	La géométrie covariante du triangle. Q. J., 186-197.
E. U[illegible]	Reihensummation auf geometrischen Wege. Programm. Gr[illegible]. 7 p.

1892

E. LE[illegible]	[illegible] dite transformation [illegible] M. [illegible] 81-92.
[illegible]	S[illegible] triangle. M. [illegible] II, [illegible]
[illegible]	[illegible] de Fermat. M. [illegible]
M[illegible]	S[illegible] M. [illegible]
[illegible]	S[illegible] triangle [illegible]
[illegible]	S[illegible] M. [illegible] 241-246.
E. V[illegible]	Lettre à M. [illegible] M. [illegible]
[illegible]	La [illegible] de [illegible] triangulo. [illegible] M. S., II, 217-221.
E. V[illegible]	Algunas propiedades [illegible] polares y

de los circulos de Schoute. P. M. S., II, 97-105, 173-176.

E. LEMOINE . . . . . La géométrographie ou l'art des constructions géométriques. A. F. (Pau), XXI, 36-100.

E. LEMOINE . . . . . Résultats et théorèmes divers concernant la géométrie du triangle. A. F. (Pau), XXI, 101-132.

R. TUCKER. . . . . Geometrical note. S. M. E., XI, 4 p.

J.-S. MACKAY . . . . . Early history of the symmedian point. S. M. E., XI, 92-103.

R. TUCKER. . . . . Two circular notes. S. M. E., XI, 6 p.

J.-S. MACKAY . . . . . Adams hexagons and circles. S. M. E., XI, 104-106.

J.-S. MACKAY . . . . . History of the nine-point circle. S. M. E., XI, 39 p.

R. TUCKER. . . . . A geometrical note. S. M. L., XXIV, 162-166.

BERNÈS. . . . . Transformation par inversion symétrique *(suite)*. J. E. (4), I, 3-5, 25-31, 49-58, 73-82, 97-101, 121-131, 145-151, 169-174, 193-200, 217-223, 241-247, 265-272 *(à suivre)*.

E. VIGARIÉ. . . . . Les progrès de la géométrie du triangle en 1891. J. E. (4), I, 7-10, 34-37.

A. BOUTIN . . . . . Exercices divers *(suite)*. J. E. (4), I, 36-38, 69-70, 94-96, 113-115, 141-143, 156-159 *(à suivre)*.

E. LEMOINE . . . . . Règle des analogies dans le triangle. — Transformation continue. J. E. (4), I, 62-69, 91-93, 103-106.

A. POULAIN . . . . . Transformation des formules des triangles. J. E. (4), I, 110-113, 136-139, 151-153.

A. BOUTIN . . . . . Exercices. J. E. (4), I, 179-183, 230-233, 272-278.

A. POULAIN . . . . . Quelques changements de coordonnées. J. E. (4), I, 228-230.

A. BOUTIN . . . . . Distances des points remarquables du triangle. J. E. (4), I, 248-258.

Mme F. PRIME . . . . . Contribution à l'étude des cubiques. J. S. (4), I, 3-5.

C.-A. LAISANT. . . . . Détermination analytique de l'aire d'un triangle. J. S. (4), I, 77-79.

A. BOUTIN . . . . . Exercices divers *(suite)*. J. S. (4), I, 88-90, 115-116, 163-166 *(à suivre)*.

A. LUGLI. . . . . Piccole note e sunti di note. (Periodico matem. per l'insegn. secund., VII, 5 p.)

J. CASEY . . . . . A sequel to the first six books of the Elements of Euclid. (Edited by P. A. E. Dowling.) 6e édit., 302 p. (Dublin et Londres).

J. HAHN . . . . . Beiträge zur Geometrie des Dreiecks. 16 p. (Programm de Heppenheim).

1893

BERNÈS. . . . . Transformation par inversion symétrique *(suite)*. J. E. (4), II, 3-7, 25-29, 49-54, 76-79.

A. POULAIN . . . . . . Construction de l'angle de Brocard. J. E. (4), II, 13-15.

A. BOUTIN . . . . Exercices divers (*suite*). J. E. (4), II, 19-20, 34, 107-109, 134, 159-161, 179-181, 204-206, 225-226, 254-255, 273-275 (*à suivre*).

Mme F. PRIME . . . . . Théorèmes sur les cubiques. J. S. (4), II, 14-15.

G. MICHEL . . . . Sur la transformation continue. J. S. (4), II, 29-33.

E. CATALAN . . . . . . Note sur l'ellipse de Longchamps. J. S. (4), II, 28-30.

A. BOUTIN . . . . Exercices divers (*suite*). J. S. (4), II, 44-45, 68-69, 83-85, 113-114, 154-155 (*à suivre*).

E. VIGARIÉ . . . . Les progrès de la géométrie du triangle en 1892. J. E. (4), II, 61-63, 85-88.

H. VERRIÈRE . . . . . Sur le théorème de Poncelet. J. E. (4), II, 79-84.

A. POULAIN . . . . . . Points à l'infini sur certaines droites. J. S. (4), II, 77-78.

J.-S. MACKAY . . . . . Note de géométrie. J. E. (4), II, 97-100.

E. LEMOINE . . . . . . Lettre à M. de Longchamps. J. E. (4), II, 135-136.

J. CHAIRIN . . . . et H. VERRIÈRE . . . . . . Sur quelques propriétés relatives aux projections des sommets d'un triangle sur les bissectrices. J. E. (4), II, 174-179.

Mme F. PRIME . . . . . Sur une transformation des figures de la géométrie du triangle. J. S. (4), II, 249-255.

E. VIGARIÉ . . . . Los circulos de Tucker y sus casos particulares. P. M. S., III, 333-340 (*à suivre*).

J. NEUBERG . . . . . . Notes de géométrie. A. F. (Besançon), XXII, 26-45.

E. LEMOINE . . . . . . Compléments de géométrographie. A. F. (Besançon), XXII, 113-132.

E. LEMOINE . . . . . . Notes de géométrie. A. F. (Besançon), XXII, 132-146.

A. GOB . . . . Sur une formule donnant le rayon de courbure des coniques. A. F. (Besançon), XXII, 254-257.

E. LEMOINE . . . . . . Application au tétraèdre de la transformation continue. A. F. (Besançon), XXII, 146-163.

R. TUCKER . . . . Geometrical note. S. M. F., XII, 4 p.

R. TUCKER . . . . Two triplets of circum-hyperbolas. S. M. E., XII, 7 p.

G. DE LONGCHAMPS . . Un théorème sur la géométrie des masses. A. F. (Besançon), XXII, 274-277.

A. [illegible] . . . . . . Re[illegible] triangle. Broch., 18[illegible] Pa[illegible] crayons [illegible] à M. G. Fa[illegible] mathé[illegible]

R. TUCKER . . . . [illegible] triangle. S. M. [illegible], XII, 6 [illegible]

[illegible] . . . . [illegible]

MANNHEIM . . . . . . [illegible] M. 2, III, 1-13.

'. PRIME . . . . . Sur le cercle orthocentroïdal. M. (2), III, 33-36.
UBERG . . . . . Sur l'hyperbole de Feuerbach. M. (2), III, 81-89.
STEELS. . . . . Propriétés de deux triangles. M. (2), III, 89-90.
UBERG . . . . . Rayon de courbure de certaines courbes planes. B. A. B. (3), XXV, 374-386. (Supplément à *Mathesis,* juin 1893.)
RTRAND . . . . . Note sur quelques propriétés du triangle. M. (2), III, 155-162.
LONGCHAMPS . . Cours de mathématiques spéciales. Supplément. 1 vol., 472 p. (Paris).
OF . . . . . Sur les brocardiens d'un point par rapport à un point. M. (2), III, 166.
URICE . . . . . Questions de mécanique. M. (2), III, 222-223, 243-244.
HALSTED . . . . . Elementary synthetic geometry. 1 vol., 2e édit. (New York).

1894

MOINE . . . . . Le raport anharmonique étudié au point de vue de la géométrografie. — Application de la géométrografie à la géométrie descriptive. A. F. (Caen), XXIII.
UBERG . . . . . Notes diverses. A. F. (Caen), XXIII.
B. . . . . Transformation d'un quadrangle. A. F. (Caen), XXIII.
MOINE . . . . . Suite des notes de géométrie. A. F. (Caen), XXIII.
UHRMANN. . . . . Sätze und Aufgaben aus der Sphärischen Trigonometrie. (Program. des König. Realg. a. d. Burg zu Königsberg), 38 p.
MOINE . . . . . Étude sur le triangle et sur certains points de géométrographie. S. M. E., XIII, 24 p.
MACKAY . . . . . Isogonic centres of a triangle. S. M. E., XIII.
CKER. . . . . Some properties of two Tucker circles. S. M. L., XXV, 389-394.
UTIN . . . . . Exercices divers *(suite).* J. E. (4), III, 28-29, 65-67, 79-80, 108 *(à suivre).*
MOINE . . . . . Note à propos de la solution de la question 503. J. E. (4), III, 81-82.
CHEL . . . . . Sur l'exercice 315. J. E. (4), III, 87-88.
VERNAS . . . . . Notes sur les symédianes. J. E. (4), III, 169-170.
FARNY . . . . . Sur les triangles dont les côtés sont en progression arithmétique. J. E. (4), III, 193-196.
MACKAY . . . . . Propriétés du triangle. J. E. (4), III, 217-221.
T. . . . . Note sur les figures semblables. J. E. (4), III, 241-245.
UTIN . . . . . Exercices divers *(suite).* J. S. (4), III, 204-206, 233-235.
CKER. . . . . Parabolic note : Co-Normal points. S. M. E., XIII, 7 p.

J. GILLET . . . . . Sur le cercle des neuf points. M. (2), IV, 42
J. NEUBERG . . . . . Note sur un lieu géométrique. M. (2), IV, 1 116-120.
A. GOB . . . . . Rayon de courbure d'une conique. M. (2 133-134.
E. LEMOINE . . . . . Notes sur la géométrie du triangle. M. (2 153-158.
J. WASTEELS . . . . . Sur la transversale d'un triangle. M. (2 158-159.
J. NEUBERG . . . . . Sur les figures semblables. M. (2), IV, 164-
H. MANDART. . . . . Sur une ellipse associée au triangle. M. (2 241-245.
J. NEUBERG . . . . . Sur quelques quadrilatères spéciaux. M. (2 268-271.
G. RICHARDSON . . . . et A.-S. RAMSEY . . . . . } Modern plane geometry. 1 vol., 202 p. (Lon

1895

I.-J. SCHWATT . . . . . A geometrical treatment of curves which a gonal conjugates to a straight line with r to a triangle (Part first). Broch., 45 p. (York).
J.-S. MACKAY . . . . . Properties connected wich the angular bis of a triangle. S. M. E., XIII, 66 p.
J.-S. MACKAY . . . . . Formulæ connected with the radii of the ir and the excircles of a triangle. S. M XIII, 2 p.
G. TARRY. . . . . Sur le déplacement des figures semblables. (4), IV, 79-83.
L. VAUTRÉ. . . . . Le théorème de Feuerbach. J. E. (4), IV, 83
J.-S. MACKAY . . . . . Propriétés du triangle. J. E. (4), IV, 97-100.
G. TARRY . . . . . Propriétés de trois figures égales. J. E. (4) 100-101.
A. BOUTIN . . . . . Exercices divers *(suite)*. J. E. (4), IV, 129 198-199, 273 275 *(à suivre)*.
C. MICHEL . . . . . Sur les points de Feuerbach. J. S. (4), IV, 1
G. TARRY . . . . . Sur l'axe d'homologie du triangle fondamen du triangle de Brocard. M. (2), V, 4-7.
N.-C. SPIJKER . . . . . Sur un groupe de coniques inscrites ou c scrites à un triangle. M. (2), V, 105-111.
E. LIÉNARD . . . . . Sur la transformation continue. M.(2),V,115
A. C. . . . . Sur une conique du plan d'un triangle. M V, 117-118.
E.-N. BARISIEN . . . . Résumé des propriétés concernant les tria d'aire maximum inscrits dans l'ellipse. M V, 42-45.
J. NEUBERG . . . . . Sur quelques coniques du plan d'un tri ABC. M. (2), V, 60-63.

SPREZ . . . . . Propriétés concernant les triangles d'aire maximum inscrits dans l'ellipse. M. (2), V, 81-83.

RAN-LORIGA. . . . . Notes sur le triangle. M. (2), V, 85-86.

MANDART . . . . . Sur les centres isogones. M. (2), V, 153-155.

NEUBERG. . . . . Sur un cas particulier de l'homologie (Nederlandsch. Natuuren genees Kundig. Congres. te Amsterdam), 8 p.

J. . . . . Détermination du centre de similitude de deux figures directement semblables J. E. (4), IV, 195-197.

OZ-FARNY . . . . . Note sur un article de *Mathesis* M. (2), V, 226-227.

CHASSIOTIS . . . . . Quelques propriétés du cercle conjugué à un triangle. J. E. (4), IV, 218-222, 267-269.

ERENS . . . . . et URICE . . . . . Démonstrations géométriques d'un théorème de M. Sondat. M. (2), V, 265-267.

NEUBERG. . . . . Triangles orthohomologiques. M. (2), V, 267-268.

NEUBERG. . . . . Triangles trihomologiques et triorthologiques. M. (2), V, 198-202.

e nombre total des *Mémoires, Ouvrages* ou *écrits divers* se portant à la géométrie du triangle et qui sont mentionnés dans notices bibliographiques que nous avons rappelées au début de la sente communication, se répartit de la manière suivante :

DATES	LEMOINE	VIGARIÉ		TOTAUX
	1885	1889	1895	
Avant 1873	23	41	30	94
De 1873 à 1885 . . .	78	27	9	114
De 1885 à 1889 . . .	»	169	7	176
De 1889 à 1895 . . .	»	»	219	219
Totaux . . .	101	237	265	603

oit un total de 603 titres.

ous n'avons pas, comme dans la notice de M. Lemoine (1885), ou is la nôtre (1889), donné une liste des *questions proposées* et *olues* relatives à la géométrie du triangle, publiées dans divers

recueils mathématiques. Leur nombre est aujourd'hui considérabl
et nous nous proposons d'en donner, à un prochain Congrès, u
liste aussi détaillée que possible (*).

(*) Malgré tout le soin que nous avons pu apporter en dressant la liste précédent est à supposer qu'elle contient des erreurs ou des omissions. Nous serons reconnais aux lecteurs qui voudront bien nous adresser — à Laissac (Aveyron) — des rectificat ou des renseignements complémentaires. Nous en tiendrons compte à une a occasion.

Bordeaux. — Imp. G. Gounouilhou, rue G...

Premiers principes de la Métagéométrie ou Géométrie générale [1]).

Quidquid contradictionem non implicat, Deus potest. S. THOMAS, C. G., II, 22.

I

PRÉLIMINAIRES.

Depuis un siècle, les mathématiciens ont soumis les principes fondamentaux de la science de l'espace à un examen critique qui leur a permis de créer, à côté de la géométrie ordinaire, ou géométrie euclidienne, deux autres systèmes de géométrie tout aussi admissibles, tant au point de vue de la rigueur logique qu'à celui de leur application possible à l'étude du monde physique.

Le premier de ces systèmes est la géométrie lobatchefskienne, ainsi nommée parce que c'est Lobatchefsky (1793-1856), qui en a trouvé les bases vers 1826 et en a donné un exposé complet dans de nombreux écrits publiés de 1829 à 1856 [2]).

Le second est la géométrie riemannienne, dont l'idée fondamentale, presque sans aucun développement, a été indiquée par Riemann (1826-1866) en 1854 et publiée seulement en 1867 [3]).

[1]) Résumé de conférences faites à l'*Institut supérieur de Philosophie* de Louvain, le 16 mai, le 30 mai, et le 6 juin 1895.

[2]) L'université de Kazan, où Lobatchefsky a été professeur, a publié (1883-1886) une édition complète de ses œuvres géométriques, en deux volumes in-4° (550 pages en russe, 28 en allemand, 102 en français).

[3]) *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Mémoires de Goettingue, 1867, t. XIII). Ce mémoire est reproduit pp. 254-269 de la première édition des *Riemann's Werke* (1876). L'idée fondamentale dont nous parlons dans le texte se trouve p. 266, § 2, dernier alinéa.

L'ensemble des trois géométries, euclidienne, lobatchefskienne, riemannienne, lesquelles ont d'ailleurs une partie commune, constitue la *Métagéométrie* ou *Géométrie générale*.

L'existence de trois systèmes de géométrie distincts a une importance considérable au point de vue philosophique. Elle implique, en effet, le renversement de l'une des bases de la *Kritik der reinen Vernunft* de Kant : elle prouve l'inanité de ce que l'on peut appeler son *impératif géométrique*.

Nous nous proposons d'exposer d'une manière élémentaire et sous forme didactique, dans les pages qui suivent, les principes de la Métagéométrie jusqu'à sa subdivision en trois branches et d'esquisser les conséquences philosophiques que l'on peut en déduire.

Nous faisons précéder cet exposé d'une notice historique sommaire sur les travaux les plus importants dont les principes de la Géométrie ont été l'objet depuis Euclide jusqu'à M. De Tilly. De cette manière, le lecteur qui voudra bien nous suivre, pourra peu à peu se débarrasser de cette idée préconçue qu'il ne peut exister qu'un seul système de géométrie, et il se familiarisera avec les vues nouvelles qu'il rencontrera plus tard dans les deux systèmes de géométrie non euclidienne. Avant même d'en avoir éprouvé la valeur au point de vue logique, et au point de vue de l'étude de la nature, il sera disposé à leur donner l'adhésion de son esprit, parce qu'il aura appris sous le patronage de quels géomètres éminents ils se trouvent placés.

II

ESQUISSE HISTORIQUE.

La géométrie élémentaire a été constituée comme science par les Grecs, du sixième au troisième siècle avant J.-C. On peut rattacher ses principaux progrès à quelques noms illustres.

THALÈS (640-548), ou l'un de ses disciples, a trouvé que la somme des trois angles d'un triangle est égale à deux droits ; PYTHAGORE (580-500), que dans un triangle rectangle, le carré construit sur l'hypoténuse est égal à la somme des carrés construits sur les autres côtés ; EUDOXE (408-355), que la pyramide est le tiers du prisme de même base et de même hauteur ; de plus, on doit à ce dernier la théorie des proportions entre grandeurs incommensurables. ARCHIMÈDE (287-212), outre un grand nombre de vérités mathématiques d'une nature très cachée, découvrit de nouvelles propriétés fondamentales de la circonférence, du cylindre, du cône et de la sphère.

EUCLIDE (vers 300), un peu antérieur à Archimède, réunit dans ses *Éléments* les découvertes géométriques de ses devanciers [1]), sans rien y ajouter d'essentiel, mais en substituant des preuves irréfutables à leurs démonstrations parfois trop peu rigoureuses.

La perfection logique des Éléments d'Euclide leur a valu une royauté incontestée dans l'enseignement jusqu'à la publication des *Éléments de Géométrie* de Legendre (1752-1833), en 1794. Ceux-ci moins rigoureux, mais plus complets que ceux d'Euclide, contiennent, de plus que ces derniers, l'exposé des découvertes d'Archimède en géométrie élémentaire ; la théorie des triangles sphériques qui a été aussi connue des Anciens et dont les débuts remontent peut-être à Eudoxe ; enfin des notes savantes sur des points difficiles et un traité de trigonométrie.

Dans les Éléments d'Euclide, la théorie des parallèles et tout ce qui en dépend repose sur la proposition suivante : *Deux droites d'un plan qui font avec une troisième, d'un même côté de celle-ci, des angles intérieurs dont la somme est inférieure à deux angles droits, se rencontrent de ce côté.* Cette

[1]) **Les livres I-VI, XI-XIII des Éléments sont consacrés à la Géométrie ; les livres VII-X, à l'arithmétique, science dans laquelle Euclide a été plus original qu'en géométrie : le livre X des Éléments lui appartient presque en entier.**

proposition, souvent appelée le postulatum d'Euclide, est en réalité le cinquième des six postulats [1]) que le géomètre grec a mis en tête de son livre immortel.

D'Euclide à Legendre, tous les efforts des mathématiciens qui se sont occupés des principes de la Géométrie se sont concentrés presque exclusivement sur le cinquième postulat d'Euclide. Pendant plus de deux mille ans, on a fait de vains efforts pour le déduire de propositions antérieurement établies. Ptolémée et Proclus dans l'antiquité, Nassireddin au moyen-âge, Clavius à la renaissance, Wallis (1616-1707) et beaucoup d'autres qui essayèrent de le démontrer ne parvinrent guère qu'à le remplacer par des postulats à peu près équivalents. De ces postulats, celui de Wallis (1693) : *il existe des triangles semblables*, semble seul avoir survécu à son auteur [2]).

En 1733, le P. Saccheri, S. J. (1667-1733), ouvrit une voie nouvelle, sans s'en douter, en examinant ce que deviennent les principes de la géométrie quand on suppose que le cinquième postulat d'Euclide n'est pas vrai. Raisonnant dans cette hypothèse, il établit un grand nombre de propositions entre autres celle-ci : Deux droites situées dans un même plan peuvent occuper trois positions différentes l'une par rapport à l'autre [3]) : elles se rencontrent ou elles se rapprochent indéfi-

[1]) Ces postulats, que nous donnons textuellement dans les deux paragraphes suivants, se trouvent, avec neuf axiomes, après les définitions du premier livre des Éléments. Dans certains manuscrits (mais non dans les meilleurs) et dans beaucoup d'éditions, les quatrième, cinquième et sixième postulats sont devenus les axiomes 10, 11, 12.

[2]) Pour les renseignements bibliographiques relatifs aux divers auteurs dont il est question ici et dans la suite, voir notre article intitulé : *Notice sur les recherches de M. De Tilly en Métagéométrie* (Revue des questions scientifiques, 2e série, t. VII, p. 384-396, 1895 ou Mathesis, 2e série, t. V, 1895, supplément) et notre compte rendu de l'ouvrage de Stäckel : *Theorie der Parallellinien von Euclid bis auf Gauss* (Ib., t. VIII, p. 603-613, 1896, ou Mathesis, 2e série, t. VI, 1896, supplément).

[3]) En géométrie euclidienne, deux droites ne peuvent occuper que deux positions différentes l'une par rapport à l'autre : elles se rencontrent, ou elles ont une perpendiculaire commune et alors elles sont partout équidistantes.

niment sans se rencontrer, ou, enfin, elles ont une perpendiculaire commune à partir de laquelle elles divergent (Théorème de Saccheri).

Lambert (1728-1777) entre dans la même voie que Saccheri. Il prouve que, dans le cas où le postulatum d'Euclide n'est pas vrai, la surface d'un triangle est proportionnelle à son déficit angulaire (Théorème de Lambert, 1766, publié en 1786). On appelle ainsi la différence entre deux angles droits et la somme des angles du triangle, laquelle est toujours inférieure à deux droits dans le cas considéré.

Taurinus (1794-1874) trouve (1826), dans ce même cas, par une divination hardie, la formule fondamentale de la trigonométrie.

Saccheri, Lambert et Taurinus, ne doutent nullement d'ailleurs que le cinquième postulat d'Euclide ne soit absolument vrai et ils recourent inconsciemment à d'autres postulats plus ou moins spécieux pour le déduire des propositions antérieures de la géométrie. Mais en même temps, Lambert et surtout Taurinus entrevoient pourquoi on ne parvient jamais à une contradiction quand on se place dans l'hypothèse que le cinquième postulat n'est pas vrai. Cela provient, dit le dernier, de ce qu'il y a probablement des surfaces courbes sur lesquelles certaines lignes courbes ont des propriétés analogues à celle des droites dans le plan, à part la propriété exprimée dans le cinquième postulat d'Euclide [1]). De même, dit-il après Lambert, les grands cercles, sur la sphère, ont des propriétés très semblables à celles des droites dans le plan, à part la propriété exprimée dans le sixième postulat d'Euclide : *deux droites ne peuvent enclore un espace.*

Legendre (en s'appuyant implicitement sur ce dernier postulat) parvint à démontrer, avec une entière rigueur, deux

[1]) **Conjecture parfaitement fondée : Beltrami a prouvé, en 1868, que les géodésiques de la pseudosphère jouissent, en effet, des propriétés auxquelles nous faisons allusion ; et il a déduit de là que le cinquième postulat d'Euclide est indémontrable par la géométrie plane.**

théorèmes remarquables dont Saccheri et Lambert s'étaient déjà occupés : 1° Dans un triangle, la somme des angles ne peut surpasser deux angles droits (1800). 2° Si dans un seul triangle, la somme des angles est égale à deux angles droits, il en est de même dans tous (1808 ; publié en 1833). Legendre d'ailleurs, comme tous les géomètres précédents, essaya vainement de démontrer le cinquième postulat d'Euclide, mais ses essais de démontration extrêmement remarquables auraient pu le conduire logiquement à l'une des vérités fondamentales de la Métagéométrie, savoir, que les propriétés de l'espace dépendent d'un certain paramètre.

Vers 1819, peut-être même auparavant, le plus illustre des mathématiciens allemands, Gauss (1777-1855) et un jurisconsulte du même pays, Schweikart (1780-1857), arrivèrent, indépendamment l'un de l'autre, à cette conviction que le cinquième postulat d'Euclide est absolument indémontrable, parce qu'il n'est pas contenu dans la notion classique de la droite. Si l'on abandonne ce postulat, on peut établir une géométrie plus générale que celle d'Euclide et parfaitement rigoureuse ; la géométrie euclidienne n'en est qu'un cas particulier ou plutôt un cas-limite. L'expérience seule peut décider si ce cas-limite ou un autre cas particulier très voisin est réalisé dans la nature. Bessel (1784-1846), le célèbre astronome, sous l'influence de Gauss et de Schweikart, arriva aussi à la conviction que la géométrie physique n'est peut-être pas la géométrie euclidienne. Ni Gauss, ni Schweikart ne publièrent rien sur cette géométrie plus générale, dont il vient d'être question; mais ils ne furent pas sans influence sur le neveu du second, Taurinus, qui était en correspondance avec eux.

Deux savants plus jeunes que Gauss, l'un russe, Lobatchefsky, l'autre hongrois, Jean Bolyai (1802-1860), étaient arrivés aux mêmes conclusions que lui. Bolyai publia en 1832, en appendice à un ouvrage de son père, un court exposé d'un système

de géométrie indépendant du cinquième postulat d'Euclide. Lobatchefsky, de son côté, dès le 12/24 février 1826, avait fait une lecture publique sur le même sujet devant l'université de Kazan et, en 1829, avait publié les Éléments de cette géométrie nouvelle qui porte maintenant et, à juste titre, le nom de géométrie lobatchefskienne. Pendant plus d'un quart de siècle, jusqu'à sa mort en 1856, il ne cessa de développer ses recherches dans ce domaine, avec une tenacité invincible bien qu'il ne reçût d'encouragement de personne. Ses écrits sur la géométrie lobatchefskienne forment un volume de près de 700 pages in 4°.

En 1854, Riemann énonça, dans une leçon inaugurale, sur les principes de la géométrie quelques idées neuves et profondes qui ne furent publiées qu'en 1867, après la mort de ce grand géomètre. On peut en résumer la partie essentielle de la manière suivante : le sixième postulat d'Euclide n'est pas plus que le cinquième contenu dans la définition habituelle de la droite. En abandonnant ce sixième postulat, on peut créer une géométrie différente de celle de Lobatchefsky, plus générale aussi que celle d'Euclide qui en est encore un cas-limite : c'est la géométrie riemannienne.

M. De Tilly, sans connaître les recherches de Lobatchefsky, en avait retrouvé tous les résultats fondamentaux, par une voie personnelle, un peu après 1860. En 1868, il publia une cinématique, une statique et une dynamique lobatchefskiennes. En 1872 et 1873, il établit que le cinquième postulat d'Euclide est indémontrable par un raisonnement géométrique quel qu'il soit. En 1878, il exposa d'une manière complète les principes de la géométrie générale, en partant de l'idée de distance ou d'intervalle de deux points. Cette notion première, que Cauchy, dès 1833, mettait aussi à la base de la géométrie, il l'analyse avec une rigueur magistrale et il en fait sortir successivement la géométrie de Riemann, celle de Lobatchefsky et enfin celle d'Euclide. En 1893, il va plus loin encore, il montre que chacune de ces géométries est contenue implicitement toute

entière dans les relations de Lagrange et de Schering entre les distances de cinq points.

Personne que nous sachions n'a analysé plus profondément les principes fondamentaux de la géométrie que M. De Tilly. Aussi, dans les pages qui suivent, ce sont surtout ses travaux qui nous servent de guide, bien que la forme de notre exposition soit aussi euclidienne que possible en vue de faciliter l'accès de la Métagéométrie à un plus grand nombre de lecteurs [1]).

III

LES DÉFINITIONS ET LES QUATRE PREMIERS POSTULATS [2])

1. Le point est ce qui n'a pas de parties (EUCLIDE, I, *Déf.* 1).

2. Une ligne est une longueur sans largeur. Les extrémités d'une ligne sont des points (I, *Déf.* 2, 3).

3. Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur. Les extrémités d'une surface sont des lignes (I, *Déf.* 5, 6).

4. Un solide est ce qui a longueur, largeur et épaisseur. Les extrémités d'un solide sont des surfaces (XI, *Déf.* 1, 2).

5. La ligne droite est celle qui repose également sur tous ses points (I, *Déf.* 4).

REMARQUE. Nous dirons au début du paragraphe suivant

[1]) D'illustres géomètres, Cayley, Klein, Darboux, Poincaré, Beltrami, Riemann, Helmholtz, Lie, etc., ont étudié d'une manière approfondie diverses théories analytiques ou géométriques qui ont les rapports les plus étroits avec les recherches dont nous venons de faire rapidement l'histoire sous une forme élémentaire. Ils ont ainsi démontré d'une manière indirecte un grand nombre des propositions de la géométrie générale. Faute de compétence suffisante, nous ne pouvons donner ici un aperçu de leurs recherches.

[2]) Dans ce qui suit, nous empruntons, en général, les définitions, les postulats et les propositions aux *Éléments* d'Euclide, parce qu'ils constituent, de nos jours encore, le manuel de géométrie le plus connu et le plus rigoureux. Nous nous servons de la grande édition grecque, latine et française de Peyrard (Paris, 1814, 1816, 1818; 3 v. in 4o). Nous réduisons d'ailleurs les définitions au strict nécessaire, à part une exception et nous ne reproduisons pas les neuf axiomes d'Euclide, parce que ceux que nous employons implicitement sont admis par tout le monde.

dans quel sens cette définition, sur laquelle on a beaucoup discuté, a été entendue par Euclide et tous les géomètres.

Premier postulat [1]). Qu'il soit demandé de mener de tout point à tout point une ligne droite (I, *Post.* 1).

Deuxième postulat. Et de prolonger, en ligne droite et en continuité, une droite limitée (I, *Post.* 2).

6. La surface plane est celle qui repose également sur toutes les droites qu'elle contient (I, *Déf.* 7) [2]).

7. Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne qu'on nomme la circonférence, toutes les droites, menées à la circonférence d'un des points placés dans cette figure étant égales entre elles. Ce point se nomme le centre du cercle (I, *Déf.* 15, 16) ; ces droites se nomment les rayons du cercle.

Troisième postulat. Qu'il soit demandé de décrire un cercle de tout centre et de tout rayon (I, *Post.* 3).

8. La sphère est une surface telle que toutes les droites menées d'un point appelé centre aux points de cette surface sont égales entre elles. Ces droites se nomment les rayons de la sphère (XI, *Déf.* 14-17 modifiées).

9. Un angle rectiligne est l'inclinaison mutuelle de deux droites (I. *Déf.* 8-9, abrégées).

10. Lorsque une droite en rencontre une autre en faisant avec celle-ci deux angles égaux de part et d'autre, chacun de

[1]) On peut analyser plus profondément que ne l'a fait Euclide les notions fondamentales de la géométrie et augmenter considérablement le nombre des postulats. Voir, par exemple, *I Principii di Geometria, logicamente esposti.* Saggio di G. Peano (Torina, Bocca, 1889 ; 40 p. in 8o) et *Sulle fundamenti della Geometria.* Nota di G. Peano (Rivista di matematica, 1894, IV pp. 51-90). Dans notre paragraphe final, nous indiquons nous-même comment Cauchy ramène les notions de droite et de plan à celle de distance. Mais il est bon d'observer que les postulats 5 et 6 d'Euclide sont presque les seuls dont les géomètres se soient sérieusement préoccupés.

[2]) Le lecteur est prié d'admettre la possibilité de l'existence d'une pareille surface comme un postulat supplémentaire jusqu'à notre paragraphe final. La définition d'Euclide a été toujours entendue dans le sens de la définition de Legendre : " Surface dans laquelle prenant deux points à volonté et joignant ces deux points par une ligne droite, cette ligne est toute entière dans la surface. „

ces angles s'appelle un angle droit, et la première droite est dite perpendiculaire à la seconde (I, *Déf.* 9).

Quatrième postulat. Qu'il soit demandé que tous les angles droits soient égaux entre eux (I, *Post.* 4) [1]).

11. L'angle obtus est celui qui est plus grand qu'un droit (I, *Déf.* 11).

12. L'angle aigu est celui qui est plus petit qu'un droit (I, *Déf.* 12).

13. Les figures rectilignes ou polygones sont terminées par des droites (I, *Déf.* 20).

14. Les figures trilatères ou triangles sont formées par trois droites ; les quadrilatères, par quatre (I, *Déf.* 21, 22).

15. Le triangle équilatéral est celui qui a ses trois côtés égaux ; isoscèle, deux côtés égaux ; scalène, trois côtés inégaux ; rectangle, qui a un angle droit ; obtusangle, un angle obtus ; acutangle, trois angles aigus (I, *Déf.* 24-29) [2]).

16. Un quadrilatère est un carré, s'il a ses côtés égaux et ses angles égaux ; un rectangle, s'il a seulement ses angles égaux ; un losange ou rhombe, s'il a seulement ses côtés égaux ; un rhomboïde, si ses côtés et ses angles opposés sont égaux (I, *Déf.* 30-33 modifiées) [3]).

IV

LE CINQUIÈME ET LE SIXIÈME POSTULAT. LES TROIS GÉOMÉTRIES.

La définition de la ligne droite donnée plus haut, même lorsqu'on la complète par les postulats 1, 2, 4 n'exprime

[1]) Ce postulat, en apparence inutile, est, en réalité, indispensable, comme nous l'avons dit ailleurs, pour éviter de considérer, dans un même système de géométrie, diverses sortes de droites. L'introduction de ce postulat par Euclide, dans ses *Éléments*, prouve combien il avait étudié profondément les principes de la géométrie.

[2]) La possibilité de l'existence des figures ayant les propriétés énoncées se déduit assez facilement de diverses propositions élémentaires d'Euclide.

[3]) Nous donnons ces définitions, qui ne servent pas toutes dans la suite,

guère que la parfaite homogénéité de cette ligne, c'est-à-dire l'identité de toutes les droites et de toutes les parties de chacune d'elles. En somme, la droite est une ligne homogène entièrement déterminée par deux quelconques de ses points, suffisamment rapprochés.

Dans son exposé de la géométrie élémentaire, Euclide emploie encore deux autres postulats tous deux relatifs à la droite, savoir :

Cinquième postulat. Qu'il soit demandé que, si une droite rencontrant deux droites (situées dans un même plan), fait d'un même côté des angles intérieurs dont la somme soit moindre que deux droits, les deux droites prolongées indéfiniment se rencontrent du côté dont la somme est inférieure à deux droits (I, *Post.* 5)

Sixième postulat. Qu'il soit demandé que deux droites ne contiennent pas d'espace (I, *Post.* 6).

Par définition, on appelle *Géométrie euclidienne*, celle où l'on admet les postulats 5 et 6 ; *riemannienne*, celle où l'on rejette le postulat 6 et, où, par suite, comme nous le prouverons, on peut démontrer le postulat 5 comme une conséquence des propositions antérieures ; *lobatchefskienne*, celle où l'on rejette le postulat 5 et, où d'après ce qui vient d'être dit, le postulat 6 subsiste nécessairement, puisque son rejet impliquerait l'existence du postulat 5.

Beaucoup de propriétés de la droite et aussi du plan et de l'espace sont différentes dans les trois géométries. Mais un grand nombre d'autres sont indépendantes des postulats 5 et 6 et forment la partie commune aux trois systèmes. Il y en a aussi qui sont communes à deux seulement.

Nous allons faire connaître les vingt-six premières propositions d'Euclide qui ne s'appuient pas sur le postulat 5, ni, en

pour montrer comment on doit modifier celles d'Euclide afin de les rendre applicables à la géométrie générale. On peut encore construire aisément, au moyen des *Éléments*, les figures dont il est question au n° 16.

un certain sens, comme nous le dirons plus bas, sur le p
tulat 6, *et par suite,* appartiennent aux trois géométries.

V

VINGT-SIX PROPOSITIONS ÉLÉMENTAIRES COMMUNES AUX TROIS GÉOMÉTRIES.

Dans ce qui suit, nous supprimons les démonstrations ou solutions quand elles sont faciles à trouver ou identiques celles de Legendre ; nous esquissons les autres, en laissant, général, au lecteur le soin de faire les figures. Dans une p mière étude, il est préférable de supposer que les vingt-proprositions suivantes sont exposées seulement en géomét euclidienne et en géométrie lobatchefskienne; puis, après proposition XXXIII, dont la place logique eût été avant le p sent paragraphe, introduire, dans un certain nombre de propositions, des restrictions indispensables, comme nous disons après XXXIII, pour qu'elles soient vraies aussi en g métrie riemannienne.

I. Sur une droite donnée et finie, construire un trian équilatéral. [Voir LEGENDRE, II, *Prob.* 10].

II. En un point donné A, mener une droite égale à u droite donnée BC. [On joint AB ; on construit sur AB triangle équilatéral ABD ; le cercle de centre B, de rayon coupe DB prolongé en E ; le cercle de centre D de rayon l coupe DA prolongé en F. La ligne AF = BC. Cette construct ne s'appuie que sur les trois premiers postulats et sur la p position I.

III. Deux droites inégales étant données, retrancher de plus grande une droite égale à la plus petite. Solution ramen à la précédente.

IV. Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont un angle é compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. [V LEGENDRE, I, 6

. Dans un triangle isoscèle ABC, les angles B et C oppo-
ıux côtés égaux AC, AB sont égaux. Les côtés AC et AB
t prolongés respectivement jusqu'en E et D, au delà de C
, les angles CBD, BCE sont aussi égaux. [Prenez CE=BD
les prolongements de AC, AB; joignez CD, BE. Les
ıgles ACD, ABE, puis BCD et BCE sont égaux ; etc].

I. Réciproquement, si, dans un triangle, deux angles sont
ıx, les côtés opposés seront égaux et le triangle sera isos-
. [Voir LEGENDRE, I, 13].

II. Deux triangles ABC, ABD situés d'un même côté de
ne peuvent être tels que l'on ait AC=AD, BC=BD [Joi-
ıs CD ; les triangles ACD, BCD sont isoscèles ; si C est
ı du triangle ABD et D hors du triangle ABC, on a angle
) > BCD=BDC > ADC, ce qui absurde, puisque ACD=
); si C est à l'intérieur de ADB, soient EC, FD les prolon-
ents de BC, BD ; alors ACD > ECD=FDC > ADC, ce
est absurde, puisque ACD=ADC].

III. Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont les côtés
ıx chacun à chacun. [Démonstration au moyen du théo-
e précédent].

X. Diviser un angle donné en deux parties égales. [Voir
., II, *Prob.* 5].

.. Partager une droite donnée en deux parties égales.
ir LEG., II, *Prob.* 1].

.I. Par un point donné sur une droite, élever une perpen-
ılaire à une droite. [Voir LEG., II, *Prob.* 2].

.II. D'un point donné hors d'une droite abaisser une per-
ılaire sur cette droite. [Voir LEG., II, *Prob.* 3].

.III. Toute droite qui en rencontre une autre fait avec
ɛ-ci deux angles adjacents dont la somme est égale à deux
les droits. [Voir LEG., I, 2].

.IV. Si deux angles adjacents valent ensemble deux angles
ts, les deux côtés extérieurs sont en ligne droite. [Voir
., I, 4].

.V. Si deux droites se coupent les angles opposés au

sommet sont égaux. [Voir Leg., I, 5]. Corollaire. Si une droite fait, de part et d'autre, en un point, des angles égaux avec deux autres droites, celles-ci sont le prolongement l'une de l'autre.

XVI. Ayant prolongé (Fig. 1) en BD un côté AB d'un triangle ABC, l'angle extérieur CBD est plus grand que chacun des angles intérieurs opposés BAC, BCA. [Soit E le milieu de BC; prolongez AE de EF = AE; joignez FB. Le triangle BEF = ACE; donc l'angle BCA = EBF < CBD. On prouve de même que l'angle opposé par le sommet à CBD est plus grand que CAB].

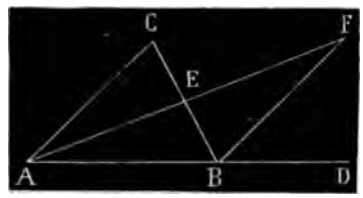


Fig. 1

XVII. La somme de deux angles d'un triangle est inférieure à deux droits. [Conséquence du théorème précédent].

XVIII. Dans un triangle ABC, au plus grand côté AC est opposé le plus grand angle B. [Portons sur AC > AB, la longueur AD = AB. On aura angle B > ABD = ADB > C].

XIX. Dans un triangle, au plus grand angle est opposé le plus grand côté. [Conséquence du théorème précédent].

XX. Dans un triangle ABC, un côté AB est plus petit que la somme des deux autres AC, CB. [Prolongeons AC de CD = BC ; joignons DB. On aura angle D = angle DBC < angle DBA ; donc AB < DA = AC + CB]. Corollaire. Dans un polygone, un côté est plus petit que la somme des autres côtés.

XXI. Si d'un point pris à l'intérieur d'un triangle on mène aux extrémités d'un côté deux droites, la somme de ces droites est moindre que celle des deux autres côtés et leur angle est plus grand que celui de ces côtés. [Démonstration au moyen des propositions 16 et 20 ; voir aussi Leg., I, 9].

XXII. Construire un triangle ayant pour côtés trois droites données dont chacune est plus petite que la somme des deux autres. [Voir Leg., II, *Prob.* 10].

XXIII. En un point d'une droite donnée faire un angle égal à un angle donné. [Voir LEG. II, *Prob.* 4].

XXIV. Si deux côtés d'un triangle sont égaux aux deux côtés d'un autre triangle ; si l'angle compris par les premiers est plus grand que l'angle compris par les seconds, le troisième côté du premier triangle sera plus grand que le troisième du second. [Voir LEG., I, 10].

XXV. Réciproquement, si les deux côtés d'un triangle sont égaux aux deux côtés d'un autre triangle ; si le troisième côté du premier est plus grand que le troisième côté du second, l'angle compris par les premiers côtés sera plus grand que l'angle compris par les seconds. [Voir LEG., I, 10, scholie].

XXVI. Deux triangles sont égaux s'ils ont deux angles égaux chacun à chacun et un côté égal à un côté, ces côtés étant compris entre les angles égaux, ou opposés à des angles égaux. [Soient ABC, DEF deux triangles ayant AB = DE, l'angle A = l'angle D et B = E, ou C = F. Si AC était > DF, portons AG = DF sur AC et joignons GB. Le triangle AGB sera égal à DEF. On aura angle E = angle GBA < ABC, ce qui est absurde, si E = B ; ou F = angle AGB > ACB, ce qui est aussi absurde, quand on suppose F = C].

VI

PROPOSITIONS COMMUNES A LA GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE ET A LA GÉOMÉTRIE LOBATCHEFSKIENNE [1]).

XXVII. *Si une droite* EF *(non riemannienne) fait avec deux autres (non riemanniennes également)* AB, CD *des angles alternes internes égaux* AEF, EFD, *ces deux droites ne se rencontrent pas* (EUCLIDE, I, 27). [Car si ces droites se rencontraient du côté des points B et D, en G, on aurait l'angle AEF, extérieur au triangle EFG, égal à l'angle intérieur

[1]) Ces propositions, dont nous empruntons la première à Euclide, sont indépendantes du 5e postulat, mais s'appuient essentiellement sur le sixième.

EFG ou EFD, ce qui est absurde d'après XVI. De même, les droites ne peuvent se rencontrer de l'autre côté en deça de A et C, en un point H]. COROLLAIRE. Les deux droites ne se rencontrent pas non plus si les angles alternes externes, ou les angles correspondants (l'un externe, l'autre externe d'un même côté de la transversale) sont égaux ; ou si la somme des deux angles internes ou externes, d'un même côté est égale à deux droits (EUCLIDE, I, 28).

XXVIII. PREMIER THÉORÈME DE LEGENDRE. *Dans un triangle (non riemannien), la somme des trois angles ne peut surpasser deux angles droits.*

Première démonstration (LEGENDRE, *Géométrie*, 3e édition, Paris, Didot, 1800, livre I, prop. 19). « Soit s'il est possible, (Fig. 2) ABC un triangle dans lequel la somme des trois angles est plus grande que deux angles droits.

Sur AC prolongé prenez CE = AC ; faites l'angle ECD = CAB, le côté CD = AB ; joignez DE et BD. Le triangle CDE sera égal au triangle BAC puisqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun (prop. IV) ; donc on aura l'angle CED = ACB, l'angle CDE = ABC et le troisième côté ED égal au troisième BC.

Fig. 2

Puisque la ligne ACE est droite, la somme des angles ACB, BCD, DCE est égale à deux angles droits : or on suppose la somme des angles du triangle ABC plus grande que deux angles droits ; on aura donc

$$CAB + ABC + ACB > ACB + BCD + ECD ;$$

retranchant de part et d'autre ACB commun et CAB = ECD, il restera ABC > BCD ; et parce que les côtés AB, BC du triangle ABC, sont égaux aux côtés CD, CB du triangle BCD, il s'ensuit que le troisième AC est plus grand que le troisième BD (prop. XXIV

Imaginons maintenant qu'on prolonge indéfiniment la ligne AC, ainsi que la suite des triangles égaux et semblablement placés ABC, CDE, EFG, GHI, etc. ; si l'on joint les sommets voisins par les droites BD, DF, FH, HK, etc., on formera en même temps une suite de triangles intermédiaires BCD, DEF, FGH, etc., qui seront tous égaux entre eux, puisqu'ils auront un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun. Donc on aura BD = DF = FH = HK, etc.

Cela posé, puisqu'on a AC > BD, soit la différence AC — BD = d ; il est clair que $2d$ sera la différence entre la ligne droite ACE égale à 2AC et la ligne droite ou brisée BDF égale à 2BD ; de sorte qu'on aura AE — BF = $2d$. On aura de même AG — BH = $3d$, AI — BK = $4d$, et ainsi de suite. Or, quelque petite que soit la différence d, il est évident que cette différence, répétée un nombre de fois suffisant, deviendra plus grande qu'une longueur donnée. On pourra donc supposer la suite des triangles prolongée assez loin pour qu'on ait AP — BQ > 2AB ; et ainsi on aurait AP > BQ + 2AB. Or, au contraire, la ligne droite AP est plus courte que la ligne anguleuse ABPQ, qui joint les mêmes extrémités A et P, de sorte qu'on aura toujours AP < AB + BQ + QP ou AB < BQ + 2AB. Donc l'hypothèse d'où l'on est parti est absurde ; donc la somme des trois angles du triangle ABC ne peut être plus grande que deux angles droits. »

Seconde démonstration[1]). Supposons que la somme des angles du triangle ABC (Fig. 1, proposition XVI) surpasse deux droits d'un angle α, par exemple. Soit BC le côté le plus petit du triangle ABC. Il est facile de voir que la somme des angles du triangle ABF est la même que celle des angles du triangle ABC.

[1]) Cette seconde démonstration, due aussi à Legendre, se trouve livre I, prop. 19 de sa géométrie, mais seulement dans la 12e édition (1823), et avec un léger défaut qui a été corrigé par Lobatchefsky, dans le n° 19 de ses *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* (OEuvres, p. 557). Elle s'appuie sur la même construction que la proposition XVI d'Euclide, donnée plus haut.

En outre, le plus petit angle BAC du triangle ABC est égal à la somme AFB + BAF des angles du triangle ABF. Le plus petit de ces deux angles AFB, BAF, s'ils sont inégaux, est inférieur à $\frac{1}{2}$ BAC, et s'ils sont égaux, chacun sera égal à $\frac{1}{2}$BAC. Opérant sur le triangle ABF comme sur le triangle ABC, on en déduira un triangle où le plus petit angle est au plus égal à la moitié du plus petit des angles AFB, BAF, et, par suite, au plus égal à $\frac{1}{4}$BAC. En continuant ainsi on arriverait à un triangle où la somme des angles serait toujours égal à celle des angles de ABC, c'est-à-dire deux droits plus α ; mais où, en même temps, il se trouverait d'abord, deux angles dont la somme serait une fraction aussi petite qu'on le voudrait de BAC et par suite, moindre que α ; ensuite un troisième angle moindre que deux droits. Dans ce triangle, la somme des trois angles serait donc à la fois : 1° 2 droits + α ; 2° moins que deux droits augmentés de moins que α ; ce qui est absurde. On ne peut donc supposer que dans un triangle non riemannien la somme des angles surpasse deux droits et le théorème est démontré.

XXIX. Second théorème de Legendre. *Si dans un seul triangle la somme des trois angles est égale à deux angles droits, il en sera de même pour tout autre triangle* [1]).

« Supposons que dans le triangle ABC (Fig. 3) la somme des trois angles soit égale à deux angles droits ; deux au moins de ces angles, A et C seront aigus. Abaissons, du sommet du troisième angle B, la perpendiculaire p sur le côté opposé AC. Cette perpendiculaire partagera le triangle ABC en deux triangles rectangles dans chacun desquels la somme des trois angles devra encore être égale à deux droits, sans quoi elle serait, dans l'un

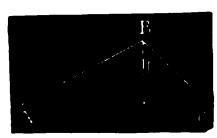


Fig. 3

[1]) Nous donnons textuellement la démonstration de Lobatchefsky (*G. Unt.* etc, n° 20, *Œuvres*, p. 558) qui n'est peut-être pas assez développée, mais que le lecteur peut aisément compléter là où elle est trop brève. Legendre en a donné une autre qui est plus longue.

de ces triangles plus grande que deux droits, ou dans le triangle total plus petite que deux droits. On obtiendra donc ainsi un triangle rectangle, dont les côtés de l'angle droit seront p et q, et au moyen duquel on pourra former un quadrilatère dont les côtés opposés seront égaux entre eux (prop. XXII) et dont les côtés adjacents p et q seront perpendiculaire l'un à l'autre. Par la répétition de ce quadrilatère, on pourra en former un autre dont les côtés seront np et q, et enfin un autre ABCD (Fig. 4) ayant ses côtés perpendiculaires entre eux et dans lequel AB $= mq$, BC $= np$, DC $= mq$, AD $= np$, m et n étant des nombres entiers quelconques. Ce quadrilatère sera divisé par la diagonale AC en deux triangles rectangles égaux, ABC, ADC dans chacun desquels la somme des trois angles est égale à deux droits. Or, on peut prendre les nombres n et m assez grands pour que le triangle rectangle ABC dont les côtés de l'angle droit sont AB $= mq$, BC $= np$ renferme dans son intérieur tout autre triangle rectangle donné EBF, lorsqu'on aura fait coïncider leurs angles droits. En menant la ligne EC, on obtient des triangles rectangles ayant deux à deux un côté commun. Le triangle ABC est formé par la réunion des deux triangles ACE, ECB, dans chacun desquels la somme des trois angles ne peut surpasser deux droits ; elle doit donc être, pour chacun, égale à deux droits, sans quoi elle ne serait pas égale à deux droits dans le triangle total. De même, le triangle ECB se compose des deux triangles ECF, FEB, d'où il s'ensuit que dans FEB, la somme des trois angles doit être égale à deux droits. Cela doit donc avoir lieu, en général, pour un triangle quelconque, puisque tout triangle peut-être décomposé en deux triangles rectangles. »

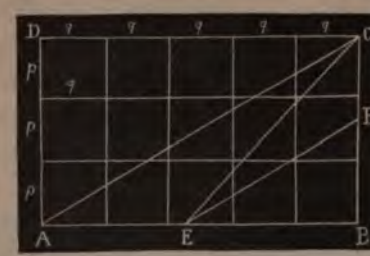


Fig. 4

COROLLAIRE. En géométrie non riemannienne, deux hypothèses seulement sont possibles : la somme des trois angles est égale à deux droits dans tous les triangles, ou elle est moindre dans tous.

VII

PROPOSITIONS CARACTÉRISTIQUES DE LA GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE ET DE LA GÉOMÉTRIE LOBATCHEFSKIENNE. [1])

XXX. *Si le cinquième postulat est vrai, deux droites qui ne se rencontrent pas, font avec une transversale des angles intérieurs dont la somme est égale à deux angles droits* (EUCLIDE, I, 29).

Car si cette somme n'est pas égale à deux droits, elle est supérieure à deux droits d'un côté de la transversale, inférieure à deux droits de l'autre, puisque, d'après la proposition XIII, la somme des quatre angles intérieurs est égale à quatre droits. Or, d'après le cinquième postulat, les droites données se rencontreraient du côté où la somme des angles est inférieure à deux droits, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc, etc.

REMARQUE. En géométrie euclidienne, deux droites qui ne se rencontrent pas sont dites *parallèles*.

COROLLAIRE. Deux parallèles font avec une transversale des angles alternes internes égaux ; des angles alternes externes égaux ; des angles correspondants (c'est-à-dire d'un même côté l'un intérieur, l'autre extérieur) égaux.

XXXI. *Ayant prolongé* (Fig. 5.) *en* BD *un côté* AB *d'un triangle* ABC, *l'angle extérieur* CBD *est égal à la somme des deux angles intérieurs opposés* ACB, BAC, *et la somme des trois angles intérieurs du triangle est égale à deux droits, si le cinquième postulat est vrai* (EUCLIDE, I, 31-32).

[1]) Dans ce paragraphe, comme dans le précédent, nous admettons le sixième postulat d'Euclide.

Faisons l'angle CBF égal à l'angle ACB (prop. XXIII); BF sera parallèle à AC (prop. XXVII). Par suite (prop. XXX, coroll.), l'angle FBD=CAB; donc CBD, qui est égal à CBF + FBD, est égal à la somme des deux angles intérieurs ACB, CAB. Ensuite ABC + CBD est égal à la somme des trois angles intérieurs ABC, ACB, CAB.

Fig. 5

COROLLAIRE. Si le cinquième postulat est vrai, la somme des angles est égale à quatre droits dans un quadrilatère.

XXXII. *Réciproquement si la somme des angles de tout triangle est égale à deux angles droits, le cinquième postulat est vrai; c'est-à-dire que deux droites* AB, CD, *qui font avec une troisième* EF *deux angles intérieurs d'un même côté dont la somme est plus petite que deux angles droits, prolongées suffisamment se rencontrent de ce côté* (LEGENDRE, 12e éd., I, 23).

« Soit (Fig. 6.) la somme BEF+ EFD inférieure à deux droits ; menez FG de manière que l'angle EFG=AEF, vous aurez la somme BEF+EFG égale à la somme BEF + AEF et, par conséquent, égale à deux angles droits, et puisque BEF+EFD est plus petite que deux angles droits, la droite DF sera comprise dans l'angle EFG.

Fig. 6

Par le point F tirez une oblique FM qui rencontre AB en M, l'angle AMF sera égal à GFM, puisque, en ajoutant de part et d'autre une même quantité EFM+FEM, les deux sommes sont égales chacune à deux angles droits. Prenez ensuite MN=FM et joignez FN ; l'angle AMF extérieur au triangle FMN, est égal à la somme des deux intérieurs opposés MFN, MNF (Prop. XXXI) ; ceux-ci sont égaux entre eux, puisqu'ils sont opposés à des côtés égaux MN, FM ; donc l'angle AMF

ou son égal MFG est double de MFN ; donc la droite FN divise en deux parties égales l'angle GFN et rencontre la ligne AB en un point N situé à la distance MN=FM.

Il suit de la même démonstration que si l'on prend NP=FN, on déterminera sur la ligne AB le point P où aboutit la droite FP qui fait l'angle GFP égal à la moitié de l'angle GFN, ou au quart de l'angle GFM.

On peut donc prendre ainsi successivement la moitié, le quart, le huitième, etc, de l'angle GFM, et les lignes qui opèrent ces divisions, rencontreront la ligne AB, en des points de plus en plus éloignés, mais faciles à déterminer, puisque MN=FM, NP=FN, PQ=FP, etc.

Mais en continuant de sous-diviser l'angle GFM en raison double, on parviendra bientôt à un angle GFZ plus petit que l'angle donné GFD, et il sera encore vrai que FZ prolongée rencontre AB en un point déterminé : donc à plus forte raison la droite FD comprise dans l'angle EFZ, rencontre AB. »

Corollaire I. En géométrie euclidienne, c'est-à-dire si l'on admet les postulats 5 et 6, la somme des trois angles d'un triangle est égale à deux droits.

Corollaire II. En geometrie lobatchefskienne, c'est-à-dire si l'on rejette le postulat 5 et si l'on admet le postulat 6, la somme des trois angles d'un triangle est toujours inférieure à deux droits ; celle d'un quadrilatère est inferieure à quatre droits.

Car elle ne peut pas être superieure prop. XXVIII) ; si elle etait egale à deux droits dans un seul triangle, il en serait de même dans tous prop. XXXI, et alors (prop. XXXII) le cinquieme postulat serait vrai, ce qui est contraire à la definition de la geometrie lobatchefskienne.

Remarque. En resume, la somme des trois angles d'un triangle est, egale à deux droits, en geometrie euclidienne, inferieure à deux droits, en geometrie lobatchefskienne. On va voir qu'en geometrie riemannienne, elle est superieure à deux droits.

VIII.

PROPOSITIONS CARACTÉRISTIQUES DE LA GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE [1])

XXXIII. *Si deux droites passant par un point A ont un second [2]) point d'intersection B, toutes les autres droites du plan des deux premières qui passent par A, passent aussi par B* [3]).

Soient (Fig. 7) Aa, Ad deux droites se rencontrant une seconde fois en un point B. Du point A comme centre, avec un rayon Aa plus petit que AB, traçons une circonférence $abcdefg$ rencontrant Aa en a, Ad en d. Supposons, pour fixer les idées, que l'arc ad soit les trois septièmes de la circonférence. On peut concevoir, sur la circonférence, un point g tel que l'arc dg = l'arc ad ; je dis que la droite Ag rencontrera la droite Ad en B. En effet, on peut transporter la figure AaBdD formée par les deux droites AaB, AdB de manière que la première AaB de ces droites, vienne s'appliquer sur la

[1]) Nous prions instamment le lecteur de ne pas lire les raisonnements qui vont suivre en donnant implicitement au mot droite le sens qu'il a en géométrie euclidienne ou en géométrie lobatchefskienne. Dans le présent paragraphe, dont la place logique, à part la dernière proposition, serait après le quatrième, *droite*, *plan*, *cercle* désignent des êtres géométriques ayant uniquement les propriétés énoncées dans les définitions 5, 6, 7 et dans les quatre premiers postulats ; de plus, par la définition même de la géométrie riemannienne, nous rejetons le sixième postulat et, par suite, nous admettons qu'il y a au moins un couple de droites qui peuvent enclore un espace.

[2]) Un *second* point est pris dans le sens propre ; nous supposons qu'il n'y a pas, entre A et B, un point X, commun aux droites considérées ; car s'il en était ainsi, le point B serait le *troisième* au moins et non le second point d'intersection de ces droites.

[3]) Comme Gauss l'a fait remarquer, et comme on peut le prouver d'une manière élémentaire, en géométrie non euclidienne, il n'y a jamais de similitude sans égalité. Il n'y a donc pas moyen de dessiner la ressemblance d'une figure non euclidienne à une échelle plus petite que la réalité : on ne peut qu'en indiquer la disposition générale. C'est à cause de cette circonstance que nous devons marquer le point B sur la direction de toutes les droites de la figure.

seconde AdB, et celle-ci sur Ag. Puisque AaB et AdB se coupent en B, il en sera de même de ces droites dans leur nouvelle position AdB et Ag, ce qu'il fallait démontrer.

Soient encore l'arc $gc=dg$, $cf=gc$, $fb=cf$, $be=fb$. Les droites Ag, Ac, Af, Ab, Ac rencontreront aussi Ad et Aa en B. De cette manière, les sept droites qui passent par A et par les sept points a, b, c, d, e, f, g (ceux-ci divisent évidemment la circonférence en parties égales), se rencontrent toutes en B. Deux d'entre elles d'ailleurs ne peuvent se couper avant B ; car si deux se coupaient en X, avant de se couper en B, on prouverait qu'il en serait de même de toutes, et, par suite, de Aa, Ad, dont B ne serait pas le *second* point d'intersection.

Fig. 7

Les droites Am, An, passant par les points de subdivision d'un de ces arcs ef, par exemple, en trois, ou un plus grand nombre de parties égales se couperont aussi pour la seconde fois en B. Supposons d'abord que l'une de ces droites Am rencontre AeB en B ; alors, on prouve aisément, comme plus haut, que An rencontre Am en B, comme on a prouvé tantôt que Ag rencontre Ad en B. Si Am rencontrait AeB, avant le point B, en X, on verrait comme plus haut que An, puis Af rencontrent Am et Ae en X ; donc B ne serait pas le point où Af rencontre Ae pour la seconde fois [1]).

[1]) On remarquera que Am indéfiniment prolongé doit rencontrer AeB, ou AfB, ou ces deux droites à la fois en B. Car s'il en était autrement, prenons sur Am une longueur Amp supérieure à AeB, par exemple, égale à AeBq, q étant au delà de B sur AeB. La circonférence de centre A, de rayon Aq, aurait un point q extérieur, et un point p intérieur à l'espace AeBfA enclos par les deux droites AeB, AfB, et rencontrerait une au moins de ces droites en un point Y. La distance AY inférieure (ou égale) à AB, serait égale au rayon Aq, qui est supérieur à AB, ce qui est absurde.

Donc enfin les droites passant par A et par les points de subdivision de la circonférence en un nombre quelconque de parties égales, c'est-à-dire toutes les droites imaginables qui émanent de A rencontrent toutes Aa, pour la seconde fois, en B [1]).

Corollaire I. Deux droites quelconques passant par un autre point C du plan se coupe en un second point D, situé à la même distance de C que A de B. Car on peut transporter ces droites dans le plan de manière à faire coïncider C avec A et les droites avec deux des droites qui passent par A et se rencontrent pour la seconde fois en D. Nous appellerons 2Δ, la distance AB ou CD.

Corollaire II. La droite aA prolongée au delà de A, en Aa', aboutit en B, où elle rencontre AdB, AcB.

Définition. Deux points comme A et B, distants de 2Δ, sont dits *opposés*.

Corollaire III. A un point A′ de Aa (Fig. 8) est opposé un point B′ sur aB prolongé ; A′Aa' prolongé aboutira en B′ ; donc le prolongement de aB au delà de B vers B′ se confond avec Aa'B ; *une droite riemannienne est donc une ligne fermée* AaBa'B, de longueur 4Δ *sur laquelle on peut avancer indéfiniment comme sur un cercle*, mais où la distance maxima de deux points est 2Δ.

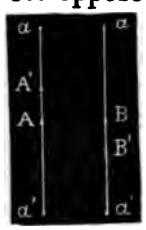


Fig. 8

Corollaire IV. Le plan riemannien formé de l'ensemble des droites riemanniennes Aa, Ab, etc., est une surface fermée, partagée en deux régions par chacune de ces droites.

Corollaire V. Deux droites riemanniennes m et n quelconques se coupent en deux points opposés. En effet (Fig. 9), joignons un point A de la première m à un point C de la seconde n par une droite AC ; AC rencontrera la première droite en un second point B opposé à A, la seconde en un

[1]) On peut considérer, si l'on veut, des arcs incommensurables avec la circonférence ; mais ce cas se ramène à celui qui est considéré dans le texte d'après le sens symbolique de ce mot incommensurable.

second point D opposé à C. La ligne ACBA sur laquelle se trouvent les points C et D est divisée en deux parties égales par le point B ; le point C étant situé dans la première partie, le point D est dans la seconde, puisque $CD = AB = 2\Delta$. La ligne m entoure le point C complètement, puisqu'elle réunit les points A et B, à droite et à gauche de la droite ACB. Il en résulte que la ligne n qui réunit C à D aussi à droite et à gauche de ACB rencontre m en deux points. Ces points sont opposés d'après le corollaire I.

Fig. 9

Corollaire VI. En géométrie riemannienne, le 5e postulat d'Euclide est toujours vrai, puisque les droites d'un même plan se rencontrent toujours. En géométrie lobatchefskienne, le 6e postulat d'Euclide est toujours vrai ; puisque s'il était faux dans un seul cas, on pourrait établir la proposition XXXIII et son corollaire VI, lequel n'est pas vrai en géométrie lobatchefskienne.

Remarque. Les vingt-six propositions du § V sont vraies en géométrie riemannienne, mais on doit introduire dans un certain nombre d'entre elles des restrictions provenant de ce que les distances, considérées dans les données, les constructions ou les raisonnements ne peuvent parfois pas surpasser 2Δ, pour que les démonstrations ou les solutions soient irréprochables. Pour les triangles, le plus simple est de supposer, par définition, que les côtés sont inférieurs à 2Δ. On trouve assez aisément que la construction supposée dans la proposition I, implique que le côté du triangle équilatoral à construire est non seulement inférieur à 2Δ, mais à $\frac{4}{3}\Delta$; mais cela n'entraine pas une restriction analogue pour les propositions II et III, dont les constructions sont toujours exécutables, au besoin, en plusieurs fois. La proposition XVI et celles qui en dépendent directement supposent essentiellement les longueurs considérées inférieures à 2Δ. Mais un bon nombre des autres sont vraies dans tous les cas, contrairement aux apparences.

Pour abréger, nous ne faisons pas en détail l'énumération des restrictions à introduire dans les propositions du § v : le lecteur versé en géométrie euclidienne reconnaîtra sans peine que les propriétés des figures rectilignes d'un plan riemannien sont analogues à celles des figures formées sur une sphère par des arcs de grand cercle. — Quant aux propositions XXVII à XXXII, où interviennent explicitement ou implicitement des droites infinies, elles ne peuvent évidemment être démontrées qu'en géométrie euclidienne ou lobatchefskienne.

XXXIV. *Dans un triangle riemannien* ABC, *la somme des trois angles est supérieure à deux angles droits* (Démonstration de M. De Tilly). Soit (Fig. 10) E le milieu de CB ; menons AE et prolongeons cette ligne d'une longueur EF = AE ; menons aussi FB. Le triangle EFB sera égal à EAC. Supposons F à l'intérieur du triangle CBO, O étant le point de rencontre de ACQ et AB, ou le point opposé

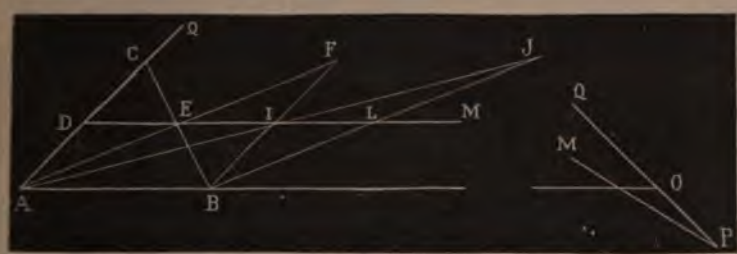


Fig. 10

à A. Soit encore I le milieu de BF. Joignons AI et prolongeons cette ligne de IJ = AI. Si le point J est à l'intérieur du triangle BFO, soit L le milieu de BJ, LN = AL (le point N est en dehors de la figure). Si le point N est à l'intérieur du triangle BJO, faisons encore une construction analogue sur le triangle ABN et continuons de même indéfiniment.

Les somme des angles dans les triangles successifs ABC, ABF, ABJ, ABN, etc., est toujours la même, comme il est facile de le voir. Bien entendu, on prend pour l'angle en B des triangles ABF, ABJ, ABN,... les sommes ABE + EBF, ABI + IBJ, ABL + LBN, etc.

Si l'un de ces angles B toujours de plus en plus grands, est supérieur ou égal à deux droits, autrement dit, si l'un des points I, L, etc., se trouve en dehors du triangle BCO ou sur BO, le théorème est démontré ; car évidemment cet angle en B, avec les deux autres angles du triangle considéré a une somme supérieure à deux droits.

Or, l'un des points I, L, etc., est nécessairement en dehors de BCO. En effet, soit D le milieu de AC ; menons DE, EI, IL, etc. Le triangle CDE est égal au triangle BEI. Par suite, l'angle CED = angle IEB, EI = DE et en est le prolongement. On démontre de même que IL=EI et est aussi le prolongement de EI. La droite DEIL coupe ACQO, en un point P, situé au delà de O à une distance OP = AD. Par suite, en portant sur DEIL, indéfiniment des droites EI, IL, etc., égales à DE, qui est d'ailleurs inférieure à DEP = 2Δ, l'un au moins des points I, L, etc., se trouvera, soit sur la ligne AB, soit à l'extérieur du triangle BCO. Le théorème est donc démontré.

Corollaire. Dans un quadrilatère riemannien, la somme des angles est supérieure à quatre droits.

IX

Résumé. Vraie nature des postulats 5 et 6.

On peut résumer ce qui a été exposé dans les cinq paragraphes précédents de la manière suivante.

Dans l'exposé systématique de la géométrie, on est amené logiquement à poser deux dilemmes.

Premier dilemme. 1. Ou bien il existe au moins un couple de droites distinctes ayant deux points communs (*géométrie riemannienne*). Dans ce cas, tout couple de droites ayant un point commun en a un second, dit point opposé au premier, et la somme des angles de tout triangle est supérieure à deux droits.

2. Ou bien, deux droites distinctes ne peuvent jamais avoir deux points communs (postulat 6 : *géométrie non riemannienne*), et dans ce cas, la somme des angles d'un triangle quelconque n'est jamais supérieure à deux droits *(Premier théorème de Legendre)*.

Second dilemme. Dans cette dernière hypothèse 1. Ou bien deux droites d'un plan qui font avec une transversale les angles dont la somme est inférieure à deux droits se rencontrent (postulat 5 : *géométrie euclidienne*). Alors la somme des angles de tout triangle est égale à deux droits ; et l'on se trouve dans ce cas, si la somme des angles d'un seul triangle est égale à deux droits *(Second theorème de Legendre)*.

2. Ou bien il y a au moins une couple de droites d'un même plan qui ne se rencontrent pas et qui font avec une transversale des angles dont la somme est inférieure à deux droits *(géométrie lobatchefskienne)*. Dans ce cas, la somme des angles de tout triangle est inférieure à deux droits.

On peut encore exprimer les mêmes idées, sous une autre forme, de la manière suivante :

La définition 5 et les postulats 1, 2, 4 caractérisent le *genre* DROITE.

Si l'on y ajoute le postulat 5 seul, on obtient la définition de la *droite riemannienne ;* le postulat 6 seul, celle de la droite *lobatchefskienne ;* les postulats 5 et 6, celle de la *droite euclidienne*.

La somme des angles, dans un triangle riemannien est supérieure à deux droits ; elle est inférieure à deux droits, dans un triangle lobatchefskien ; elle est égale à deux droits dans un triangle euclidien.

Les propriétés du plan, ou plus généralement, celles de l'espace dépendant essentiellement de celles de la droite, on doit distinguer de même les plans et les espaces *riemanniens*, *lobatchefskiens* et *euclidien*.

Les propriétés communes aux trois géométries sont des propriétés des *genres* droite, plan, espace ; dans les manuels,

elles sont mêlées sans distinction avec celles qui n'appartiennent qu'à l'une ou qu'à deux des *espèces* que nous venons de définir.

Dans tout ce qui précède, nous n'avons dû recourir nulle part à une de ces assertions arbitraires que Kant a appelées *jugements synthétiques à priori*. Les postulats 5 et 6 n'appartiennent nullement à cette catégorie de propositions. Ce sont simplement des définitions méconnues, comme l'a très bien dit M. Lechalas. Les postulats 5 et 6 sont indispensables pour distinguer les *espèces* du *genre* droite, rien de plus [1]. Ils ne sont ni contenus dans la définition de la droite générale ni en contradiction avec cette définition; ils en sont indépendants.

X

ESQUISSE DES PRINCIPALES PROPOSITIONS DE LA MÉTAGÉOMÉTRIE. INDÉMONTRABILITÉ DES POSTULATS.

Une fois arrivé au théorème fondamental sur la somme des trois angles d'un triangle en géométrie euclidienne, lobatchefskienne ou riemannienne, on peut exposer parallèlement ces trois branches de la Métagéométrie ou géométrie générale, comme l'a fait M. De Tilly dans son célèbre essai de 1878.

[1]) Que l'on nous permette ici une comparaison. En algèbre, on étudie les propriétés des équations du second degré à coefficients réels $ax^2+bx+c=0$. Ces équations se divisent en trois classes, selon que l'on a b^2-4ac négatif, nul ou positif, ou encore selon que leurs racines sont imaginaires, ou égales, ou réelles et inégales. Certaines propriétés des équations du second degré sont vraies pour les trois classes; d'autres n'appartiennent qu'à une seule de ces classes, ou à deux d'entre elles. On peut dire, en imitant le langage des géomètres, que $b^2-4ac>0$ est un postulat qui caractérise les équations à racines réelles et inégales, $b^2-4ac=0$, un postulat qui caractérise celles qui ont des racines égales, enfin $b^2-4ac<0$, un postulat qui caractérise celles qui ont des racines imaginaires. — Mais un esprit bizarre, peu au courant des théories algébriques, et imbu d'ailleurs des idées de Kant, pourrait dire: " L'intellect humain est ainsi fait qu'il admet, sans preuve aucune, que, dans toute équation du second degré, l'on a $b^2-4ac=0$; cette relation est un jugement synthétique *à priori* que nous ne pouvons ni ne pas admettre, ni établir avec rigueur. „

La Métagéométrie comprend d'abord un grand nombre de propositions communes aux trois géométries. Ainsi, dans les *Éléments* de Legendre, on peut regarder comme telles, outre les 18 premières propriétés du livre I, une grande partie de celles du livre II et du livre V, tout le livre VII, puis une faible partie des livres IV et VI.

Au contraire, la théorie des parallèles, celles de la similitude, la mesure des longueurs, des aires et des volumes, telles quelle est exposée dans Legendre, appartiennent exclusivement à la géométrie euclidienne, comme aussi la relation fondamentale

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad \text{(E)}$$

entre l'hypoténuse a et les côtés b et c d'un triangle rectangle et ce qui en dépend essentiellement.

En géométrie lobatchefskienne, la théorie des parallèles est remplacée par le *théorème de Saccheri* et ses conséquences : deux droites d'un plan se rencontrent, ou sont asymptotes l'une de l'autre, ou divergent indéfiniment à partir d'une perpendiculaire commune. La théorie de la similitude n'existe pas, mais on prouve aisément que deux triangles équiangles sont égaux. La recherche des longueurs, des aires et des volumes se fait tout autrement qu'en géométrie euclidienne. On trouve, en particulier, que l'aire d'un triangle est proportionnelle à son déficit angulaire, c'est-à-dire à la différence entre deux droits et la somme de ses angles (*théorème de Lambert*) ; par suite, quelque grand que soit un triangle, sa surface est toujours inférieure à une limite finie. La relation qui lie l'hypoténuse et les côtés d'un triangle rectangle est

$$\operatorname{Ch}\frac{a}{l} = \operatorname{Ch}\frac{b}{l}\operatorname{Ch}\frac{c}{l} \qquad \text{(L)}$$

où l est une quantité constante, dite *constante lobatchefskienne*.

En géométrie riemannienne, deux droites d'un plan se rencontrent en deux points opposés ; deux triangles équiangles sont égaux ; il n'existe pas de théorie de la similitude. La

recherche des longueurs, des aires et des volumes se fait à peu près comme en géométrie lobatchefskienne ; l'aire d'un triangle, toujours finie, est proportionnelle à son excès angulaire, c'est-à-dire à la différence entre la somme de ses angles et deux droits. La relation entre l'hypoténuse et les côtés d'un triangle rectangle est

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} \qquad (R)$$

r étant une constante, dite constante riemannienne, telle que $2\Delta = \pi r$ [1]).

Des relations (E), (L), (R) on déduit les trigonométries planes, euclidienne, lobatchefskienne ou riemannienne. Elles sont différentes l'une de l'autre, mais la trigonométrie sphérique est la même dans les trois systèmes et identique à la trigonométrie riemannienne plane.

On tire encore de chacune des relations (E), (L), (R), une relation correspondante entre les dix distances mutuelles de cinq points ; nous appellerons ces relations (E'), (L'), (R') ; Lagrange a trouvé la première, M. Schering les deux autres. M. De Tilly a prouvé que la relation (E') résume la géométrie euclidienne toute entière et que, de même, (L'), (R') résument les deux géométries non euclidiennes. Par suite, on peut dire la même chose des relations plus simples (E), (L), (R) puisque l'on peut en déduire (E'), (L'), (R') [2]).

[1]) Pour la démonstration de la relation (L), voir une article de M. Gérard, dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*, 3e série, t. XII, pp. 74-84 (février 1893) ; pour (R), nos *Principes fondamentaux de la géométrie non euclidienne de Riemann* (supplément à *Mathesis*, 1895, 2e série, t. V). Les ouvrages de M. De Tilly contiennent d'ailleurs la démonstration de toutes les formules dont il est question dans le texte.

[2]) Au point de vue de l'analyse, on peut déduire les relations (R'), (L'), (E') de la suivante entre les distances $1x$, $2x$, $3x$, $4x$, $5x$ d'un point quelconque x aux points 1, 2, 3, 4, 5, (α, β, γ, δ, ε, sont des constantes indépendantes de x)

$$\alpha\cos\left(\frac{1x}{r}\right) + \beta\cos\left(\frac{2x}{r}\right) + \gamma\cos\left(\frac{3x}{r}\right) + \delta\cos\left(\frac{4x}{r}\right) + \varepsilon\cos\left(\frac{5x}{r}\right) = 0.$$

On trouve (R') en faisant coïncider x avec 1, 2, 3, 4, 5, puis éliminant les constantes entre les cinq équations obtenues ; (L') s'en déduit en remplaçant r

Au point de vue de l'analyse mathématique, les relations (E), (L), (R) sont des cas particuliers d'une seule égalité. En effet, (L) et (R) se transforment en (E), si l'on fait r ou l infini, et (L) devient (R) et inversement si l'on suppose $l = r\sqrt{-1}$. De même (L') et (R') donnent (E'), si l'on y fait r ou l infini, et (L') devient (R') et inversement, si $l = r\sqrt{-1}$.

Les trois géométries sont, au fond, le développement des conséquences de (E) ou (E') (géométrie euclidienne) ; (L) ou (L') (géométrie lobatchefskienne) ; (R) ou (R') (géométrie riemannienne). Par suite, toutes trois sont également rigoureuses et inattaquables comme édifice logique. Il en est ainsi, en particulier de la géométrie euclidienne. Mais, avant qu'on eût réduit à ce degré de simplicité les principes fondamentaux de la science de l'espace, on n'était pas parvenu à prouver que les postulats 5 et 6 de la géométrie euclidienne sont compatibles entre eux et avec les définitions et les autres postulats. C'est donc M. De Tilly qui, en ramenant toutes les vérités des trois géométries aux relations (E'), (L'), (R') entre les distances de cinq points, a établi, sur une base inébranlable, les fondements non seulement des deux géométries non euclidiennes, mais aussi ceux de la géométrie euclidienne.

Les remarques précédentes sur les relations analytiques entre les distances des sommets d'un triangle rectangle, ou entre celles de cinq points quelconques, font comprendre, *à posteriori*, pourquoi on a vainement essayé, pendant deux mille ans, de démontrer les postulats 5 et 6. Au fond, dans ces tentatives infructueuses, on tâchait de prouver que les relations (E) ou (E') sont équivalentes à (L), (L') ou (R), (R'). Or, cela est manifestement impossible : pour déduire (E') de (L'), ou (E) de (L), il faut ajouter à (L) ou (L') la condition supplémentaire

par $l\sqrt{-1}$: enfin (E) est le cas-limite correspondant à r ou l infini. Voir notre article sur ce sujet dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1894-1895, t. XIX, 2e partie, pp. 189-196.

Rien n'est plus facile d'ailleurs que d'établir une géométrie générale analytique à quatre dimensions ou plus, c'est-à-dire caractérisée par une relation entre les distances de six points ou plus.

$l = \infty$; de même (R) ne donne (E), ou (R') ne donne (E') que si l'on suppose $r = \infty$.

XI

LA GÉOMÉTRIE PHYSIQUE.

« Nous avons vu que, si l'on se place à un point de vue purement rationnel, toutes les géométries, pouvant être construites sans entraîner de contradiction, ont une égale valeur, sont aussi vraies les unes que les autres. Mais on peut se demander à laquelle d'entre elles est conforme notre univers. Pour beaucoup, la réponse à cette question n'est pas douteuse : notre univers est euclidien. A cette affirmation sans réserve, il est d'abord indispensable d'opposer une restriction à laquelle ne saurait contredire aucune personne nous ayant suivi jusqu'ici : du moment que le système de géométrie cherché ne présente aucun caractère de nécessité, nous ne pouvons le connaître que par la méthode d'observation ; c'est uniquement par des mesures que nous arriverons à déterminer le paramètre de notre univers, à supposer même que notre univers soit identique à lui-même, ce que rien n'impose *a priori*. Dès lors, cette détermination ne pourra être faite qu'à un certain degré d'approximation, comme toutes les déterminations expérimentales (G. LECHALAS, *Étude sur l'espace et le temps*, Paris, 1896, p. 88). » De plus, il faudra admettre que nous pouvons être pratiquement certain de l'invariabilité de nos étalons de mesure quand nous les employons dans des endroits différents, les autres circonstances restant les mêmes.

Cela posé, voici comment l'on conçoit que l'on puisse déterminer expérimentalement quelle est celle des trois géométries idéales qui correspond au monde physique et trouver la valeur des constantes riemannienne ou lobatchefskienne, le cas échéant.

En pratique, un fil tendu très fin réalise autant que possible

le concept général de la droite et nous permet de constater que les arêtes de tel corps solide sont des droites, que certaines surfaces sont des plans, etc. On peut donc construire des instruments de mesure élémentaires, par exemple, des règles divisées, au moyen desquelles on pourra estimer et comparer des distances.

On pourra aussi tracer des figures géométriques sur un plan, par exemple, des triangles rectangles isoscèles. Supposons, en premier lieu, que l'on ait trouvé, pour un pareil triangle que l'hypoténuse est égale à $\frac{4}{3}$ fois le côté. On en conclura aisément que cette figure est riemannienne ; car on peut déterminer une valeur réelle $x = \frac{1}{4}\pi$ qui vérifie la relation (R), mise, dans le cas actuel, sous la forme

$$\cos x \cos x = \cos \tfrac{4}{3} x,$$

x désignant le rapport du côté du triangle à la constante riemannienne, tandis qu'il n'y en a aucune qui vérifie les relations (L) ou (E), comme l'on peut s'en assurer. La constante riemannienne sera égale au côté multiplié par $(4 : \pi)$.

En second lieu, si l'on a trouvé un triangle rectangle isoscèle où le rapport de l'hypoténuse au côté est égal à (2195 : 1469), on en conclura que cette figure est lobatchefskienne, car la relation (L), mise sous la forme

$$\mathrm{Ch}\ x\ \mathrm{Ch}\ x = \mathrm{Ch}\ \tfrac{2195}{1469} x,$$

où x désigne le rapport du côté à la constante lobatchefskiennne est vérifiée à peu près par $x = \sqrt{2}$, tandis qu'aucune valeur réelle ne vérifie les relations (R) ou (E). La constante lobatchefskienne est égale au côté multiplié par $\sqrt{2}$, à peu près.

En troisième lieu, si l'on a un triangle isoscèle où le rapport de l'hypoténuse au côté est égale à $\sqrt{2}$, on en conclura que cette figure est euclidienne, car la relation (E) est la seule qui soit vérifiée dans cette hypothèse.

Mais, à vrai dire, ce dernier cas ne se présentera jamais puisque l'on ne peut mesurer exactement deux longueurs dont le rapport est le nombre incommensurable $\sqrt{2}$. La valeur approchée de $\sqrt{2}$ est 1,41421 35623 73... En pratique, on peut trouver pour les valeurs du rapport de l'hypoténuse au côté d'un triangle rectangle isoscèle des valeurs approchées de $\sqrt{2}$; par exemple, des valeurs trop petites :

1,41 ; 1,414 ; 1,4142 ; 1,41421 ; etc.

ou des valeurs trop grandes :

1,42 ; 1,415 ; 1,4143 ; 1,41422 ; etc.

Dans le premier cas, on trouvera que le triangle est riemannien ; dans le second qu'il est lobatchefskien [1]). Mais quel que soit le degré d'exactitude des mesures effectuées, jamais on ne trouvera $\sqrt{2}$ pour le rapport cherché : il est donc impossible de prouver expérimentalement qu'un triangle rectangle isoscèle est euclidien.

Cette conclusion s'étend à une figure quelconque composée d'un certain nombre de points dont on mesure les distances. Ces distances, n'étant jamais connues que d'une manière approximative, peuvent bien vérifier à peu près la relation (E') ; mais, on peut toujours supposer aux paramètres r et l qui entrent dans (R') et (L') une valeur assez grande par rapport aux distances mesurées pour que celles-ci vérifient avec une exactitude tout aussi grande les relations (R') et (L'). *Il est donc impossible de prouver que la géométrie physique est euclidienne, même si elle l'est réellement.*

En fait, dans la partie de l'univers accessible directement ou indirectement à nos mesures, la géométrie physique est

[1]) Pour démontrer ces assertions, on prouve, par l'analyse infinitésimale, le théorème suivant : Un triangle rectangle isoscèle est riemannien, euclidien ou lobatchefskien suivant que le rapport de l'hypoténuse au côté est inférieur égal ou supérieur à $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

approximativement euclidienne. Toutes les distances mesurées vérifient avec une approximation très grande la relation (E') ou des relations non euclidiennes (R'), (L') qui n'en diffèrent pas pratiquement.

Notre imagination est aussi très approximativement euclidienne, si l'on peut ainsi dire. Mais certaines illusions d'optique que les mesures et la raison corrigent aisément paraissent au premier abord d'accord avec les géométries non euclidiennes: 1° Deux longues allées parallèles d'arbres nous donnent l'image de deux droites lobatchefskiennes asymptotiques. 2° Si nous suivons du regard dans l'azur du ciel deux directions émanant d'un même point de l'horizon, nous aboutissons, à la fin, en un point opposé de l'horizon, comme si nous avions suivi deux droites riemanniennes [1]).

XII

LA MÉTAGÉOMÉTRIE ET LE KANTISME.

Euclide a défini, il y a vingt deux siècles, dans ses *Éléments*, les notions fondamentales de la géométrie : le point, la droite, le plan, etc., avec une précision suffisante pour qu'il ait pu en déduire logiquement la partie générale de la science de l'espace. De plus, dans ses postulats 5 et 6, il a, en réalité, particularisé la définition de la droite de manière à pouvoir démontrer les principes spéciaux de cette partie de la géomé-

[1]) " Reid a montré que si l'homme était réduit au simple sens de la vue, en pouvant dès lors connaître que l'étendue superficielle à deux dimensions, et prenant pour des lignes droites ce qui serait réellement des arcs de grands cercles tracés sur une surface sphérique dont le centre serait dans son œil, les triangles qu'ils considéreraient comme rectilignes pourraient avoir deux angles ou même leurs trois angles droits ou obtus, et que la géométrie d'un tel homme serait toute différente de la nôtre, deux de ces lignes qu'il prendrait pour droites se rencontrant, par exemple, toujours en deux points, en sorte que la notion de deux droites parallèles serait contradictoire pour lui „. AMPÈRE, *Essai sur la philosophie des sciences.* Première partie (2e éd. p. 64).

trie générale qui porte maintenant le nom de géométrie euclidienne.

Lobatchefsky, Riemann et leurs continuateurs ont créé de même les deux autres branches de la géométrie générale : la géométrie lobatchefskienne et la géométrie riemannienne.

Les trois branches de la métagéométrie sont des sciences rationnelles, composées de propositions qui se démontrent sans recourir à l'expérience, par simple analyse, rapprochement et comparaison des concepts fondamentaux. Ces propositions sont donc des *jugements analytiques*, pourvu que l'on donne à ce terme le sens traditionnel de *propositio per se nota*, et non le sens kantien de *jugements identiques* ou *quasi identiques*.

Du caractère analytique des propositions géométriques, résulte la valeur apodictique des trois branches de la métagéométrie et la possibilité de se servir de chacune d'elles, pour démontrer des propositions d'analyse pure. Ainsi, au moyen de la géométrie euclidienne, on a pu établir la trigonométrie générale, c'est-à-dire la théorie des fonctions *sinus* et *cosinus*, que l'on peut aussi exposer directement sans recourir aucunement à la géométrie. La théorie des *sinus* et *cosinus* a pu être ensuite utilisée pour étudier la géométrie lobatchefskienne et la géométrie riemannienne, de manière qu'en apparence, mais en apparence seulement, celles-ci semblent s'appuyer nécessairement sur la géométrie euclidienne.

La géométrie physique, au contraire, est une science d'observation, où l'on recourt à la géométrie rationnelle comme auxiliaire. C'est l'observation qui permet de conclure que les distances physiques, dans la nature, vérifient très approximativement la relation (E'), ou les relations (L'), (R'), r et l étant extrêmement grands ; autrement dit, c'est l'observation qui nous apprend que la géométrie physique est une géométrie à très peu près euclidienne, et à trois dimensions. Au point de vue logique, cette dernière proposition est donc un *jugement*

empirique, ou si l'on veut employer une autre terminologie un *jugement synthétique a posteriori*.

Dans la première édition (1781) de la *Kritik der reinen Vernunft*, puis, sous une forme plus développée, dans la seconde (1787), Kant a émis sur la géométrie et l'espace des vues qui sont en complète opposition avec ce qui précède.

Comme on l'a remarqué (MILHAUD, *Kant comme savant*, dans la livraison de mai 1895 de la *Revue philosophique* de Ribot, pp. 482-510), Kant n'avait pas de connaissances scientifiques sérieuses. « Il a touché à de nombreuses questions, mais en philosophe plutôt qu'en savant et en philosophe préoccupé surtout, à la manière antique, d'assurer les fondements *à priori* de la science. Après Newton, après les savants du XVIII^e^ siècle, Kant ne semble pas de son temps. Ses vues parfois ingénieuses ont un caractère trop vague. On sent qu'elles ne se forment ni au contact des faits, ni même au contact des connaissances mathématiques de l'époque. Elles restent pénétrées de quelque naïveté, malgré les apparences de la forme savante et elles font plus songer à certaines théories d'Aristote ou même des Ioniens qu'à Euler ou à Newton (pp. 502-503). »

Mais Kant avait appris et enseigné les mathématiques élémentaires et il avait été frappé du caractère universel et nécessaire de leurs propositions. Sa profonde conviction de leur certitude apodictique d'une part, l'impossibilité où il se trouvait, d'autre part, de les ramener à des jugements analytiques, à cause de la manière étroite dont il concevait ceux-ci, le conduisirent à faire des mathématiques (puis de la métaphysique elle-même) une science absolument subjective. Les propositions fondamentales des mathématiques et, en particulier, de la géométrie, dénuées de preuves proprement dites, par hypothèse, mais auxquelles la raison adhère nécessairement, sont appelées des jugements synthétiques *à priori* pour les distinguer des jugements synthétiques *à posteriori* ou propositions empiriques, dans lesquelles l'attribut exprime

quelque qualité contingente du sujet [1]). L'espace, pour Kant, est une représentation nécessaire *à priori*, qui sert de fondement à toutes les intuitions extérieures et est la cause de la certitude apodictique de tous les principes géométriques.

La métagéométrie est en contradiction radicale avec cette conception de l'espace comme représentation nécessaire *à priori*. En effet, la métagéométrie implique l'égale possibilité d'un nombre indéfini de géométries diverses, la géométrie euclidienne d'abord, puis toutes les variétés de géométries non euclidiennes correspondant à toutes les valeurs imaginables des paramètres r et l. Comment la conception kantienne de l'espace pourrait-elle donner à la fois à l'entendement toutes les géométries diverses comme représentation nécessaire *à priori* ? C'est manifestement impossible.

La métagéométrie n'est pas moins en opposition avec les vues que Kant avait sur l'espace jusque vers 1769, quand il admettait encore, avec divers philosophes, que l'espace était une réalité extérieure, existant indépendamment des objets. Dans ce système, comme aussi dans celui où la géométrie

[1]) Kant ne cite explicitement qu'un très petit nombre de ces prétendus jugements synthétiques *à priori* relatifs à la géométrie : Dans un triangle, un côté est plus petit que la somme des deux autres ; l'espace n'a que trois dimensions ; deux droites ne peuvent enclore un espace, etc. La première de ces propositions est, en réalité, un jugement analytique appartenant à la géométrie rationnelle, dont nous avons esquissé la démonstration, au § V, d'après Euclide ; la seconde appartient à la géométrie physique et est un jugement synthétique *à posteriori* ; la troisième est le postulat 6 d'Euclide, qui équivaut à une définition comme nous l'avons dit au § IX. Sur ce postulat 6, Kant parle d'abord avec l'exactitude d'un géomètre riemannien : " *So ist in dem Begriffe einer Figur, die in zwei geraden Linien eingeschlossen ist, kein Widerspruch* " (*Trans. Anal.* II. 3. n° 4) ; puis son système l'entraîne à affirmer exactement le contraire. En physique, Kant cite comme jugements synthétiques *à priori* la loi de la constance de la masse et celle de l'égalité de l'action et de la réaction, deux principes dont nous doutons fort qu'il connaît le sens précis et qui sont des jugements synthétiques *à posteriori*. — Nous pensons que tous les jugements synthétiques *a priori* de Kant se classent dans l'une ou l'autre de ces catégories : des postulats qui sont des définitions déguisées ; des jugements analytiques qu'il n'a pas bien su analyser ; des jugements synthétiques *à posteriori* dont il n'a pas reconnu la nature empirique.

serait une science purement empirique, l'existence de trois systèmes de géométrie rationnelle est aussi inconcevable que dans le système de la *Kritik der reinen Vernunft*.

Enfin, la métagéométrie permet encore de répondre par un argument *ad hominem* à la première antinomie de la raison pure : *Le monde est à la fois fini et infini dans l'espace*. Si même le raisonnement de Kant était rigoureux, si la contradiction qu'il signale ne venait pas uniquement d'une confusion entre l'espace réel et l'espace idéal, il suffirait, pour lever toute difficulté, de remarquer que Kant suppose implicitement dans son exposé que le monde est euclidien. Or, s'il était riemannien, l'antinomie n'a plus de sens : en droit et en fait, le monde serait fini.

Quand on réfléchit à la suite des idées qui ont conduit Kant à son système, on arrive à cette conclusion développée par M. Milhaud dans l'article cité plus haut: « Le point de départ de la critique de la raison pure est la constatation toute naïve du caractère nécessaire et universel des jugements mathématiques » (p. 509). Le subjectivisme métaphysique de Kant semble être sorti de son subjectivisme mathématique ; il y a en tête de la *Kritik der reinen Vernunft* l'affirmation d'une espèce d'*impératif géométrique* pour employer une heureuse expression de M. Lechalas.

La métagéométrie, en montrant l'inanité des idées de Kant sur l'espace, a donc ruiné, par la base, la métaphysique du criticisme comme nous le disions dans l'introduction à cet opuscule [1]).

[1]) " Hat nun Helmholtz Recht und is das Kant'sche Fundament falsch, so fällt damit auch der Inhalt und die Methode welche hieraus gewachsen ist ; dann ist ferner die jahrhundertlange Richtung der deutschen Philosophie eine verfehlte „ R. Krause. *Kant und Helmholtz über den Ursprung und die Bedeutung der Raumsanschauung und der geometrischen Axiome* (Lahr, 1878; d'après Hoppe, Archives de Grunert, Litt. Ber. 249, pp. 7-11, tome 63, 1878). Helmholtz est cité ici comme le représentant de l'origine empirique des postulats.

APPENDICE.

LA GÉOMÉTRIE COMME PHYSIQUE MATHÉMATIQUE DES DISTANCES.

Leibniz a défini la ligne droite de la manière suivante : *La droite est le lieu des points immobiles d'un corps qui se meut, deux de ses points étant fixes* [1].

Cette définition de la droite, sans être modifiée essentiellement, peut être mise sous une forme plus maniable, si l'on y introduit la notion de distance ou d'intervalle de deux points, en entendant par là un nombre qui caractérise ce couple de points. L'origine expérimentale de cette notion de distance est connue de tout le monde : certains solides nous paraissent invariables et nous disons que deux de leurs points sont à telle ou telle distance, quand nous pouvons porter entre ces points une règle divisée supposée elle-même invariable, ou les parties de cette règle, un nombre minimum de fois ; ce nombre est la mesure de la distance ou simplement la distance des deux points.

Cela étant posé et en regardant la notion de distance comme une notion première, Cauchy a défini la ligne droite de la manière suivante : *La ligne droite AB est une ligne telle que chacun de ses points est distant de A et de B, comme ne l'est aucun des points de l'espace.* Tout point H extérieur à la droite est tel, au contraire, qu'il y en a au moins un autre K qui est distant de A et de B comme l'est H.

[1]) *Sit corpus aliquod, cujus duo puncta sint immota et fixa, ipsum autem corpus nihilominus moveatur, tunc omnia puncta corporis quiescentia incident in rectam quae per duo puncta fixa transit.* Œuvres math. de Leibniz, éd. Gerhardt, V, p. 137 (Citation empruntée à CANTOR, *Geschichte der Mathematik*, III, c. 83, p. 32).

Cette définition est équivalente à celle de Leibniz : en effet, quand on fait tourner un corps contenant à la fois les points A, B, M, H autour des points A et B supposés fixes, il est clair que si M est sur la droite AB, il reste immobile par définition, tandis que H pourra venir prendre une autre position K.

La définition de la droite de Cauchy, bien qu'identique au fond à celle de Leibniz, a sur celle-ci l'avantage de conduire naturellement à une définition analogue pour le plan. Pour Cauchy, *un plan* ABC *est une surface telle que chacun de ces points est distant des points* A, B, C, *non supposés en ligne droite, comme ne l'est aucun autre point de l'espace.* Tout point H extérieur au plan est tel, au contraire, qu'il y en a au moins un autre K qui est distant de A, de B et de C, comme l'est H.

Considérons trois points A,B,M situés sur une droite et un point H extérieur. Si, A et B étant fixes, on fait tourner un corps dont A,B,M,H font partie, de manière à amener, par exemple, H en K, le point M, d'après la définition de Leibniz, restera immobile. Par suite, on peut dire que le corps tourne autour de AM, ou de BM, au lieu de dire qu'il tourne autour de AB ; autrement dit, la droite AB est identique à la droite AM, ou à la droite BM, si M est sur AB.

On peut exprimer la même chose, en introduisant dans ce qui précède la notion de distance, c'est-à-dire en recourant à la définition de la droite due à Cauchy, de la manière suivante : *admettons que pour tout point* X, *deux des distances* XA, XB, XM *aux points* A, B, M *d'une droite, déterminent la troisième* (Proposition A). Si X est un point H extérieur à la droite AB, il existera un point K tel que KA = HA, KB = HB, et, par suite, KM = HM. Mais les relations KA = HA, KM = HM expriment que H et K sont extérieurs à la droite AM ; de même KB = HB, KM = HM expriment que H et K sont extérieurs à la droite BM. Tout point extérieur à AB est donc extérieur à AM et à BM ; la réciproque étant vraie d'ailleurs, AB est identique à AM et à BM.

Les considérations précédentes s'étendent au plan. Soit un plan déterminé par trois points A, B, C ; M un quatrième point de ce plan. Admettons que, *pour tout point* X, *trois des distances* XA, XB, XC, XM *déterminent la quatrième* (Proposition B). Si X est un point H extérieur au plan ABC, il existera, d'après la définition du plan due à Cauchy, un autre point K, tel que l'on ait KA = HA, KB = HB, KC = HC, et, par suite, KM = HM. Cette dernière relation, avec deux des précédentes, exprime que H et K sont extérieurs, soit au plan ABM, soit au plan BCM, soit au plan CAM. La réciproque étant vraie, ou en conclut que les plans ABC, ABM, BCM, CAM sont identiques.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant : *Une droite* MN *est contenue toute entière dans le plan* ABC *qui contient les points* M *et* N (Proposition C). En effet, d'après ce que l'on vient de voir, le plan ABC est identique au plan ABM, qui est lui-même identique au plan AMN. Soit H un point extérieur au plan ABC ou AMN. Il y aura, d'après la définition du plan de Cauchy, un second point K, tel que l'on ait KA = HA, KM = HM, KN = HN. Or les deux dernières égalités expriment que K et H sont extérieurs à la droite MN. Tout point extérieur au plan ABC étant extérieur à la droite MN, celle-ci ne peut avoir aucun de ses points en dehors du plan, elle y est donc contenue toute entière [1]).

La proposition C est donc une conséquence des propositions A et B. Quelle est la nature de celle-ci ? Sont-elles une consé-

[1]) Les définitions données par Euclide pour la droite et le plan sont, croyons-nous, le résumé de considérations analogues à celles que nous venons d'exposer ; au moins ces définitions, si obscures au premier abord, semblent susceptibles d'une interprétation littérale d'accord avec ce qui précède. — Gauss, dès 1829, dans une lettre du 27 janvier, adressée à Bessel, a critiqué avec raison la définition du plan donnée par Legendre : « La définition du plan, dit-il, comme surface qui contient toute droite qui y a deux de ses points, contient plus de conditions qu'il n'en faut pour déterminer cette surface. Elle implique donc un théorème qui doit être préalablement établi. »

quence de la définition de la droite et du plan dues à Cauchy ; ou bien sont-elles des postulats à ajouter à ces définitions, pour caractériser complètement la droite et le plan ; ou enfin, ces propositions sont-elles incompatibles avec ces deux définitions ?

On peut répondre partiellement à ces questions de la manière suivante : En admettant la proposition C, ou les propositions A et B, d'où l'on peut la déduire, on trouve, comme nous l'avons dit au § X, dans chacun des trois systèmes de géométrie, une relation entre les dix distances de cinq points quelconques. On peut obtenir de même une relation entre les six distances de quatre points d'un plan, et une relation entre les trois distances de trois points d'une droite.

Réciproquement, de ces relations, qui ne présentent rien de contradictoire, on déduit aisément par l'analyse, soit la proposition C, soit les propositions A et B ; ces diverses propositions sont donc compatibles entre elles et la troisième hypothèse faite plus haut est ainsi écartée ; autrement dit, les propositions A et B sont des conséquences des définitions de Cauchy, ou elles en sont le complément. On ne peut d'ailleurs, de cette manière, savoir quel est celui de ces deux derniers cas qui se présente.

Mais on peut aller plus loin. Une fois qu'on en est arrivé à se servir, comme nous venons de le faire, des relations qui caractérisent respectivement l'espace à trois dimensions, le plan ou espace à deux dimensions, la droite ou espace à une seule dimension, on est conduit logiquement à admettre complètement le mode d'exposition de M. De Tilly et à regarder la géométrie comme la *physique mathématique des distances*. Dans ce mode d'exposition, la distance de deux points, définie comme nous l'avons fait plus haut, devient la seule notion fondamentale irréductible de la géométrie. On en déduit la notion des figures égales, si difficile à préciser d'une autre manière ; puis, par l'intermédiaire des relations

qui caractérisent la droite, le plan et l'espace à trois dimensions, la définition des longueurs, des aires et des volumes ; enfin, la géométrie toute entière, sans recourir à aucun postulat, mais sous trois formes différentes, euclidienne, lobatchefskienne et riemannienne.

L'exposé élémentaire de la géométrie générale, tel que nous l'avons esquissé d'après Euclide, Lobatchefsky, Riemann et leurs continuateurs, dans les §§ III à X, conduit aux relations caractéristiques entre les distances de trois points d'une droite, de quatre points d'un plan, de cinq points d'un espace à trois dimensions. Réciproquement, l'exposé analytique de M. De Tilly, qui part de la notion de distance et des relations dont il vient d'être question, permet de retrouver tous les résultats de l'exposé élémentaire, et prouve, par suite, que les définitions, les postulats et les axiomes qui sont le fondement de cet exposé élémentaire sont compatibles les uns avec les autres. Réunis, l'exposé élémentaire et l'exposé analytique, constituent donc un système complet de géométrie générale, absolument inattaquable au point de vue de la rigueur.

TABLE DES MATIÈRES.

I. Préliminaires 1
II. Esquisse historique 2
III. Les définitions et les quatre premiers postulats 8
IV. Le cinquième et le sixième postulat. Les trois géométries . . 10
V. Vingt-six propositions élémentaires communes aux trois géométries 12
VI. Propositions communes à la géométrie euclidienne et à la géométrie lobatchefskienne 15
VII. Propositions caractéristiques de la géométrie euclidienne et de la géométrie lobatchefskienne 20
VIII. Propositions caractéristiques de la géométrie riemannienne . . 23
IX. Résumé. Vraie nature des postulats 5 et 6 28
X. Esquisse des principales propositions de la Métagéométrie. Indémontrabilité des postulats 30
XI. La géométrie physique 34
XII. La Métagéométrie et le kantisme 37
APPENDICE. La géométrie comme physique mathématique des distances 42

Extrait de la *Revue Néo-Scolastique*,
mai et août 1896, t. III, pp. 143-170, 242-259.

Louvain. — Typ. Polleunis et Ceuterick

MATHESIS

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences,
Professeur ordinaire à l'Université de Gand,
Membre de l'Académie royale
de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences,
Professeur ordinaire à l'Université de Liége,
Correspondant de l'Académie royale
de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis!
PH. BRETON.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME VII. — ANNÉE 1897.

(TOME XVII DE LA COLLECTION.)

GAND
D. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
47, RUE DES CHAMPS, 47

PARIS
GAUTHIER-VILLARS&FILS
IMPRIMEURS-LIBRAIRES
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1897

ABRÉVIATIONS.

B. B. Bulletins de l'Académie royale de Belgique.

C. R. Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.

N. A. M. Nouvelles Annales de Mathématiques (depuis 1842).

C. G. Q. Correspondance physique et mathématique, fondée en 1825 par GARNIER et QUETELET, continuée par QUETELET.

N. C. M. Nouvelle Correspondance Mathématique (1874-1880).

J. M. E. (ou J. M. S). Journal de Mathématiques élémentaires (ou Journal de Mathématiques spéciales), fondé en 1877 par BOURGET, continué par G. DE LONGCHAMPS.

I. M. Intermédiaire des Mathématiciens, fondé en 1894 par MM. LAISANT et LEMOINE.

A. F. Association française pour l'avancement des sciences.

Crelle, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par CRELLE en 1826, continué successivement par BORCHARDT, KRONECKER et WEIERSTRASS, par KRONECKER et par FUCHS (en allemand surtout).

Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par LIOUVILLE en 1836, continué d'abord par RESAL, puis par JORDAN.

(2), III, 327-333 signifie : Deuxième série, tome troisième, pages 327 à 333.

MATHESIS

UNE COURBE OUBLIÉE,

La conchoïde de R. de Sluse;

par M. GINO LORIA, professeur à la Faculté des sciences de Gênes (Italie).

Parmi les courbes du troisième ordre qui passent par les points circulaires à l'infini, il y en a une ayant un axe de symétrie qui a échappé à la généralité des géomètres jusqu'au moment où l'on publia la correspondance entre R. de Sluse et Ch. Huygens (*). C'est celle qu'on appelle *conchoïde slusienne* et que l'inventeur construisait comme il suit : « Étant donnés un point O, une droite r et une constante k^2, on tire par O une droite arbitraire qui coupe r en M et on porte sur OM à partir de M et dans la direction OM un segment MP tel qu'on ait $OM \cdot MP = k^2$; le lieu des points P est une conchoïde slusienne (**) ».

Si l'on prend comme pôle O et comme axe polaire la perpendiculaire menée par O sur r, on aura :

$$OP = \rho, \quad OM = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad MP = \rho - \frac{a}{\cos\varphi};$$

par conséquent, l'équation polaire de la courbe est

$$a\,(\rho\cos\varphi - a) = k^2\cos^2\varphi,$$

(*) C. Le Paige, *Correspondance de René-François de Sluse* etc. (Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche, T. XVII, 1884, p. 427-554 et 603-726).

(**) Voir la lettre de Sluse à Huygens du 6 octobre 1622, publiée T. IV, p. 246 des *Œuvres complètes de Ch. Huygens* (La Haye, 1891).

et son équation cartésienne :

$$a(x-a)(x^2+y^2)=k^2x^2. \tag{1}$$

Si l'on porte le segment $\frac{k^2}{OM}$ à partir de M dans la direction MO en MP', le lieu des points P' aura pour équation

$$a(x-a)(x^2+y^2)=-k^2x^2; \tag{1'}$$

il n'a plus, comme la courbe (1), la forme d'une conque. Toutefois, comme l'équation (1') peut se déduire de (1) en changeant la constante positive k^2 dans la négative $-k^2$, il est naturel de considérer (1) comme l'équation générale des conchoïdes slusiennes lorsque k est une constante réelle ou purement imaginaire.

Pour obtenir une construction de la courbe plus pratique que celle qui a été proposée par R. de Sluse, considérons le lieu des points N tels qu'on ait

$$OM.ON=k^2,$$

O, M, N étant trois points d'une même droite. Ce lieu est le cercle Γ qui a pour centre le point $C\left(\frac{k^2}{2a},0\right)$ et qui passe par l'origine; sur chaque rayon vecteur partant de O, l'on a

$$ON=MP=PM'.$$

Donc : « étant donnés un cercle Γ, un point O sur son contour et une droite r parallèle à la tangente au point O, on tire par O une droite arbitraire qui coupe la droite en M et le cercle en N; sur cette droite on porte à partir de M toujours du côté de O, ou bien du côté opposé MP', MP' = ON : le lieu des points résultants est une conchoïde slusienne. »

Dans cette courbe, r est une asymptote d'inflexion, tandis que O est un point double; les tangentes correspondantes étant représentées par l'équation $(a^2+k^2)x^2+y^2=0$, le point O est toujours un point isolé si $k^2>0$; dans le cas où $k^2<0$, il est un nœud, un point de rebroussement ou un point isolé suivant qu'on a k^2 supérieur égal ou inférieur $-a^2$.

Si l'on combine l'équation (1) avec $y=\lambda x$, on arrive à représenter la conchoïde par les deux équations suivantes :

$$x=a+\frac{k^2}{a(1+\lambda^2)},\quad y=a\lambda+\frac{k^2\lambda}{a(1+\lambda^2)}. \tag{2}$$

Il s'ensuit que la condition pour que les trois points de la courbe qui correspondent à $\lambda = \alpha, \beta, \gamma$ soient sur une même droite est :

$$\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = \frac{a^2 + k^2}{a^2}, \tag{3}$$

et que les deux points d'inflexion que la courbe a à distance finie (*) correspondent aux valeurs de λ qui sont racines de l'équation

$$\omega^2 = \frac{a^2 + k^2}{3a^2};$$

ces points — qui sont réels seulement si $a^2 + k^2 > 0$, c'est-à-dire pour les courbes douées d'un point isolé — ont pour coordonnées

$$x = \frac{4a(a^2 + k^2)}{4a^2 + k^2}, \quad y = \pm \frac{4(a^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}{(4a^2 + k^2)\sqrt{3}}. \tag{4}$$

Or, si l'on élimine k^2 entre ces deux relations, on obtient l'équation

$$x(x^2 + y^2) = 4ay^2 \tag{5}$$

qui représente le lieu de tous les points d'inflexion des conchoïdes qui ont en commun le point double et l'asymptote d'inflexion; ce lieu étant évidemment une cissoïde de Dioclès, on peut conclure le remarquable théorème que R. de Sluse a énoncé dans la première de ses lettres que nous avons citées.

Des équations (2) l'on tire, par un calcul facile, la condition suivante pour que quatre points qui ont pour paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ soient sur un cercle :

$$a^2(\beta\gamma\delta + \alpha\gamma\delta + \alpha\beta\delta + \alpha\beta\gamma) - (a^2 + k^2)(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 0 \tag{6}$$

d'où l'on peut aisément tirer plusieurs conséquences. On trouve ainsi que le cercle osculateur à la courbe au point λ, la coupe en un point λ' déterminé par l'équation

$$a^2(\lambda^3 + 3\lambda^2\lambda') - (a^2 + k^2)(3\lambda + \lambda') = 0; \tag{7}$$

inversement, par un point quelconque de la courbe passent trois cercles osculateurs, *les trois points d'osculation* se trouvent sur un même cercle avec le point d'où l'on est parti. Semblablement : à chaque point de la

(*) Ces points ont été trouvés par Huygens à ce que dit de Sluse dans sa lettre du 12 janvier 1663 (*Œuvres de Huygens*, vol. cité, p. 292).

courbe correspondent deux cercles bitangents : l'un a son centre sur l'axe de symétrie (c'est ce qu'on pouvait prévoir), l'autre a avec la courbe une corde de contact dont l'enveloppe est de la quatrième classe, etc., etc.

Cela suffit, selon nous, pour prouver *que la conchoïde slusienne ne mérite pas l'oubli* dans lequel on l'a laissée.

Gênes, 5 décembre 1896.

NOTE. La conchoïde slusienne est une podaire de parabole, le pôle étant sur l'axe. Elle admet une génération analogue à celle de la cissoïde, la tangente au cercle directeur étant remplacée par une parallèle à cette droite. On peut l'engendrer *mécaniquement* au moyen d'un inverseur.

Nous pourrons revenir sur cette courbe. (J. N).

DÉVELOPPEMENT DE $\sqrt{x}$ EN FRACTION CONTINUE

par M. A. BOUTIN.

Quand on réduit $\sqrt{x}$ (x, entier) en fraction continue, les quotients incomplets forment une suite périodique; le premier quotient a est $\sqrt{x}$ à l'unité près par défaut, et ne se reproduit pas; la période commence au second terme et se termine par $2a$. On a

$$\sqrt{x} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cdots + \cfrac{1}{2a} + \cfrac{1}{b + \cdots}}}$$

Nous poserons, pour simplifier l'écriture :

$$\sqrt{x} = (a, b, c, \ldots, 2a).$$

Le tableau suivant donne, pour les 200 premiers nombres, a et la première période des quotients incomplets.

$\sqrt{2} = (1, 2)$; $\sqrt{3} = (1, 1, 2)$; $\sqrt{5} = (2, 4)$; $\sqrt{6} = (2, 2, 4)$;
$\sqrt{7} = (2, 1, 1, 1, 4)$; $\sqrt{8} = (2, 1, 4)$; $\sqrt{10} = (3, 6)$;
$\sqrt{11} = (3, 3, 6)$; $\sqrt{12} = (3, 2, 6)$; $\sqrt{13} = (3, 1, 1, 1, 1, 6)$;
$\sqrt{14} = (3, 1, 2, 1, 6)$; $\sqrt{15} = (3, 1, 6)$; $\sqrt{17} = (4, 8)$;
$\sqrt{18} = (4, 4, 8)$; $\sqrt{19} = (4, 2, 1, 3, 1, 2, 8)$; $\sqrt{20} = (4, 2, 8)$;
$\sqrt{21} = (4, 1, 1, 2, 1, 1, 8)$; $\sqrt{22} = (4, 1, 2, 4, 2, 1, 8)$;
$\sqrt{23} = (4, 1, 3, 1, 8)$; $\sqrt{24} = (4, 1, 8)$; $\sqrt{26} = (5, 10)$;
$\sqrt{27} = (5, 5, 10)$; $\sqrt{29} = (5, 2, 1, 1, 2, 10)$;

$\sqrt{29} = (5, 2, 1, 1, 2, 10)$; $\sqrt{30} = (5, 2, 10)$;
$\sqrt{31} = (5, 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10)$; $\sqrt{32} = (5, 1, 1, 1, 10)$:
$\sqrt{33} = (5, 1, 2, 1, 10)$; $\sqrt{34} = (5, 1, 4, 1, 10)$;
$\sqrt{35} = (5, 1, 10)$; $\sqrt{37} = (6, 12)$; $\sqrt{38} = (6, 6, 12)$;
$\sqrt{39} = (6, 4, 12)$; $\sqrt{40} = (6, 3, 12)$; $\sqrt{41} = (6, 2, 2, 12)$;
$\sqrt{42} = (6, 2, 12)$; $\sqrt{43} = (6, 1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12)$;
$\sqrt{44} = (6, 1, 1. 1, 2, 1, 1, 1, 12)$; $\sqrt{45} = (6, 1, 2, 2, 2, 1, 12)$;
$\sqrt{46} = (6, 1, 3, 1, 1, 2, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 12)$; $\sqrt{47} = (6, 1, 5, 1, 12)$;
$\sqrt{48} = (6, 1, 12)$; $\sqrt{50} = (7, 14)$; $\sqrt{51} = (7, 7, 14)$;
$\sqrt{52} = (7, 4, 1, 2, 4, 14)$;
$\sqrt{53} = (7, 3, 1, 1, 3, 14)$; $\sqrt{54} = (7, 2, 1, 6, 1, 2, 14)$;
$\sqrt{55} = (7, 2, 2, 2, 14)$; $\sqrt{56} = (7, 2, 14)$;
$\sqrt{57} = (7, 1, 1, 4, 1, 1, 14)$; $\sqrt{58} = (7, 1, 1, 1. 1, 1, 1, 14)$;
$\sqrt{59} = (7, 1, 2, 7, 2, 1, 14)$; $\sqrt{60} = (7, 1, 2, 1, 14)$;
$\sqrt{61} = (7, 1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14)$; $\sqrt{62} = (7, 1, 6, 1, 14)$;
$\sqrt{63} = (7, 1, 14)$; $\sqrt{65} = (8, 16)$; $\sqrt{66} = (8, 8, 16)$;
$\sqrt{67} = (8, 5, 2, 1. 1, 7, 1, 1, 2, 5, 16)$; $\sqrt{68} = (8, 4, 16)$;
$\sqrt{69} = (8, 3, 3, 1, 4, 1, 3, 3, 16)$; $\sqrt{70} = (8, 2, 1, 2, 1, 2, 16)$;
$\sqrt{71} = (8, 2, 2, 1, 7, 1, 2, 2, 16)$; $\sqrt{72} = (8, 2, 16)$;
$\sqrt{73} = (8, 1, 1, 5, 5, 1, 1, 16)$; $\sqrt{74} = (8, 1, 1, 1, 1, 1, 16)$;
$\sqrt{75} = (8, 1, 1, 1, 16)$; $\sqrt{76} = (8, 1, 2, 1, 1, 5, 4, 5, 1, 1, 2, 1, 16)$;
$\sqrt{77} = (8, 1, 3, 2, 3, 1, 16)$; $\sqrt{78} = (8, 1, 4, 1, 16)$;
$\sqrt{79} = (8, 1, 7, 1, 16)$; $\sqrt{80} = (8, 1, 16)$; $\sqrt{82} = (9, 18)$;
$\sqrt{83} = (9, 9, 18)$; $\sqrt{84} = (9, 6, 18)$; $\sqrt{85} = (9, 4, 1, 1, 4, 18)$;
$\sqrt{86} = (9, 3, 1, 1, 1, 8, 1, 1, 1, 3, 18)$; $\sqrt{87} = (9, 3, 18)$;
$\sqrt{88} = (9, 2, 1, 1, 1, 2, 18)$; $\sqrt{89} = (9, 2, 3, 3, 2, 18)$;
$\sqrt{90} = (9, 2, 18)$; $\sqrt{91} = (9, 1, 1, 5, 1, 5, 1, 1, 18)$;
$\sqrt{92} = (9, 1, 1, 2, 4, 2, 1, 1, 18)$;
$\sqrt{93} = (9, 1, 1, 1, 4, 6, 4, 1, 1, 1, 18)$;
$\sqrt{94} = (9, 1, 2, 3, 1, 1, 5, 1, 8, 1, 5, 1, 1, 3, 2, 1, 18)$;
$\sqrt{95} = (9, 1, 2, 1, 18)$; $\sqrt{96} = (9, 1, 3, 1, 18)$;
$\sqrt{97} = (9, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 18)$;
$\sqrt{98} = (9, 1, 8, 1, 18)$; $\sqrt{99} = (9, 1, 18)$; $\sqrt{101} = (10, 20)$;
$\sqrt{102} = (10, 10, 20)$; $\sqrt{103} = (10, 6, 1, 2, 1, 1, 9, 1, 1, 2, 1, 6, 20)$;
$\sqrt{104} = (10. 5, 20)$; $\sqrt{105} = (10, 4, 20)$;
$\sqrt{106} = (10, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 20)$;
$\sqrt{107} = (10, 2, 1, 9, 1, 2, 20)$; $\sqrt{108} = (10, 2, 1, 1, 4, 1. 1, 2, 20)$;

$\sqrt{109} = (10, 2, 3, 1, 2, 4, 1, 6, 6, 1, 4, 2, 1, 3, 2, 20)$;
$\sqrt{110} = (10, 2, 20)$; $\sqrt{111} = (10, 1, 1, 6, 1, 1, 20)$;
$\sqrt{112} = (10, 1, 1, 2, 1, 1, 20)$; $\sqrt{113} = (10, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 20)$;
$\sqrt{114} = (10, 1, 2, 10, 2, 1, 20)$;
$\sqrt{115} = (10, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 20)$;
$\sqrt{116} = (10, 1, 3, 2, 1, 4, 1, 2, 3, 1, 20)$;
$\sqrt{117} = (10, 1, 4, 2, 4, 1, 20)$;
$\sqrt{118} = (10, 1, 6, 3, 2, 10, 2, 3, 6, 1, 20)$;
$\sqrt{119} = (10, 1, 9, 1, 20)$; $\sqrt{120} = (10, 1, 20)$;
$\sqrt{121} = (11, 22)$; $\sqrt{122} = (11, 11, 22)$;
$\sqrt{124} = (11, 7, 2, 1, 1, 1, 3, 1, 4, 1, 3, 1, 1, 1, 2, 7, 22)$;
$\sqrt{125} = (11, 5, 1, 1, 5, 22)$; $\sqrt{126} = (11, 4, 2, 4, 22)$;
$\sqrt{127} = (11, 3, 1, 2, 2, 7, 11, 7, 2, 2, 1, 3, 22)$;
$\sqrt{128} = (11, 3, 5, 3, 22)$; $\sqrt{129} = (11, 2, 1, 3, 1, 6, 1, 3, 1, 2, 22)$;
$\sqrt{130} = (11, 2, 2, 22)$; $\sqrt{131} = (11, 2, 4, 11, 4, 2, 22)$;
$\sqrt{132} = (11, 2, 22)$;
$\sqrt{133} = (11, 1, 1, 7, 5, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 5, 7, 1, 1, 22)$;
$\sqrt{134} = (11, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 10, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 22)$;
$\sqrt{135} = (11, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 22)$; $\sqrt{136} = (11, 1, 1, 1, 22)$;
$\sqrt{137} = (11, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 22)$; $\sqrt{138} = (11, 1, 2, 1, 22)$;
$\sqrt{139} = (11, 1, 3, 1, 3, 7, 1, 1, 2, 11, 2, 1, 1, 7, 3, 1, 3, 1, 22)$;
$\sqrt{140} = (11, 1, 4, 1, 22)$; $\sqrt{141} = (11, 1, 6, 1, 22)$;
$\sqrt{142} = (11, 1, 10, 1, 22)$; $\sqrt{143} = (11, 1, 22)$;
$\sqrt{145} = (12, 24)$; $\sqrt{146} = (12, 12, 24)$; $\sqrt{147} = (12, 8, 24)$;
$\sqrt{148} = (12, 6, 24)$; $\sqrt{149} = (12, 4, 1, 5, 3, 3, 5, 1, 4, 24)$;
$\sqrt{150} = (12, 4, 24)$;
$\sqrt{151} = (12, 3, 2, 7, 1, 3, 4, 1, 1, 1, 11, 1, 1, 1, 4, 3, 1, 7, 2, 3, 24)$;
$\sqrt{152} = (12, 3, 24)$; $\sqrt{153} = (12, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 24)$;
$\sqrt{154} = (12, 2, 2, 3, 1, 2, 1, 3, 2, 2, 24)$;
$\sqrt{155} = (12, 2, 4, 2, 24)$; $\sqrt{156} = (12, 2, 24)$;
$\sqrt{157} = (12, 1, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 1, 24)$;
$\sqrt{158} = (12, 1, 1, 3, 12, 3, 1, 1, 24)$;
$\sqrt{159} = (12, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 24)$;
$\sqrt{160} = (12, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 24)$;
$\sqrt{161} = (12, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 2, 1, 24)$;
$\sqrt{162} = (12, 1, 3, 1, 2, 12, 2, 1, 2, 24)$;
$\sqrt{163} = (12, 1, 3, 3, 2, 1, 1, 7, 1, 11, 1, 7, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 24)$;

$\sqrt{164} = (12, 1, 4, 6, 4, 1, 24)$; $\sqrt{165} = (12, 1, 5, 2, 5, 1, 24)$;
$\sqrt{166} = (12, 1, 7, 1, 1, 1, 2, 4, 1, 3, 2, 12, 2, 3, 1, 4, 2, 1, 1, 1, 7, 1, 24)$;
$\sqrt{167} = (12, 1, 11, 1, 24)$; $\sqrt{168} = (12, 1, 24)$;
$\sqrt{170} = (13, 26)$; $\sqrt{171} = (13, 13, 26)$;
$\sqrt{172} = (13, 8, 1, 2, 2, 1, 1, 3, 6, 3, 1, 1, 2, 2, 1, 8, 26)$;
$\sqrt{173} = (13, 6, 1, 1, 6, 26)$; $\sqrt{174} = (13, 5, 4, 5, 26)$;
$\sqrt{175} = (13, 4, 2, 1, 2, 4, 26)$; $\sqrt{176} = (13, 3, 1, 3, 26)$;
$\sqrt{177} = (13, 3, 3, 2, 8, 2, 3, 3, 26)$;
$\sqrt{178} = (13, 2, 1, 12, 1, 2, 26)$;
$\sqrt{179} = (13, 2, 1, 1, 1, 3, 5, 13, 5, 3, 1, 1, 1, 2, 26)$;
$\sqrt{180} = (13, 2, 2, 2, 26)$;
$\sqrt{181} = (13, 2, 4, 1, 8, 6, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 6, 8, 1, 4, 2, 26)$;
$\sqrt{182} = (13, 2, 26)$; $\sqrt{183} = (13, 1, 1, 8, 1, 1, 26)$;
$\sqrt{184} = (13, 1, 1, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 1, 26)$;
$\sqrt{185} = (13, 1, 1, 1, 1, 26)$;
$\sqrt{186} = (13, 1, 1, 1, 3, 4, 3, 1, 1, 1, 26)$;
$\sqrt{187} = (13, 1, 2, 13, 2, 1, 26)$;
$\sqrt{188} = (13, 1, 2, 2, 6, 2, 2, 1, 26)$; $\sqrt{189} = (13, 1, 2, 1, 26)$
$\sqrt{190} = (13, 1, 3, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 3, 1, 26)$;
$\sqrt{191} = (13, 1, 4, 1, 1, 3, 2, 2, 13, 2, 2, 3, 1, 1, 4, 1, 26)$;
$\sqrt{192} = (13, 1, 5, 1, 26)$;
$\sqrt{193} = (13, 1, 8, 3, 2, 1, 3, 3, 1, 2, 3, 8, 1, 26)$;
$\sqrt{194} = (13, 1, 12, 1, 26)$; $\sqrt{195} = (13, 1, 26)$;
$\sqrt{197} = (14, 28)$; $\sqrt{198} = (14, 14, 28)$;
$\sqrt{199} = (14, 9, 2, 1, 2, 2, 5, 4, 1, 1, 13, 1, 1, 4, 5, 2, 2, 1, 2, 9, 28)$;
$\sqrt{200} = (14, 7, 28)$.

Ce tableau permet de vérifier les propositions suivantes, dont quelques-unes sont bien connues :

1° Le dernier terme de la période est $2a$, comme on l'a dit plus haut;

2° Abstraction faite de son dernier terme, la période est symétrique;

3° Si a et les n premiers termes de la période sont communs aux développements de $\sqrt{x}$ et de $\sqrt{x+h}$, que h et h' désignent respectivement, les premiers termes non communs; on a $h > h'$, si h et h' sont de rang impair dans la période; $h < h'$, si leur rang dans la période est pair.

4° $\sqrt{a^2+1} = (a, 2a)$;

5° $\sqrt{a^2+2} = (a, a, 2a)$;

6° $\sqrt{a^2-1} = (a-1, 1, 2a-2)$;

7° $\sqrt{a^2-2} = (a-1, 1, a-2, 1, 2a-2)$;

8° $\sqrt{4a^2+4} = (2a, a, 4a)$;

9° $\sqrt{4a^2+a} = (2a, 4, 4a)$;

10° $\sqrt{4a^2-a} = (2a-1, 1, 2, 1, 4a-2)$;

11° $\sqrt{a^2+a} = (a, 2, 2a)$;

12° $\sqrt{9a^2-2a} = (3a-1, 1, 1, 1, 6a-2)$;

13° $\sqrt{9a^2+10a+3} = (3a+1, 1, 2, 3a+1, 2, 1, 6a+2)$;

14° $\sqrt{9a^2+8a+2} = (3a+1, 2, 1, 3a, 1, 2, 6a+2)$;

15° $\sqrt{25m^2-14m+2} = (5m-2, 1, 1, 1, 1, 10m-4)$;

16° $\sqrt{144a^2-127a+28} = (12a-6, 1, 2, 2, 2, 1, 24a-12)$;

17° $\sqrt{625a^2+364a+53} = (25a+7, 3, 1, 1, 3, 50a+14)$;

18° $\sqrt{36a^2+17a+2} = (6a+1, 2, 3, 2, 12a+2)$;

19° $\sqrt{25m^2-2m} = (5m-1, 1, 3, 1, 10m-2)$;

20° $\sqrt{m^2(p+1)^2-m} = (4m-1, 1, 2p, 1, 8m-2)$;

21° $\sqrt{m^2(2p+3)^2-2m} = [(2p+3)m-1, 1, 2p+1, 1, 2m(2p+3)-2]$;

22° $\sqrt{4p^2(2k+1)^2+p[2(2k+1)^2-1]+k^2+k} =$

$= (4pk+2p+k, 2, 2k, 2, 8pk+4p+2k)$;

23° $\sqrt{225a^2-52a+3} = (15a-2, 3, 1, 3\ 30a-4)$;

24° Quel que soit l'entier k, on peut toujours trouver une infinité de valeurs entières de a, en progression arithmétique, et telles que x étant entier, on ait :

$$\sqrt{x} = (a, 3, k, 3, 2a);$$

25° $\sqrt{(20a+11)^2+9a+5} = (20a+11, 4, 2, 4, 40a+22)$;

26° k étant entier quelconque, à chaque valeur de k, on peut faire correspondre une infinité de valeurs entières et en progression arithmétique de a, de manière que x étant entier, on ait :

$$\sqrt{x} = (a, 4, 2k, 4, 2a);$$

27° b et c étant des entiers quelconques, mais tels que pour c impair, b soit obligatoirement impair, à chaque détermination de b et c, on pourra faire correspondre une infinité de valeurs de a, entières

et en progression arithmétique, de manière que x soit entier, et que l'on ait :

$$\sqrt{x} = (a, b, c, b, 2a);$$

28° $\sqrt{(2a+1)^2+4} = (2a+1, a, 1, 1, a, 4a+2)$;

29° $\sqrt{(29a+1)^2+24a+1} = (29a+1, 2, 2, 2, 2, 58a+2)$;

30° k étant un entier arbitraire, pour chaque valeur de k, on peut trouver une infinité de valeurs de a, entières et en progression arithmétique, telles que x soit entier et que l'on ait :

$$\sqrt{x} = (a, 2k, 2, 2, 2k, 2a);$$

31° $\sqrt{4(3m+2)^2+7m+5} = (6m+4, 1, 1, 2, 1, 1, 12m+8)$;

32° $\sqrt{(10m+7)^2+11m+8} = (10m+7, 1, 1, 4, 1, 1, 20m+14)$;

33° $\sqrt{4(7m+5)^2+15m+11} = (14m+10, 1, 1, 6, 1, 1, 28m+20)$;

34° $\sqrt{[m(4p+6)+3p+4]^2+m(4p+7)+3p+5} =$

$$= (4pm+6m, 1, 1, 2p+2, 1, 1, 8pm+12m);$$

35° Si l'on a :

$$\sqrt{x} = (a, 1, 1, 1, \ldots\ldots, 1, 1, 2a)$$

l'unité étant répétée n fois dans la période, on a :

$$x = a(a+1) + \frac{au_{n-2} + u_{n-1}}{u_{n+1}},$$

u_n désignant le terme de rang n de la suite de Lamé ou de Fibonacci, où $u_n = 0$.

On peut toujours trouver une infinité de valeurs de a telles que x soit entier, sauf dans le cas où $n+1$ est un multiple de 3.

On peut multiplier indéfiniment les remarques analogues aux précédentes.

UNE PROPRIÉTÉ DES CONIQUES.

par M. J. Wastkels, professeur à l'Athénée de Gand.

Au point P ***d'une conique, on mène la normale et deux cordes*** PA, PB, ***également inclinées sur celle-ci. Les tangentes en*** A ***et*** B ***à la conique se coupent sur la normale.***

Démonstration. Soient T l'intersection des tangentes, C et D les intersections de la droite AB avec la tangente en P et avec la normale.

La polaire de C par rapport à la conique passe par D, conjugué harmonique de C par rapport à la droite AB; elle passe également par P, pôle de la droite PC; donc elle se confond avec la normale.

D'un autre côté, la droite AB passe par C; son pôle T se trouve donc sur la polaire de C ou sur la normale.

Remarque. Si AB était parallèle à la tangente en P, l'égalité des triangles PDA, PDB prouverait que D est le milieu de AB; donc, la normale PD deviendrait un diamètre (elle serait même un axe) et AB serait une de ses cordes conjuguées; la propriété serait donc évidente.

Cas particulier. *Si d'un point* P *d'une conique à centre, on mène les deux cordes* PA, PB *passant respectivement par les deux foyers de la courbe, les tangentes aux points* A *et* B *se couperont sur la normale en* P.

Réciproque du théorème général : *Si* A *et* B *sont les points de contact des tangentes menées à la conique par un point de la normale en* P, *les cordes* PA, PB *sont également inclinées sur la normale.*

Note. — Plus généralement, si au point P d'une conique, on mène une corde fixe PN et deux cordes variables, PA et PB, également inclinées sur PN, la droite AB passe par un point fixe Q, et les tangentes en A et B se coupent sur une droite fixe q. Car les cordes PA, PB se correspondent dans une involution ayant pour rayons doubles PN et la corde PN′ perpendiculaire à PN.

Le point fixe Q est à l'intersection des tangentes en N et N′. La droite q se confond avec NN′. (J. N.).

---

*NOTES MATHÉMATIQUES.

1. Deux questions de concours. I. *Si l'on a les deux suites*

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, & \ldots & (n-2), & (n-1), & n, \\ (2n-1), & (2n-3), & (2n-5), & \ldots & 5, & 3, & 1. \end{array}$$

et qu'on multiplie chaque terme de la première par le terme correspondant de la seconde, quelle sera la somme de tous les produits ainsi obtenus?
(Concours général de la classe de seconde scientifique de Belgique. 1886).

On trouve successivement

$$S = 1.(2n-1) + 2.(2n-3) + 3.(2n-5) + \cdots + n.[2n-(2n-1)]$$

$$= 2n(1+2+3+\cdots+n) - [1.1+2.3+3.5+\cdots+n(2n-1)]$$
$$= 2n(1+2+\cdots+n) - [2(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) - (1+2+3+\cdots+n)]$$
$$= (2n+1)(1+2+3+\cdots+n) - 2(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$$
$$= \frac{(2n+1)(n+1).n}{2} - 2.\frac{(2n+1)(n+1).n}{1.2.3} = \frac{(2n+1)(n+1)n}{1.2.3}.$$

La somme demandée est donc égale à la somme des carrés des n premiers nombres entiers.

On peut arriver à ce résultat par un autre procédé qui montre clairement pourquoi on trouve la somme des carrés des n premiers nombres.

Si dans la première série on remplace 2 par $1+1$, 3 par $1+1+1$, et ainsi de suite, la somme S que l'on cherche sera la somme des nombres renfermés dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{r}
(2n-1)+(2n-3)+(2n-5)+\cdots+5+3+1 \\
(2n-3)+(2n-5)+\cdots+5+3+1 \\
(2n-5)+\cdots+5+3+1 \\
\cdots\cdots\cdots \\
5+3+1 \\
3+1 \\
1
\end{array}$$

La première ligne horizontale est la somme des n premiers nombres impairs; elle est égale, d'après une formule connue, au carré de n ou n^2. La deuxième ligne horizontale est, de même, la somme des $n-1$ premiers nombres impairs; elle vaut par conséquent $(n-1)^2$. Et ainsi de suite. On aura donc

$$S = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{1.2.3}.$$

II. *Si l'on range les termes de la progression arithmétique*

$$+1.5.9.13....$$

de la manière suivante :

1
5.9.13
17.21.25.29.33
. . . . . .

de manière qu'il y ait dans chaque ligne deux nombres de plus que dans

la ligne précédente, quelle sera la somme des nombres contenus dans la p^e ligne? (Concours général de la première scientifique, 1896).

D'après la loi de formation des lignes horizontales, on voit que la première ligne contient 1 terme; la 2e ligne, 3 termes; la 3e ligne, 5 termes, et ainsi de suite; la $(p-1)^e$ ligne contiendra $1+2(p-2)$ ou $2p-3$ termes et la p^e ligne, $1+2(p-1)$ ou $2p-1$ termes. De sorte que le nombre de termes écrits dans les $p-1$ premières lignes est $1+3+5+\cdots+(2p-3)$ ou la somme des $p-1$ premiers nombres impairs, laquelle est égale au carré du nombre de termes ou $(p-1)^2$.

Il résulte de là que le premier terme de la p^e ligne, d'après la loi de formation des termes dans une progression arithmétique, sera $I+4(p-1)^2$; le dernier terme de cette ligne, qui contient $2p-1$ termes, sera $1+4(p-1)^2+4(2p-2)$. La somme S de ces $2p-1$ termes, qui est la somme demandée, sera donc, d'après la formule connue,

$$S=[1+4(p-1)^2+1+4(p-1)^2+4(2p-2)]\left(\frac{2p-1}{2}\right)$$

ou

$$S=[1+4(p-1)^2+4(p-1)](2p-1)$$

ou encore

$$S=[1+2(p-1)]^2(2p=1)=(2p-1)^3.$$

La somme des termes de la p^e ligne est donc égale au cube du nombre des termes de cette ligne. (Un abonné).

2. *Sur une propriété des coniques.* M. Mannheim vient de proposer, dans le J.M.E., 1896, p. 96, le théorème suivant :

Une tangente quelconque t *menée au cercle inscrit à un triangle* ABC *rencontre les bissectrices* AI, BI, CI, *aux points* A_1, B_1, C_1. *Les secondes tangentes menées de ces points au cercle rencontrent respectivement les côtés* BC, CA, AB *en* A_2, B_2, C_2. *Démontrer que les points* A_2, B_2, C_2, *sont situés sur une même droite* t' *passant par* I.

Cette proposition, ainsi que nous l'a fait observer M. A. C, est susceptible de généralisation : Le cercle peut être remplacé par une conique quelconque inscrite au triangle ABC, et le point I par un point quelconque du plan ABC.

Une transformation par polaires réciproques conduit à cette autre propriété :

Une conique étant circonscrite à un triangle ABC, *les droites qui joi-*

quent un point quelconque D *de cette courbe aux points de rencontre* A_1, B_1, C_1 *d'une transversale quelconque* d *avec les côtés* BC, CA, AB, *coupent la conique en trois nouveaux points* A_2, B_2, C_2 *tels, que les droites* AA_2, BB_2, CC_2 *concourent en un point* D' *de la transversale.*

Nous allons indiquer une démonstration géométrique du dernier théorème ; son corrélatif peut s'établir par des moyens analogues.

Le triangle ABC et la transversale *d* déterminent un quadrilatère complet ayant pour sommets opposés A et A_1, B et B_1, C et C_1 ; par suite les droites DA et DA_1, DB et DB_1, DC et DC_1 se correspondent dans un faisceau involutif, et marquent sur la conique les couples AA_2, BB_2, CC_2 appartenant à une involution. On en conclut que les droites AA_2, BB_2, CC_2 concourent en un même point D'.

Cherchons le lieu décrit par D' lorsque D parcourt la conique donnée. Les points A_2 et D se correspondent dans une involution de pôle A_1 ; de même B_2 et D sont des éléments conjugués d'une involution de pôle B_1. Donc A_2 et B_2 sont des éléments homologues d'une homographie tracée sur la conique, et les droites AA_2, BB_2 se correspondent dans deux faisceaux projectifs. Ces faisceaux sont même perspectifs ; car lorsque D est en C, A_2 coïncide avec B, et B_2 avec A, de sorte que AB est un élément uni des deux faisceaux. Le point D' décrit donc une droite. En faisant coïncider D avec B ou A, on trouve pour D' le point A_1 ou B_1 ; donc le lieu de D' est la transversale donnée *d*. (J. N.)

3. *Sur la définition de la multiplication*(*). La définition adoptée généralement pour la multiplication des nombres ayant été l'objet d'une critique dans une note (*Mathesis*, avril 1896) publiée par MM. Laisant et Lemoine, il n'est peut-être pas inutile d'examiner s'il y a lieu ou non d'apporter des modifications à cette définition.

L'argument principal sur lequel s'appuient les auteurs est l'ambiguïté que présenterait la formation du multiplicateur.

Cette ambiguïté existe-t-elle réellement ? Il est facile de voir qu'il n'en est rien. En effet, admettre que l'on peut former le multiplicateur autrement que par addition ou soustraction serait supposer la multiplication déjà connue. C'est d'ailleurs le cas de l'exemple cité : une élévation au

(*) Nous insérons volontiers cette note, bien que nous soyons d'avis qu'il convient d'étendre successivement la définition naturelle de la multiplication aux divers cas que l'on rencontre, en arithmétique, en algèbre, en géométrie, etc. (*Rédaction*).

carré implique la notion de la multiplication, et supposer le multiplicateur formé de cette manière serait faire usage, dans la définition, de la chose à définir.

Quant à la difficulté qu'éprouvent les commençants à comprendre cette définition, et aux explications que celle-ci exige, il s'est déjà présenté, au début de l'étude de l'arithmétique, des notions non moins abstraites, et la plupart des définitions, entre autres celles de l'unité, de la mesure d'une quantité, etc.,., exigent autant, sinon plus de développements.

A. Listray (Bouillon).

4. *Sur la question* 949 (*Mathesis*, (2) VI, pp. 27 et 274) (*). Cette question est énoncée ainsi :

On sait que l'expression $(a^2+b^2)^6$ *est une somme de deux carrés. Démontrer qu'on peut aussi la mettre sous la forme d'une somme de trois ou de quatre carrés.* (E. Fauquembergue).

Je vous ai adressé, en octobre 1886, la formule suivante :

$$(\alpha)\quad (a+b)^6=(a-b)^6+4ab.\,[(a+b)^4+(a-b)^4+(a^2-b^2)^2].$$

En remplaçant a et b par a^2 et b^2, on a une décomposition de $(a^2+b^2)^6$ en quatre carrés.

J'ai donné également la formule :

$$(\beta)\quad (a+b)^6=(a-b)^6+4ab.\,[(a^2+2ab-b^2)^2+(a^2-2ab-b^2)^2+(a^2+b^2)^2+(2ab)^2].$$

En remplaçant a et b par a^2 et b^2, on a une décomposition de $(a^2+b^2)^6$ en *cinq* carrés.

Pour la décomposition en trois carrés, je me servirai encore d'une formule de mes lettres d'octobre 1886 :

$$(\gamma)\qquad (a+b)^4=(a-b)^4+ab.\,[(2a+2b)^2+(2a-2b)^2].$$

On multiplie les deux membres par $(a+b)^2$ et on remplace a et b par a^2 et b^2.

En résumé, $(a^2+b^2)^6$ est une somme de 2, 3, 4 et 5 carrés.

Je remarque même qu'en remplaçant dans le second membre de la formule (β) le terme $(a^2+b^2)^2$ par $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2$, on aurait une décomposition en *six* carrés.

Moulins, 13 août 1895.

G. de Rocquigny-Adanson.

(*) Nous regrettons le retard de la publication de cette note; la lettre de notre honorable correspondant avait été égarée. (J. N.).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

*Question 985.

(Voir *Mathesis*, (2) IV, p. 263).

D'un point P *du plan d'une parabole, on abaisse trois normales à la courbe, dont les pieds sont* A,B,C. *Montrer que*

1° *Le lieu des points* P *tels que la somme des carrés des projections des côtés du triangle* ABC *sur la tangente au sommet soit constante, est une ligne droite.*

2° *Le lieu des points* P *tels que la somme des carrés des projections des mêmes côtés sur l'axe soit constante, se compose de deux droites.*

3° *Le lieu des points* P *tels que la somme des carrés des projections des côtés du triangle* ABC *sur l'axe soit égale à la somme des carrés des projections des mêmes côtés sur la tangente au sommet, se compose de deux droites.*

(E. N. Barisien).

Solution par M. Cristescu. Soient $y^2 = 2px$ l'équation de la parabole, (α, β) les coordonnées de P et (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées de A,B,C. On sait que y_1, y_2, y_3 sont les racines de l'équation

$$y^3 - 2p(\alpha - p)y - 2p^2\beta = 0; \tag{1}$$

par conséquent

$$\left.\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= 0, \\ y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 &= -2p(\alpha - p), \\ y_1y_2y_3 &= 2p^2\beta. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Des équations (2) on déduit aisément

$$\left.\begin{aligned} y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 &= 4p(\alpha - p), \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= \frac{y_1^4 + y_2^4 + y_3^4}{4p^2} = 2(\alpha - p)^2, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= \frac{y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1}{4p^2} = (\alpha - p)^2. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

1° La somme des carrés des projections des côtés du triangle ABC sur la tangente au sommet est

$$\begin{aligned} &(y_1 - y_2)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (y_3 - y_1)^2 \\ &= 2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - 2(y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1). \end{aligned}$$

En exprimant que cette somme est égale à k^2, et tenant compte des équations (3), on a

$$12p(\alpha - p) = k^2.$$

Le lieu du point P est donc la droite

$$\alpha = p + \frac{k^2}{12p}.$$

2° La somme des carrés des projections des côtés du triangle ABC sur l'axe est :

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2.$$

En exprimant que cette somme égale k'^2, on trouve

$$2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = k'^2.$$

ou

$$2(\alpha - p)^2 = k'^2.$$

Le lieu du point P se compose donc de deux droites :

$$\alpha = p \pm \frac{k'\sqrt{2}}{2}.$$

3° Dans ce cas, on a

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2$$
$$= (y_1 - y_2)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (y_3 - y_1)^2,$$
$$6p(\alpha - p) = (\alpha - p)^2.$$

Le lieu des points P se compose donc des droites

$$\alpha = p, \quad \alpha = 7p.$$

Solution analogue par MM. Klompers, J. Jonesco, Mandart, Déprez et Droz-Farny.

M. Déprez détermine également les lieux suivants :

1° Si la somme $\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ a une valeur constante c^2, l'équation du lieu de P est

$$2\alpha^2 + 8p\alpha - (10p^2 + c^2) = 0.$$

2° Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC a pour coordonnées $\frac{p+\alpha}{2}, \frac{\beta}{4}$; dans les hypothèses considérées par M. Barisien, et dans celle qui précède, ce point décrit, respectivement, les lignes ayant pour équation

$$24p(p - x) + k^2 = 0, \quad 8(p - x)^2 - k^2 = 0,$$
$$(p - x)(4p - x) = 0, \quad 8x^2 + 8px - (16p^2 + c^2) = 0.$$

3° L'orthocentre du triangle ABC a pour coordonnées $\alpha - 3p, -\frac{\beta}{2}$; ces valeurs conduisent aisément aux équations des lieux de ce point dans les cas considérés ci-dessus.

Question 994.

(Voir *Mathesis*, (2) IV, p. 279).

Sur les côtés d'un triangle ABC, *on construit extérieurement des rectangles semblables* ABDE, BCFG, CAHI. *Soient* A', B', C' *les milieux des côtés du triangle* ABC, *et* A'', B'', C'', *les milieux des droites* HE, DG, FI. *Lorsque le rapport* (EA : AB) *varie :*

1° *Les droites* A'A'', B'B'', C'C'' *se coupent constamment sur l'hyperbole passant par* A', B', C', *le centre de gravité g de* ABC, *le centre* O *du cercle circonscrit et le milieu de la distance des points de Brocard.*

2° *Le centre de gravité du triangle* A''B''C'' *reste fixe.*

3° *Chacun des côtés du triangle* A''B''C'' *enveloppe une parabole tangent à un côté du triangle* ABC *et aux deux hauteurs issues de ses extrémités.* (Déprez.)

Solution par M. P. Bastin (Liége). 1° Désignons par λ le rapport (EA : AB).

Le point A'' appartient à la hauteur issue de A et sa distance à ce dernier point est égale à $\frac{1}{2}\lambda a$. C'est ce qui résulte des triangles B'AA', HAE dont les côtés homologues sont perpendiculaires et dans le rapport λ.

Ses coordonnées normales, relativement au triangle ABC, étant :

$$\frac{2S}{a}+\frac{\lambda a}{2}, \quad -\frac{\lambda a}{2}\cos C, \quad -\frac{\lambda a}{2}\cos B,$$

l'équation de la droite A'A'' est :

$$\lambda a\,(b^2-c^2)\,x+b\,(4S+\lambda a^2)\,y-c\,(4S+\lambda a^2)\,z=0.$$

On trouverait de même pour les droites B'B'' et C'C'' :

$$-a\,(4S+\lambda b^2)\,x+\lambda b\,(c^2-a^2)\,y+c\,(4S+\lambda b^2)\,z=0,$$

$$a\,(4S+\lambda c^2)\,x-b\,(4S+\lambda c^2)\,y+\lambda c\,(a^2-b^2)\,z=0.$$

On vérifie aisément que le déterminant des coefficients des inconnues est nul : les droites A'A'', B'B'', C'C'' concourent donc en un point M.

Les points A'', B'', C'' marquent sur les hauteurs issues de A, B, C des divisions semblables; donc les droites A'A'', B'B'', C'C'' engendrent trois faisceaux homographiques et le lieu du point M est une conique

passant par les points A', B', C', centres des faisceaux. Dans l'hypothèse $\lambda = 0$, le point M se confond avec g; il se confond avec O si $\lambda = \infty$: ces deux derniers points appartiennent donc à la conique.

Le point P, milieu de la distance des points de Brocard, est défini par les égalités

$$\frac{x}{a(b^2+c^2)} = \frac{y}{b(c^2+a^2)} = \frac{z}{c(a^2+b^2)}.$$

Cherchant quelle valeur doit être attribuée à λ pour que A'A'' passe par ce point, on trouve

$$\lambda = -\frac{4S}{a^2+b^2+c^2}.$$

Ce résultat étant symétrique par rapport à a, b et c, on est en droit de conclure que les droites A'A'', B'B'', C'C'' concourent au point P.

Le point g est toujours situé à l'intérieur de A'B'C'; la conique, lieu de M, doit donc nécessairement avoir deux branches et ne peut être qu'une hyperbole.

2° Nous prouverons que le centre de gravité du triangle A''B''C'' reste fixe, en montrant que la somme algébrique des distances de ses trois sommets à une droite *quelconque* du plan est indépendante de λ.

Les distances de A'', B'', C'' au côté BC sont égales respectivement à

$$\frac{2S}{a} + \frac{\lambda a}{2}, \quad -\frac{\lambda b}{2}\cos C, \quad -\frac{\lambda c}{2}\cos B,$$

et leur somme algébrique se réduit à $\frac{2S}{a}$.

On obtiendrait, de même, $\frac{2S}{b}$ et $\frac{2S}{c}$ pour sommes des distances de ces points aux côtés AC et AB.

ABC étant une position particulière de A''B''C'', le centre de gravité de ce dernier triangle n'est autre que g.

3° La droite A''C'', joignant les points homologues de deux divisions homographiques, enveloppe une conique touchant les bases des deux divisions, c'est-à-dire les hauteurs issues de A et de C. Les points A et C étant homologues, le côté AC est tangent à la courbe. Les points à l'infini sont homologues : la conique, tangente à la droite de l'infini, est donc une parabole.

On raisonnerait de même pour les droites A''B'' et B''C''.

M. Droz-Farny a résolu la même question. Notre zélé correspondant observe que, dans l'hypothèse $\lambda = 1$, les droites A'A'', B'B'', C'C'' se croisent au centre du cercle circonscrit au triangle qui a pour sommets les centres des carrés construits extérieurement sur BC, CA, AB (voir question 987). Il remarque également que l'hyperbole A'B'C'Og est la conique des neuf points du quadrilatère ABCR, où R est le point de Steiner du triangle ABC.

Question 1003.

(Voir *Mathesis*, (2), V, p. 32).

Soient α, β, γ, δ *les points de Gergonne des cercles inscrits aux faces* BCD, CDA, DAB, ABC *d'un tétraèdre. Trouver les conditions auxquelles doivent satisfaire les arêtes*

$$BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c, \quad DA = a', \quad DB = b', \quad DC = c'$$

pour que les droites Aα, Bβ, Cγ, Dδ *soient les génératrices d'un hyperboloïde ou pour qu'elles concourent en un même point.* (Genty.)

Solution par M. R. B. 1° Il suffit de trouver trois droites qui s'appuient à la fois sur Aα, Bβ, Cγ, Dδ. Nous pouvons faire passer l'une de ces lignes par le point D de Dδ; comme elle se trouve nécessairement dans les trois plans DAα, DBβ, DCγ, nous exprimerons que ces plans passent par une même droite. Soient α', β', γ' les points où les droites Dα, Dβ, Dγ rencontrent BC, CA, AB; ce sont les points de contact de BC, CA, AB avec les cercles inscrits aux faces DBC, DCA, DAB. Les droites Aα', Bβ', Cγ' devront concourir en un même point, ce qui s'exprime par l'équation

$$\frac{B\alpha'}{\alpha'C} \cdot \frac{C\beta'}{\beta'A} \cdot \frac{A\gamma'}{\gamma'B} = 1.$$

Or

$$B\alpha' = \tfrac{1}{2}(BD + BC - DC) = \tfrac{1}{2}(b' + a - c'), \text{ etc.}$$

On a donc la première condition

$$(1) \qquad \begin{aligned}(b' + a - c')(c' + b - a')(a' + c - b') = \\ (c' + a - b')(a' + b - c')(b' + c - a').\end{aligned}$$

En l'ordonnant suivant les lettres a, b, c, on trouve

$$ab(a' - b') + bc(b' - c') + ca(c' - a') + (b' - c')(c' - a')(a' - b') = 0.$$

Si l'on opère de même successivement en A, B, C, on obtient

$$(2)\qquad (b+a-c)(c+b'-a')(a'+c'-b)=(c+a-b)(a'+b'-c)(b+c'-a'),$$

$$(3)\qquad (b'+a'-c)(c+b-a)(a+c'-b')=(c+a'-b')(a+b-c)(b'+c'-a),$$

$$(4)\qquad (b+a'-c')(c'+b'-a)(a+c-b)=(c'+a'-b)(a+b'-c')(b+c-a).$$

Les quatre égalités (1), (2), (3), (4) se réduisent à trois : le produit des trois dernières donne, après simplification, la première.

Si l'on multiplie la première successivement par chacune des autres, on obtient le système

$$(5)\qquad \frac{(a+b'-c')(a'+c-b')(a+b-c)(a'+c'-b)}{(a'+b-c')(a+c'-b')(a'+b'-c)(a+c-b)}=1,$$

$$(6)\qquad \frac{(a+b'-c')(b+c'-a')(a'+b'-c)(b+c-a)}{(a'+b-c')(b'+c-a')(b'+c'-a)(a+b-c)}=1,$$

$$(7)\qquad \frac{(b+c'-a')(a'+c-b')(c'+b'-a)(a+c-b)}{(c'+a-b')(b'+c-a')(c'+a'-b)(b+c-a)}=1,$$

par lequel on peut également exprimer les conditions de la question.

L'égalité (5) se réduit à une forme plus simple : Le dénominateur ne diffère du numérateur que par les signes de b, b', c, c', et si l'on ordonne par rapport aux lettres a, a', on trouve aisément

$$(8)\qquad (b+b'-c-c')[a(b'-c)(b-c')+a'(b'-c')(b-c)+aa'(a-a')]=0.$$

Les égalités (6) et (7) se ramènent à

$$(9)\qquad (c+c'-a-a')[b(c'-a)(c-a')+b'(c'-a')(c-a)+bb'(b-b')]=0,$$

$$(10)\qquad (a+a'-b-b')[c(a'-b)(a-b')+c'(a'-b')(a-b)+cc'(c-c')]=0.$$

II. Si les droites $D\delta$, $A\alpha$ se coupent, les droites $A\delta$, $D\alpha$ rencontrent BC au même point α_1, et les cercles inscrits aux faces DBC, ABC touchent BC en α_1. Or les distances de B au point de contact de BC avec l'un ou l'autre de ces cercles ont pour expressions $\frac{1}{2}(BD+BC-CD)$, $\frac{1}{2}(BA+BC-AC)$; de là la condition $b+b'=c+c'$. On en conclut que les quatre droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ concourent en un même point lorsque

$$(11)\qquad a+a'=b+b'=c+c';$$

les quatre cercles appartiennent alors à une même sphère inscrite entre les arêtes du tétraèdre ABCD. On voit que les égalités (11) sont comprises dans celles qu'on a trouvées ci-dessus.

Note. Cette solution demande un supplément de discussion. Les équations (5), (6), (7) résultent de (1), (2) et (3); mais ne forment-elles pas un système plus général? Un système de la forme $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$ entraîne $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$; mais ces nouvelles équations sont aussi une conséquence de $A = -A'$, $B = -B'$, $C = -C'$. (J. N.).

Question 1005.

(Voir *Mathesis*, (2) V, p. 32).

Par le foyer F *d'une parabole on mène une corde* AFB. *Le cercle de diamètre* AB *rencontre la parabole en deux autres points* C et D; *le cercle de diamètre* FA *rencontre la parabole en trois autres points* B', C', D'; *le cercle passant par* F *et tangent à la parabole en* A *rencontre la parabole en deux autres points* B'' *et* C''. O *étant le sommet de la parabole, démontrer les relations*

$$FA + FB - FC - FD = 8FO,\quad FA - FB' - FC' - FD' = 4FO,$$
$$4FA - FB'' - FC'' = 8FO,$$
$$2(FC + FD - FB) - 6(FB' + FC' + FD') + FB'' + FC'' = 0.$$

(E. N. Barisien).

Solution par M. E. Colart (Huy). En éliminant y entre les équations $y^2 = 2px$ et $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ d'une parabole et d'un cercle, on trouve une équation dont le terme en x^3 a pour coefficient $4(p - a)$. Si donc on désigne par x', x'', x''', x^{IV} les abscisses des points A, B, C, D d'intersection des deux courbes, on a

$$x' + x'' + x''' + x^{IV} = 4(a - p),$$

d'où l'on tire, en tenant compte de la relation $FA = x' + \frac{p}{2}$,

$$FA + FB + FC + FD = 2(2a - p). \qquad (1)$$

La valeur du premier membre dépend donc uniquement de l'abscisse du centre du cercle.

1° Considérons d'abord le cercle décrit sur la corde AFB comme diamètre. Alors

$$2a = x' + x'' = FA + FB - p.$$

En introduisant cette valeur dans l'égalité (1), on trouve

$$FA + FB - FC - FD = 4p = 8FO. \qquad (2)$$

2° Si le cercle considéré est décrit sur FA comme diamètre, on a

$$2a = p + x' = FA + \frac{p}{2}.$$

Alors, l'égalité (1) donne

$$FA - FB' - FC' - FD' = 2p = 4FO. \qquad (3)$$

3° Enfin, en cherchant l'abscisse du centre du cercle passant par F et tangent en A à la courbe, on trouve

$$2a = \frac{12a'^2 + 8px' + p^2}{2(2x' + p)}.$$

Pour cette valeur de $2a$, l'égalité (1) devient :

$$2FA + FB'' + FC'' = 6x' - p = 6FA - 4p,$$

d'où

$$4FA - FB'' - FC'' = 4p = 8FO. \qquad (4)$$

4° En multipliant les égalités (2), (3), (4) respectivement par 2, — 6, 1, puis les ajoutant membre à membre, on obtient la dernière relation proposée.

Ont résolu la même question MM: Bastin, Buysens, Davidoglou, J. Jonesco, Klompers, Déprez et B. Jonesco.

×Question 1015.

(Voir *Mathesis*, tome V, p. 104).

Soient A', B', C' *les pieds des hauteurs d'un triangle* ABC; A_1, A_2 *les projections de* A' *sur* AB, AC; B_1, B_2 *celles de* B' *sur* BC, BA; C_1, C_2 *celles de* C' *sur* CA, CB. *Démontrer la relation*

$$a^2 . A'A_1A_2 + b^2 . B'B_1B_2 + c^2 . C'C_1C_2 = \frac{S^3}{R^2}.$$

(J. Jonesco).

Solution par MM. Colart, Lemoine, Couturier, Hacken, Barisien, B. Jonesco, Klompers, Cristescu, A. Francq, Delahaye, Mandart et Droz Farny. Le second membre de la formule proposée doit être rectifié comme ci-dessus.

On a successivement

$$A'A_1A_2 = \tfrac{1}{2} A'A_1 . A'A_2 \sin A = \tfrac{1}{2} h^2 \cos B \cos C \sin A = \frac{2S^2}{a^2} \cos B \cos C \sin A,$$

d'où

$$a^2 . A'A_1A_2 = 2S^2 \cos B \cos C \sin A. \qquad (1)$$

Par suite,

$$\Sigma a^2 . A'A_1A_2 = 2S^2 . \Sigma \cos B \cos C \sin A = 2S^2 \sin A \sin B \sin C = \frac{S^3}{R^2};$$

Remarques. En multipliant les deux membres de l'égalité (1) par cotg A, on trouve

$$A'A_1A_2 \sin 2A = B'B_1B_2 \sin 2B = C'C_1C_2 \sin 2C. \quad \text{(Colart).}$$

$$A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = \frac{S}{R}, \quad \frac{AA_1A_2}{AA'^2} = \frac{BB_1B_2}{BB'^2} = \frac{CC_1C_2}{CC'^2} = \frac{S}{4R^2},$$

$$a^2 . AA_1A_2 = b^2 . BB_1B_2 = c^2 . CC_1C_2 = \frac{S^3}{R^2}.$$

(Barisien).

Question DXCVIII.

(Voir N. C. M., t. VI, p. 525).

Trouver les solutions entières de l'équation

$$z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + \cdots + z_n^3 = (5n + 3)\, z^3.$$

Note. Parmi les solutions entières dont l'équation est susceptible, il en existe une dans laquelle la valeur de z, au second membre, est égale à l'unité (en exceptant le cas où $n = 2$), et une autre dans laquelle les valeurs de $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$, au premier membre, se suivent en progression par différence.

Dans le cas spécial de $n = 2$, la solution la plus simple de l'équation

$$z_1^3 + z_2^3 = 13 z^3$$

est donnée par l'égalité

$$2^3 + 7^3 = 13 . 3^3.$$

(S. Realis.)

Solution par M. E. Fauquembergue. I. D'après la note de Realis, le nombre $5n + 3$ est toujours décomposable en une somme algébrique de n cubes entiers (sauf pour $n = 2$).

D'abord on trouve directement pour $n = 1, 3, 4$:

$$8 = 2^3, \quad 18 = 3^3 - 2^3 - 1^3, \quad 23 = 2^3 + 2^3 + 2^3 - 1^3.$$

Afin de démontrer la proposition pour $n > 4$, nous rappellerons ce théorème, dû à M. Oltramare (Voir *Intermédiaire des Mathématiciens*, t. I, 1894, pp. 166 et 245) : Tout nombre entier est la somme algébrique de cinq cubes entiers.

Soit maintenant un nombre quelconque N ; retranchons-en $(n-5)$ cubes entiers arbitraires, positifs ou négatifs ; le reste pourra être décomposé en cinq cubes entiers, d'après les formules de M. Oltramare (*loco citato*). Le nombre N sera ainsi décomposé en n cubes entiers.

II. Pour trouver la solution dans laquelle les valeurs de $z_1, z_2, \ldots z_n$ sont en progression arithmétique, posons :

$$z_1 = u - z, \quad z_2 = 2u - z, \quad z_3 = 3u - z, \quad \ldots\ldots, \quad z_n = nu - z,$$

u étant une nouvelle inconnue.

L'équation proposée devient, après avoir remplacé S_3 par S_1^3 et $3S_2$ par $(2n+1)S_1$,

$$S_1^3 u^3 - (2n+1)\,S_1 u^2 z + 3S_1 u z^2 = 3\,(2n+1) z^3\,,$$
$$S_1 u^2[uS_1 - (2n+1)z] + 3z^2[uS_1 - (2n+1)z] = 0\,,$$
$$(S_1 u^2 + 3z^2)[uS_1 - (2n+1)z] = 0\,.$$

On en déduit

$$uS_1 = (2n+1)z\,,$$

et par suite

$$u = 2n+1\,, \quad z = S_1 = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Exemples. Pour $n = 3, 4, 5$:

$$1^3 + 8^3 + 15^3 = 18\,.\,6^3\,,$$
$$-1^3 + 8^3 + 17^3 + 26^3 = 23\,.\,10^3\,,$$
$$-4^3 + 7^3 + 18^3 + 29^3 + 40^3 = 28\,.\,15^3\,.$$

III. Représentons par l'égalité

$$\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \cdots\cdots + \alpha_n^3 = N\alpha^3,$$

une solution de l'équation

$$z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + \cdots\cdots + z_n^3 = Nz^3, \tag{1}$$

et posons

$$z_1 = \alpha_1 - m_1 u, \quad z_2 = \alpha_2 - m_2 u, \quad \ldots\ldots, \quad z_n = \alpha_n - m_n u, \quad z = \alpha - mu\,;$$

l'équation (1 devient

$$\Sigma\alpha_i^3 - 3\,[\Sigma m_1 \alpha_i^2]\,u + 3\,[\Sigma m_i^2 \alpha_1]\,u^2 - [\Sigma m_i^3]\,u^3$$
$$= N\,(\alpha^3 - 3m\,\alpha^2\,u + 3m^2\,\alpha\,u^2 - m^3\,u^3), \tag{2}$$

ou, en observant que $\Sigma\alpha_i^3 = N\alpha^3$,

$$-3[\Sigma m_i\alpha_i^2] + 3[\Sigma m_i^2\alpha_i]u - [\Sigma m_i^3]u^2 = N(-3m\alpha^2 + 3m^2\alpha u - m^3u^2).$$

En faisant $m = \frac{\Sigma m_i\alpha_i^2}{N\alpha^2}$, on abaisse l'équation au premier degré en u et l'on en tire

$$u = \frac{3[\Sigma m_i^2\sigma_i - Nm^2\alpha]}{\Sigma m_i^3 - Nm^3}.$$

Substituant cette valeur de u dans les égalités ci-dessus, puis réduisant le tout au même dénominateur, on ne conservera que les numérateurs pour $z_1, z_2, \ldots, z_n, z$.

Les formules ainsi obtenues donneront une infinité de solutions de l'équation (1), puisque les nombres $m_1, m_2, \ldots m_n$ sont arbitraires.

Une simplification se présente quand on a

$$m_1^3 + m_2^3 + m_3^3 + \cdots + m_n^3 = Nm^3,$$

c'est-à-dire quand on connaît une seconde solution de l'équation (1).

Dans ce cas, l'équation (2) se réduit à celle-ci :

$$-\Sigma m_i\alpha_i^2 + [\Sigma m_i^2\alpha_i]u = -Nm\alpha^2 + Nm^2\alpha u,$$

d'où

$$u = \frac{\Sigma m_i\alpha_i^2 - Nm\alpha^2}{\Sigma m_i^2\alpha_i - Nm^2\alpha}.$$

Comme dans l'application de cette formule, on peut échanger entre elles les valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, ainsi que les valeurs de $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$, on obtiendra, de deux solutions connues, plusieurs autres solutions, qui, à leur tour, en fourniront de nouvelles, et ainsi, de proche en proche, à l'infini.

QUESTIONS D'EXAMEN.

776. Résoudre les équations

$$3^{2x+1}5^{3x-5} = 11^{5-x},$$
$$3^{2x} - 7 \cdot 3^x + 6.3^{-x} = 0,$$
$$5^{2x-1} - 3.5^{x+2} = 100.$$

777. Étant donnés dans l'espace trois points fixes A, B, C, on considère un quatrième point variable S. Soit MNPQ le parallélogramme qui a pour sommets les milieux M, N, P, Q des côtés SC, SA, BA, BC du

quadrilatère gauche SABC. On demande le lieu géométrique du point S dans chacun des cas suivants :

1° Les diagonales du parallélogramme MNPQ restent dans un rapport donné;

2° L'aire de ce parallélogramme reste constante;

3° Ce parallélogramme reste semblable à un parallélogramme donné.

(St Cyr, Concours de 1896.)

1° Soit I le point d'intersection des diagonales PM, QN. Le rapport PI: QI étant constant, I décrit une sphère ayant pour diamètre le segment des points qui divisent PQ dans le rapport donné. G désignant le centre de gravité du triangle BAC, I divise SG dans le rapport 3: 1; donc S décrit une sphère homothétique de la première par rapport à G. 2° La hauteur du parallélogramme MNPQ est constante; donc MN est la génératrie d'un cylindre de révolution, et S décrit un cylindre. 3° L'angle PQM et la longueur PQ sont invariables; donc M décrit une circonférence située dans un plan perpendiculaire à PQ et ayant son centre sur PQ, et le lieu de S est une circonférence homothétique par rapport à C.

Si le rapport donné dans le premier cas était l'unité, la sphère serait remplacée par un plan.

778. Démontrer l'identité

$$(\sin^6 x + \cos^6 x - 1)^3 + 27 \sin^4 x \cos^2 x = 0.$$

(E. N. Barisien).

779. Montrer que le double produit d'un sinus par un cosinus du même angle est toujours divisible par la somme de ce sinus et de ce cosinus, augmentée ou diminuée de l'unité.

(E. N. Barisien).

En effet,

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha + 1)(\sin \alpha + \cos \alpha - 1).$$

780. Soient dans un cercle de centre O, un rayon fixe OA et un rayon variable OM.

Le lieu des centres des cercles tritangents au triangle OAM se compose du cercle donné et d'une strophoïde droite.

Le lieu de l'orthocentre du même triangle est une strophoïde (*).

(E. N. Barisien).

Cette proposition se démontre très facilement par les coordonnées polaires.

(*) Si nos souvenirs sont exacts, cette proposition est connue et a même été traitée dans *Mathesis*. (J. N.).

QUESTIONS PROPOSÉES.

1101. Développer le déterminant suivant à $2n+2$ lignes

$$F(z)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & z-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & z-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & z-1 \end{vmatrix}$$

Trouver sa valeur pour $z=1$ et pour $z=2$. (STUYVAERT).

1102. Le plan polaire d'un point quelconque M de la cubique aux pieds des normales menées d'un point P à une quadrique rencontre la cubique en trois points formant avec le point P un tétraèdre qui est 1° orthocentrique ; 2° conjugué à la quadrique. De plus, l'orthocentre commun de tous ces tétraèdres est le point P. (A. CAZAMIAN).

1103. On donne un point fixe O situé sur une droite Δ. Un segment AB de longueur constante a se déplace sur Δ de façon que O soit toujours compris entre A et B. Soit M un point du plan tel que les périmètres des triangles MOB et MOA soient égaux et constants, de valeur $2p$. Montrer que

1° En général, le lieu du point M est une quartique Q, qui lorsque a varie, passe par deux points fixes ;

2° Lorsque $p=a$, la quartique Q se décompose en deux ellipses ayant un foyer commun en O. (E. N. BARISIEN).

1104. On considère un cercle de diamètre fixe AB et un point C variable sur la circonférence.

1° Le lieu des centres des cercles tritangents au triangle ABC se compose de deux cercles (théorème connu).

2° Le lieu du centre des symédianes du triangle ABC est une ellipse.

(E. N. BARISIEN).

×**1105.** On considère une demi-circonférence AB et un point C sur le diamètre AB. On décrit du même côté que le demi-cercle AB, les demi-cercles AC et CB. Soient : O le milieu de AB; D le point du diamètre perpendiculaire à AB situé du côté opposé au demi-cercle AB et tel que OD $= \frac{2}{3}$AB. Montrer que le centre I du cercle tangent aux trois demi-cercles AB, AC et CB jouit de cette propriété que

$$IO + ID = \text{constante}$$

quelle que soit la position du point C sur AB (E. N. Barisien).

×**1006.** On porte sur la bissectrice de l'angle A d'un triangle ABC une longueur AD moyenne proportionnelle entre AB et AC. Lorsque A se meut sur une circonférence passant par B et C, D décrit ainsi une circonférence passant par D et C. (L. Collette).

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. *Recherches sur la théorie des parallèles*, par Michel Frolov. Paris, librairie *centrale*, Quai des Augustins, 25 (20 p. + supplément de 5 p. in 8°). Prix : 1 fr. + 0,25.

Nouveaux essais de démonstration du postulatum d'Euclide et de réfutation de la géométrie non euclidienne.

2. *Traité d'arithmitique élementaire*, par l'abbé E. Gelin, sixième édition. Namur, Wesmael; Paris, Retaux; Huy, chez l'auteur, collège S. Quirin, 1897 (In 8° de 416 p.). Prix : 5 fr.

Nouvelle édition, améliorée dans une foule de détails, de cette très bonne arithmétique.

3. *Las modernas Generalizaciones expresadas por el Algebra simbólica, las Geometrias no-euclideas y el concepto de Hiper-espacio*, par D. Z. G. de Galdeano, catedratico de la Universidad de Zaragoza. Madrid, Cruzado, 1896 (142 p. in 8). Prix : 2 pesetas.

4. *Œuvres scientifiques* de L. Lorentz, revues et annotées par H. Valentiner, publiées aux frais de la fondation Carlsberg. Tome premier, premier fascicule Copenhague, Lehmann et Stage, 1896 (210 p. in 8).

Ce fascicule renferme six mémoires sur la théorie mathématique de la lumière, dont le dernier renferme l'exposé de la théorie électromagnétique de la lumière de Lorentz, différente de celle de Maxwell et publiée deux ans après celle-ci.

SUR LES CONIQUES CIRCONSCRITES A UN TRIANGLE(*),

par M. A. KRAHE, professeur à Madrid.

1. Soient x, y, z les coordonnées normales d'un point par rapport au triangle ABC. L'équation d'une conique μ circonscrite est

$$x_1yz + y_1xz + z_1xy = 0. \tag{1}$$

Les coefficients x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées d'un certain point M qui a une position remarquable par rapport à μ. En effet, les tangentes en A, B, C ont pour équations

$$\frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 0, \quad \frac{z}{z_1} + \frac{x}{x_1} = 0, \quad \frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 0. \tag{2}$$

Soit $M_aM_bM_c$ le triangle formé par les droites. Si l'on combine par soustraction les égalités précédentes, on obtient les équations des droites AM_a, BM_b, CM_c sous la forme

$$\frac{y}{y_1} - \frac{z}{z_1} = 0, \quad \frac{z}{z_1} - \frac{x}{x_1} = 0, \quad \frac{x}{x_1} - \frac{y}{y_1} = 0.$$

On voit que ces lignes se coupent au point M (x_1, y_1, z_1), centre d'homologie des triangles ABC, $M_aM_bM_c$; l'axe d'homologie est la polaire trilinéaire de M représentée par

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 0.$$

2. Pour reconnaître le genre de la conique μ, cherchons l'intersection de cette courbe avec la droite de l'infini représentée par

$$ax + by + cz = 0. \tag{3}$$

Eliminons z entre (1) et (3); nous aurons

$$ay_1x^2 + (ax_1 + by_1 - cz_1)\,xy + bx_1y^2 = 0. \tag{4}$$

La nature des racines de l'équation (4) dépend du signe de la quantité

$$\varepsilon = (ax_1 + by_1 - cz_1)^2 - 4abx_1y_1 = \Sigma a^2x_1^2 - 2\Sigma bcx_1y_1.$$

La conique μ sera une parabole si l'on a $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire si le point M est sur l'ellipse touchant les côtés du triangle ABC en leurs milieux

(*) Cet article, sans être entièrement nouveau, peut intéresser nos jeunes lecteurs. (*Rédaction*).

A', B', C'. Ce sera une ellipse si $\varepsilon < 0$, et une hyperbole si $\varepsilon > 0$; ces hypothèses correspondent respectivement au point M intérieur ou extérieur à l'ellipse ε.

Supposons M situé sur le côté BC; l'équation (1) se réduit à

$$x(y_1 z + z_1 y) = 0,$$

et représente la droite BC, et la polaire de M par rapport à l'angle BAC. Si M coïncide avec B ou C, μ est remplacée par les couples de droites (BC, BA) ou (BC, CA). Enfin, lorsque M est au milieu A' de BC, on trouve pour μ le côté BC et la parallèle à BC par A.

Pour avoir un cercle, il faut placer M au point de Lemoine K (a, b, c). K est donc toujours intérieur à l'ellipse ε.

Cherchons la condition pour que la conique μ soit une hyperbole équilatère. L'équation (4) représente les parallèles aux asymptotes de μ menées par C; comme les coordonnées normales x et y ne diffèrent que par le facteur sin C des coordonnées cartésiennes prises par rapport aux axes CA et CB, les valeurs du rapport $(y : x)$ tirées de (4) donnent les coefficients angulaires m, m' des asymptotes; la condition de perpendicularité étant

$$1 + mm' + (m + m') \cos C = 0,$$

nous devons poser

$$1 + \frac{ay_1}{bx_1} - \frac{ax_1 + by_1 - cz_1}{bx_1} \cos C = 0,$$

égalité qui se ramène facilement à

$$x_1 \cos A + y_1 \cos B + z_1 \cos C = 0.$$

On en conclut que le point M se trouve sur l'axe orthique de ABC (polaire trilinéaire de l'orthocentre).

3. Le centre N de la conique μ est déterminé par les équations

$$\frac{y_1 z + z_1 y}{a} = \frac{z_1 x + x_1 z}{b} = \frac{x_1 y + y_1 x}{c}. \tag{5}$$

Les deux séries de variables (x, y, z), $(x_1, y_1 z_1)$ entrent symétriquement dans le système (5). Par suite, la conique circonscrite à ABC et ayant pour centre M jouit de la propriété que le centre d'homologie de ABC et du triangle formé par les tangentes en A, B, C, coïncide avec N.

Si l'on égale les rapports (5) à une quantité $\lambda x_1 y_1 z_1$, on trouve :

$$\frac{y_1 z + z_1 y}{a} = \lambda x_1 y_1 z_1 \quad \text{ou} \quad \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = \lambda a x_1,$$

$$\frac{z}{z_1} + \frac{x}{x_1} = \lambda b y_1, \quad \frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = \lambda c z_1 ;$$

d'où, en résolvant par rapport à $\frac{x}{x_1}, \frac{y}{y_1}, \frac{z}{z_1}$,

$$\frac{x}{x_1(-ax_1 + by_1 + cz_1)} = \frac{y}{y_1(ax_1 - by_1 + cz_1)} = \frac{z}{z_1(ax_1 + by_1 - cz_1)}.$$

Inversement

$$(6) \qquad \frac{x_1}{x(-ax + by + cz)} = \frac{y_1}{y(ax - by + cz)} = \frac{z_1}{z(ax + by - cz)}.$$

Si le point M parcourt la droite

$$Lx_1 + My_1 + Nz_1 = 0,$$

le centre N décrit la conique ν représentée par l'équation

$$(7) \qquad \begin{aligned} Lx(-ax + by + cz) + My(ax - by + cz) \\ + Nz(ax + by - cz) = 0 \end{aligned}$$

qu'on peut écrire

$$-2\Sigma Lax^2 + \Sigma Lx \Sigma ax = 0.$$

Les points à l'infini sur ν appartiennent donc aussi à la conique

$$(8) \qquad Lax^2 + Mby^2 + Ncz^2 = 0.$$

En éliminant z entre les équations (3) et (8), on voit qu'ils se trouvent aussi sur les droites

$$(9) \qquad a(Lc + Na)x^2 + 2Nabxy + b(Mc + Nb)y^2 = 0.$$

Ces droites sont réelles et distinctes, imaginaires ou confondues, et la conique ν sera une hyperbole, une ellipse ou une parabole, suivant que la quantité

$$(10) \qquad MNa + NLb + LMc$$

est négative, positive ou nulle.

L'équation

$$MNa + NLb + LMc = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{a}{L} + \frac{b}{M} + \frac{c}{N} = 0$$

représente, en coordonnées tangentielles, l'ellipse ε qui touche les côtés du triangle ABC en leurs milieux. Donc suivant que la droite parcourue par M touche cette ellipse, la coupe en deux points réels ou ne la rencontre pas, la conique ν est une parabole, une hyperbole ou une ellipse.

Ce résultat s'explique aisément. En effet, si la droite rencontre l'ellipse aux points M_1, M_2, la conique μ devient une parabole quand M coïncide avec M_1 ou M_2; N se transporte alors à l'infini sur l'axe de la parabole.

La conique ν est une hyperbole équilatère lorsqu'on a

$$La + Mb + Nc = 0.$$

On voit que le point M doit se mouvoir sur une droite passant par le point de Lemoine.

Faisons mouvoir le point M à l'infini, c'est-à-dire supposons

$$L = a, \quad M = b \quad N = c;$$

l'équation (7) deviendra

$$\Sigma a^2x^2 - 2\Sigma abxy = 0.$$

La conique ν se confond donc avec l'ellipse ε. Ce résultat s'explique aisément par la réciprocité entre les points M et N.

Si le point M se meut sur l'axe orthique, la conique μ, on l'a vu, est une hyperbole équilatère; son centre, d'après un théorème connu, parcourt donc le cercle des neuf points. Cette conclusion résulte aussi de l'équation (7) où l'on fait

$$L = \cos A, \quad M = \cos B, \quad N = \cos C.$$

Enfin, si le point M parcourt la droite de Lemoine, représentée par l'équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0,$$

on trouve pour l'équation de la conique ν :

$$x^2 + y^2 + z^2 - \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)yz - \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)zx - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)xy = 0.$$

Cette courbe passe par les milieux de BC, CA, AB et par les pieds des symédianes.

NOTRE SUPPLÉMENT.

Nous publions, avec la précédente livraison, un Supplément relatif à la géométrie non euclidienne, où M. Lechalas et moi, nous exposons, sous deux points de vue différents, une idée ingénieuse du regretté Delbœuf(*).

Qu'il nous soit permis de donner, à ce propos, sous forme de tableau synoptique, les titres des divers Suppléments relatifs à la géométrie non euclidienne que *Mathesis* a publiés depuis six ans (plus de deux cents pages). Le lecteur trouvera dans ces Suppléments un exposé assez complet de l'histoire et des principes fondamentaux de la géométrie générale, pour qu'il soit à même de se former une conviction raisonnée sur la matière.

Historique. 1. P. MANSION. Sur les postulats et les axiomes d'Euclide (*Mathesis*, 1891, (2), I, Supplément I, pp. 5-15).

2. P. MANSION. La géométrie non euclidienne avant Lobatchefsky (*Mathesis*, 1896, (2), VI, Supplément I, pp. 1-11).

3. P. MANSION. Analyse des recherches du P. Saccheri, S. J., sur le postulatum d'Euclide (*Mathesis*, 1891, (2), I, Supplément I, pp. 15-29).

4. P. MANSION. Sur la géométrie non euclidienne: Ampère, Fourier, De Tilly (Ibid., pp. 1-5).

5. P. MANSION. Notice sur les recherches de M. De Tilly en Métagéométrie (*Mathesis*, 1895, (2), V, Supplément III, pp. 1-12).

Principes. 6. P. MANSION. Premiers principes de Métagéométrie ou Géométrie générale (*Mathesis*, 1896, (2), VI, Supplément IV, pp. 1-48) (**).

7. P. MANSION. Essai d'exposition élémentaire des principes fondamentaux de la géométrie non euclidienne de Riemann (*Mathesis*, 1895, (2), V, Supplément, II, pp. 8-21).

8. P. MANSION. Relation entre les distances de cinq points en géométrie non euclidienne (*Mathesis*, 1891, (2), 1, Supplément I, pp. 29-32).

(*) Dans cette note, nous employons certaines formules relatives aux coordonnées dans le plan ou l'espace non euclidien qui pourraient arrêter un instant le lecteur. Pour les démontrer, il suffit de considérer des coordonnées analogues sur la sphère; on prouvera aisément que, sur cette surface, on a $x^2 + y^2 = R^2$. Par suite, il en sera de même pour un plan riemannien, puisque les formules qui servent de point de départ à la démonstration sont les mêmes pour ce plan et pour la sphère. On étend aisément les calculs aux cas où il y a plus de deux coordonnées et à celui où l'espace est lobatchefskien.

(**) Nous prions le lecteur de corriger dans cet article une faute qui nous a été signalée par M. Lechalas. Page 23, note 3, ligne 2 et p. 31, ligne 19 et dernière ligne, nous disons qu'il n'y a pas de similitude en géométrie non euclidienne. Cela est vrai pour des figures rectilignes. Mais dans tous les systèmes de géométrie, les faces d'un trièdre découpent sur deux sphères de rayons inégaux et dont le centre est au sommet du trièdre, des triangles sphériques semblables. De plus, en géométrie lobatchefskienne, il existe sur une horisphère des triangles horicycliques semblables. Notre assertion était donc trop générale.

9. De Tilly. Essai de géométrie analytique générale (*Mathesis*, 1893, (2), III, Supplément II, pp. 1-80).

10. Ch. J. de la Vallée Poussin. Sur la géométrie non euclidienne. Rapport sur ce travail par M. De Tilly (*Mathesis*, 1895, (2), V, Supplément, V, pp. 8-16).

En outre, il a paru, dans le texte même de *Mathesis* un certain nombre de notes plus courtes relatives aux principes de la Géométrie (*).

Nous engageons vivement ceux qui ne sont pas encore au courant des théories de la géométrie générale, à se familiariser avec les principes de cette science. C'est le plus sûr moyen de comprendre à fond les principes de la géométrie euclidienne elle-même et de ne pas se laisser séduire par des pseudo-démonstrations du postulatum d'Euclide (**). (P. M.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

5. *Notes de géométrie analytique.* 1° *Axes de symétrie des coniques.* On sait que les axes d'une conique sont parallèles aux bissectrices de l'angle de deux côtés opposés du quadrilatère formé par les points d'intersection d'un cercle et de la courbe.

L'équation

$$lx^2 + 2hxy + my^2 + 2gx + 2fy + n = 0$$

d'une conique pouvant s'écrire :

$$lx^2 + ly^2 + 2gx + 2fy + n + y\,[2hx + (m - l)y] = 0$$

on en conclut, d'après ce qui précède, que les axes de symétrie de la conique sont parallèles aux bissectrices de l'angle des droites

$$y = 0, \quad 2hx + (m - l)\,y = 0,$$

ou parallèles aux droites ayant pour équations :

$$\pm y = \frac{2hx + (m - l)\,y}{\sqrt{4h^2 + (m - l)^2}}.$$

Ces équations représentent évidemment les axes quand l'origine des coordonnées est au centre.

(*) Voir 1893, (2), III, 47, 134-136, 249; 1894, (2), IV, 183-186; 1895, V, 63-65; 270-271; 1896, (2), VI, 7-12; 12-13; 109-112; 225-228.

(**) Dans ces démonstrations, sous une forme ou sous une autre, on attribue à la droite des propriétés autres que celles que l'on a données au début de la géométrie, comme caractérisant cette ligne.

L'équation du couple des droites issues de l'origine et parallèles aux axes de la conique est donc :

$$y^2[4h^2+(m-l)^2]=[2hx+(m-l)y]^2$$

ou

$$x^2+\frac{m-l}{h}xy-y^2=0.$$

2° *Équation du couple des asymptotes.* *a*) Si P et Q représentent des polynomes du premier degré en x et y, et k une constante quelconque, l'équation

$$PQ+k^2=0$$

représente une hyperbole dont le couple des asymptotes a pour équation :

$$PQ=0.$$

b) L'équation générale

$$lx^2+2hxy+my^2+2gx+2fy+n=0$$

d'une conique peut s'écrire :

$$lx^2+2hxy+my^2+2gx+2fy+\frac{2fgh-lf^2-mg^2}{h^2-lm}$$

$$+n-\frac{2fgh-lf^2-mg^2}{h^2-lm}=0.$$

Par conséquent, l'équation

$$lx^2+2hxy+my^2+2gx+2fy+\frac{2fgh-lf^2-mg^2}{h^2-lm}=0$$

qui représente deux droites, ainsi qu'on le reconnaît sans peine en observant que son discriminant est identiquement nul, représente le couple des asymptotes de la conique.

On peut encore l'écrire :

$$lx^2+2hxy+my^2+2gx+2fy+g\cdot\frac{fh-mg}{h^2-lm}+f\frac{gh-lf}{h^2-lm}=0$$

ou, en désignant par α, β les coordonnées du centre de la courbe,

$$lx^2+2hxy+my^2+2gx+2fy-g\alpha-f\beta=0.$$

Cette équation ne diffère de celle de la conique que par le terme constant ; elle représente donc un système concentrique à la conique.

Les asymptotes passent donc par le centre. (H. MANDART.)

*●. *Théorème d'Arithmétique*(*). — *Il existe une infinité de nombres triangulaires carrés parfaits.* En effet, soit

$$\frac{n(n+1)}{2} = p^2$$

un tel nombre. Le nombre triangulaire

$$\frac{(4n^2+4n)(4n^2+4n+1)}{2} = (2p)^2(2n+1)^2$$

jouira de la même propriété. De ce second nombre, on en déduit un troisième, ensuite un quatrième, etc.

Exemples :

$$\frac{1.2}{2} = 1^2, \quad \frac{8.9}{2} = 6^2, \quad \frac{49.50}{2} = 35^2,$$

$$\frac{288.289}{2} = 204^2, \ldots \quad \frac{9800.9801}{2} 6930^2, \ldots.$$

(L. Collette).

CONGRÈS INTERNATIONAL DE MATHÉMATICIENS.

Nous sommes heureux d'apprendre que l'idée des Congrès internationaux de mathématiciens, qui a surgi à la fois en France, en Allemagne et en Russie a rencontré l'adhésion d'un grand nombre de savants. La première réunion aura lieu cette année à Zurich, les 9, 10 et 11 août, et semble devoir être très nombreuse. On sait que les Congrès analogues de mathématiciens allemands ont amené la publication d'œuvres historiques de premier ordre (histoire de l'invariantologie, histoire de la théorie des fonctions, etc); les congrès internationaux promettent d'être plus féconds encore. (P. M., J.N.)

BIBLIOGRAPHIE.

Cours de Géométrie descriptive, à l'usage des Candidats à l'École polytechnique, etc., par X. Antomari, professeur de mathématiques spéciales au lycée Carnot. Paris, Nony et Cie, 1897 (572 p. gr. in-8e, avec nombreuses figures dans le texte). Prix : 10 frs.

(*) Nous publions cette note comme exercice d'algèbre. — On peut démontrer que les exemples indiqués donnent *tous* les nombres triangulaires carrés parfaits. (J. N.)

Cet ouvrage mérite d'être recommandé à tous ceux qui étudient ou enseignent la géométrie descriptive, tout au moins la partie de cette science qui correspond au programme d'admission à l'École polytechnique.

Le plan général en est bien ordonné (*) : après l'exposé des principes fondamentaux de la méthode des projections et de la représentation des points, de la droite et du plan, et des relations qui lient entre elles les représentations de ces figures, l'auteur donne un aperçu très clair et très développé des méthodes proprement dites de la géométrie descriptive (changement des plans de projection, rotations, rabattements) et de leur application à la résolution des problèmes des distances et des angles. Le chapitre suivant est consacré aux sections planes et aux intersections mutuelles des polyèdres, en particulier, des pyramides et des prismes. Immédiatement après viennent des notions sur les projections cotées, ce qui nous paraît logique, puisque les procédés de la géométrie cotée sont assez simples pour pouvoir être compris par les élèves qui sont déjà familiarisés avec les problèmes généraux sur la droite et le plan, en projections orthogonales, et que d'ailleurs les applications pratiques de la géométrie cotée ne concernent guère que la droite et le plan.

Les livres II, III, IV, qui traitent des surfaces courbes, comprennent les questions usuelles relatives au tracé des plans tangents et des sections planes des cônes, des cylindres et des surfaces de révolution, ainsi que des intersections mutuelles de ces surfaces.

Quelques notes complémentaires, substantielles, donnent un aperçu sommaire des surfaces réglées gauches, spécialement celles du second degré, et de l'hélice.

Ce qui caractérise surtout l'ouvrage c'est une grande clarté d'exposition, le choix judicieux des exemples résolus, avec tous les développements qu'ils comportent,

---

(*) Voici au reste un sommaire plus détaillé de l'ouvrage. LIVRE PREMIER. Les principes de la géométrie descriptive. *Introduction.* La méthode des projections. Ch. 1. Représentation des corps. 2. La ligne droite. 3. Le plan. 4. La droite et le plan combinés. 5. Les méthodes de la géométrie descriptive (changements de plan de projection, rotations, rabattements). 6. Distances et angles; construction des angles trièdres. 7. Sections planes, intersections et ombres des polyèdres. 8. Notions de géométrie cotée. LIVRE II. *La détermination des surfaces et les plans tangents.* 1. Détermination des surfaces (sphère, cylindres, cônes, surfaces de révolution). 2. Plans tangents aux cônes et aux cylindres. 3. A la sphère. 4. Aux surfaces de révolution. LIVRE III. *Sections planes des surfaces.* 1-2. Sections planes des cônes; développement de la surface latérale; transformée de la section. 3. Sections planes de la sphère; 4. Des surfaces de révolution. LIVRE IV. *Intersection de surfaces.* 1. Intersection de deux cônes ou cylindres. 2. D'un cône ou d'un cylindre avec une surface de révolution. 3. Intersection de deux surfaces de révolution.

Compléments et notes. Problèmes sur les surfaces réglées du second degré, ou quelconques. — Intersection d'une droite avec une quadrique à sections planes elliptiques. — Notions sur l'hélice. — Exercices divers. (Il y en a, en outre, dans le livre, après chaque chapitre). — Sujets de concours à l'École polytechnique et à l'École centrale des Arts et Manufactures.

sans que l'auteur soit tombé dans le défaut de prolixité si commun à bon nombre d'ouvrages sur la géométrie descriptive, enfin la série d'exercices ou de questions à résoudre qui termine chaque chapitre, et dont le choix est généralement très heureux et d'une difficulté bien graduée.

Ajoutons qu'incidemment, après avoir traité de la représentation du point, de la droite et du plan, l'auteur fait remarquer qu'on peut sans inconvénient supprimer la ligne de terre dans les épures. Mais il a bien soin de dire que cette suppression ne procure qu'une facilité de dessin, en ce qu'elle ne revient qu'à supposer que l'un des plans de projection se déplace parallèlement à lui-même de telle sorte qu'un corps se trouve toujours dans le premier angle dièdre. Il se garde, avec raison, de supprimer systématiquement cette ligne de terre dans la suite.

Remarquons encore que l'auteur emploie couramment le terme de droite *frontale* pour désigner une droite parallèle au plan vertical de projection. Cet exemple mériterait d'être suivi par tous ceux qui enseignent la géométrie descriptive, comme ils emploient déjà tous le terme de droite *horizontale* pour désigner une droite parallèle au plan horizontal. Les expressions de *droite de bout* et *plan de bout* appliquées à des droites ou des plans perpendiculaires au plan vertical nous paraissent moins heureuses; elles éveillent plutôt dans l'esprit de l'auditeur l'idée d'une figure verticale, debout, c'est-à-dire perpendiculaire au plan horizontal.

J. Van Rysselberghe.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 267.

(Voir *Mathesis*, (1), III, 175, 192).

On a

$$1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{q^5}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\cdots$$

$$=1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^4}{[(1-q)(1-q^2)]^2}+\frac{q^9}{[(1-q)(1-q^2)(1-q^3)]^3}+\cdots$$

(E. Catalan).

Solution par M. Stuyvaert. — Lemme. Si une série

$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

est convergente, et reste telle quand on remplace ses termes par leur valeur absolue, la série qui a pour terme général

$$U_n=(u_n)^n$$

se trouve dans le même cas.

Car $\sqrt[n]{U_n}=u_n$ et $\lim u_n=0$. Donc l'une des règles de convergence de Cauchy est applicable.

La condition énoncée plus haut est suffisante, mais non pas nécessaire. La série U_n serait encore convergente si l'on avait seulement lim u_n inférieure à l'unité.

Les séries de la question 267 se trouvent dans le cas du lemme. La première est convergente pour toute valeur positive de q, sauf $q = 1$. En effet le rapport du terme u_n au terme précédent est $\frac{q}{1-q^n}$. Si $q < 1$, cette quantité a pour limite $q < 1$; si $q > 1$ la limite est nulle. Donc la seconde série est aussi convergente.

Cependant l'égalité de l'énoncé est fausse, au moins pour certaines valeurs de q. Soit $0 < q < \frac{1}{2}$, ou $q < 1 - q$, *a fortiori* $q < 1$; donc

$$q^n < q^{n-1} < q^{n-2} \cdots < q^2 < q < 1$$
$$q < 1 - q < 1 - q^2 < 1 - q^3 \cdots < 1 - q^n.$$

Les termes de la première série sont alors plus petits que 1, car les facteurs q du numérateur sont inférieurs aux facteurs du dénominateur et en même nombre; tous ces termes sont d'ailleurs positifs. Les termes de la deuxième série sont de la forme $(u_n)^n$, donc plus petits que les termes correspondants de la première (sauf pour les deux premiers). Donc les sommes de ces deux séries ne peuvent être égales, et il y a lieu de compléter ou de modifier l'énoncé.

×Question 803.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 31).

Soient α, β, γ *les arcs de grand cercle joignant les sommets du triangle sphérique* ABC *au centre isogone* Z (*point d'où l'on voit les côtés* BC, CA, AB *sous le même angle*). *Démontrer la relation*

$$S \sin\beta \sin\gamma \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin a \sin h_a,$$

h_a *désignant la hauteur abaissée de* A *sur* BC. (Déprez.)

Solution par M. Cristesco. On sait que

$$\sin a \sin h_a = \sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}. \quad (1)$$

Les triangles ZBC, ZCA, ZAB donnent respectivement

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos\beta\cos\gamma - \tfrac{1}{2}\sin\beta\sin\gamma, \\ \cos b &= \cos\gamma\cos\alpha - \tfrac{1}{2}\sin\gamma\sin\alpha, \\ \cos c &= \cos\alpha\cos\beta - \tfrac{1}{2}\sin\alpha\sin\beta; \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

car chacun des angles BZC, CZA, AZB vaut 120°.

Si l'on élève les égalités (2) au carré, et qu'on les ajoute ensuite membre à membre, on obtient :

$$\mathrm{S}\cos^2 a = \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{S}\cos^2\alpha + \tfrac{3}{4}\,\mathrm{S}\cos^2\beta\cos^2\gamma - \mathrm{S}\cos\beta\cos\gamma\sin\beta\sin\gamma. \qquad (3)$$

Si l'on multiplie membre à membre les égalités (2), on trouve

$$\left.\begin{aligned} \cos a\cos b\cos c = &-\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\mathrm{S}\cos^2\alpha - \tfrac{1}{8}\mathrm{S}\cos^2\beta\cos^2\gamma + \tfrac{3}{8}\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma \\ &- \tfrac{1}{2}\mathrm{S}\cos\beta\cos\gamma\sin\beta\sin\gamma + \tfrac{3}{4}\mathrm{S}\cos\beta\cos\gamma\sin\beta\sin\gamma\sin^2\alpha. \end{aligned}\right\}$$

A l'aide de (3) et (4), l'égalité (1) devient :

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sin a\sin h_a = \sqrt{\mathrm{S}\cos^2\alpha - 2\mathrm{S}\cos^2\beta\cos^2\gamma + 3\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma + 2\mathrm{S}\cos\beta\cos\gamma\sin\beta\sin\gamma\sin^2\alpha}.$$

Or si l'on ajoute membre à membre les identités :

$$\cos^2\alpha - \cos^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\gamma\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma = \sin^2\beta\sin^2\gamma\cos^2\alpha,$$
$$\cos^2\beta - \cos^2\beta\cos^2\gamma - \cos^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma = \sin^2\gamma\sin^2\alpha\cos^2\beta,$$
$$\cos^2\gamma - \cos^2\gamma\cos^2\alpha - \cos^2\beta\cos^2\gamma + \cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma = \sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\gamma,$$

on obtient :

$$\mathrm{S}\cos^2\alpha - 2\mathrm{S}\cos^2\beta\cos^2\gamma + 3\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma = \mathrm{S}\sin^2\beta\sin^2\gamma\cos^2\alpha.$$

Donc l'égalité (5) revient à :

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sin a\sin h_a = \sqrt{\mathrm{S}\sin^2\beta\sin^2\gamma\cos^2\alpha + 2\mathrm{S}\cos\beta\cos\gamma\sin\beta\sin\gamma\sin^2\alpha}$$
$$= \sqrt{(\mathrm{S}\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha)^2} = \mathrm{S}\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha.$$

Note. Voici une autre manière de vérifier la relation proposée. Appelons x, y les angles ZAB, ZAC; nous aurons

$$\sin\mathrm{A} = \sin x\cos y + \sin y\cos x. \qquad (6)$$

Les triangles ZAB, ZAC donnent

$$\frac{\sin x}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin 120^\circ}, \quad \frac{\sin y}{\sin\gamma} = \frac{\sin b}{\sin 120^\circ},$$
$$\cos\beta = \cos\alpha\cos c + \sin\alpha\sin c\cos x,$$
$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos b + \sin\alpha\sin b\cos y.$$

Tirons de là les valeurs de $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$, $\cos y$ pour les substituer dans l'égalité (a); il vient

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \sin\alpha \sin b \sin c \sin A =$$
$$\sin\beta(\cos\gamma - \cos\alpha\cos b) + \sin\gamma(\cos\beta - \cos\alpha\cos c).$$

Remplaçons encore $\cos b$, $\cos c$ par les valeurs

$$\cos\alpha\cos\gamma - \tfrac{1}{2}\sin\alpha\sin\gamma, \quad \cos\alpha\cos\beta - \tfrac{1}{2}\sin\alpha\sin\beta$$

et observons que

$$\sin b \sin c \sin A = \sin a \sin h_a;$$

nous aurons

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \sin\alpha \sin a \sin h_a = \sin\beta(\cos\gamma - \cos^2\alpha\cos\gamma + \tfrac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha\sin\gamma)$$
$$+ \sin\gamma(\cos\beta - \cos^2\alpha\cos\beta + \tfrac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha\sin\beta).$$

Réduisons encore en remarquant que

$$\cos\gamma - \cos^2\alpha\cos\gamma = \cos\gamma\sin^2\alpha, \quad \cos\beta - \cos^2\alpha\cos\beta = \cos\beta\sin^2\alpha, \text{ etc.}$$

(J. N.).

Question 978.

(Voir *Mathesis* (2) IV p. 239).

Une courbe fermée plane C *tourne dans son plan autour d'un point* O. *On envisage la courbe* C_1, *lieu du point de cette courbe pour lequel la tangente est parallèle à une direction fixe.*

1° *On demande de construire la tangente en un point de* C_1.

2° *Démontrer que l'aire limitée par la courbe* C_1 *est minima quand le point* O *se confond avec le centre de gravité de la courbe* C, *la densité en chaque point de cette courbe étant supposée proportionnelle à la courbure.*

3° Ω *désignant cette aire minima et* Ω' *l'aire relative à un autre centre de rotation* O', *démontrer la relation*

$$\Omega' = \Omega + \pi\overline{OO'}^2 \qquad \text{(R. Bricard.)}$$

Solution par M. Stuyvaert. Prenons pour pôle le centre de rotation O, et pour axe, une parallèle Ox à la direction fixe.

Soit A le point de contact de la tangente AT parallèle à Ox avec la position initiale de la courbe C. A est donc un point de C_1.

Dans la position voisine de C, le point A vient se placer en A_1 après avoir décrit un arc de cercle, et le nouveau point de contact est B. Les tangentes en A_1 et B font un angle $\Delta\alpha$ qui est égal à l'angle de rotation AOA_1. La position limite de AB est la tangente en A à la courbe C_1 (Nous supposons la convexité de C tournée vers O).

Dans le triangle AA_1B_1 on a :

$$\frac{\sin A_1AB}{\sin ABA_1} = \frac{A_1B}{AA_1} \qquad (1)$$

l'arc A_1B est l'accroissement Δs de l'arc de la courbe C, correspondant à $\Delta\alpha$ et l'arc AA_1 est égal à $r\Delta\alpha$, r étant le rayon vecteur OA.

Quand on passe à la limite, les droites AA_1, BA_1, AB deviennent respectivement la perpendiculaire An à OA, la tangente AT à C et la tangente cherchée At à C_1. Donc si l'on appelle β l'angle tAT et θ l'angle $AO\varpi$, la proportion (1), par passage à la limite, devient

$$(2) \qquad -\frac{\cos(\beta-\theta)}{\sin\beta} = \frac{ds}{rd\alpha} = \frac{\rho}{r},$$

ρ désignant le rayon de courbure de C en A.

De la relation (2), on tire

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{-r\cos\theta}{r\sin\theta+\rho}.$$

Soit D le centre de courbure de C au point A ; DA rencontre $O\varpi$ en E, $DE = r\sin\theta + \rho$ et $OE = r\cos\theta$. Donc

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{-OE}{DE},$$

c'est-à-dire que la tangente en A à la courbe C_1 est perpendiculaire à OD.

Si l'on fait la figure dans le cas où O est dans la concavité de la courbe, on trouve par des raisonnements semblables

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{r\cos\theta}{\rho - r\sin\theta}$$

et l'on arrive, que ρ soit supérieur ou inférieur à $r\sin\theta$, au même résultat que précédemment, à savoir que *la tangente en* A *à la courbe* C_1 *est perpendiculaire au rayon vecteur* OD *aboutissant au centre de courbure* D *de la courbe* C *au même point* A.

2° L'accroissement ΔS_1 de l'aire S_1 de la courbe C_1, quand on passe de la position A à la position A_1 est le triangle curviligne OAB.

Appelons $\Delta\theta_1$ l'angle BOA ; on a $dS_1 = \frac{1}{2} r^2 d\theta_1$. Mais, en faisant tourner OBA_1 autour de O jusqu'à ce que OA_1 vienne en OA, on voit que B se place sur la courbe C et le triangle OBA_1 est donc une portion de la surface S de la courbe C ; appelons $\Delta\theta$ l'angle BOA_1 ; on aura

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

Or la figure montre, si C tourne sa convexité vers O, que $BOA = BOA_1 + A_1OA$, $\Delta\theta_1 = \Delta\theta + \Delta\alpha$.

Donc on a la relation analogue pour les différentielles des aires, savoir :

$$dS_1 = \frac{1}{2} r^2 d\theta + \frac{1}{2} r^2 d\alpha.$$

Pour avoir S_1 il faudra prendre l'intégrale du second membre entre des limites telles que la courbe initiale C soit complètement décrite. Entre ces limites $\int \frac{1}{2} r^2 d\theta$ est la surface S limitée par la courbe C, prise avec le signe *moins*.

Si la courbe C tourne sa concavité vers O, on verra de même que $\Delta\theta_1 = \Delta\alpha - \Delta\theta$, mais alors $\int \frac{1}{2} r^2 d\theta$ est la surface S prise positivement. Dans tous les cas, les limites de α sont 0 et 2π, puisque la tangente doit envelopper complètement la courbe, et l'on a toujours

$$S_1 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\alpha - S.$$

Déterminons les coordonnées X, Y du barycentre de courbure G de la courbe initiale C. Par définition, le poids de la courbe est

$$\int_0^{2\pi} \frac{k}{\rho} ds = \int_0^{2\pi} k d\alpha$$

et les coordonnées X, Y sont données par les relations :

$$X = \frac{\int_0^{2\pi} kx d\alpha}{\int_0^{2\pi} k d\alpha} = \frac{\int_0^{2\pi} x d\alpha}{\int_0^{2\pi} d\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x d\alpha,$$

$$Y = \frac{\int_0^{2\pi} y d\alpha}{\int_0^{2\pi} d\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y d\alpha,$$

et, si les axes sont transportés parallèlement, l'origine en G, on a, x' et y' étant les nouvelles coordonnées,

$$\int_0^{2\pi} x'd\alpha = \int_0^{2\pi} y'd\alpha = 0.$$

Mais, par ce changement de coordonnées, on trouve

$$\begin{aligned}\int \tfrac{1}{2} r^2 d\alpha &= \int \tfrac{1}{2} x^2 d\alpha + \int \tfrac{1}{2} y^2 d\alpha \\ &= \int \tfrac{1}{2} (X + x')^2 d\alpha + \int \tfrac{1}{2} (Y + y') d\alpha. \qquad (a)\end{aligned}$$

Le premier terme vaut

$$\tfrac{1}{2} X^2 \int_0^{2\pi} d\alpha + X \int_0^{2\pi} x' d\alpha + \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} x'^2 d\alpha;$$

la première partie est égale à πX^2 et la deuxième à 0. De même pour le second terme de (a); donc

$$\begin{aligned}\int \tfrac{1}{2} r^2 d\alpha &= \pi (X^2 + Y^2) + \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x'^2 + y'^2) d\alpha \\ &= \pi \overline{OG}^2 + \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x'^2 + y'^2) d\alpha,\end{aligned}$$

et enfin,

$$S_1 = \pi \overline{OG}^2 + \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x'^2 + y'^2) d\alpha - S;$$

les deux derniers termes étant indépendants de la position du point O, cette égalité démontre la deuxième et la troisième partie de l'énoncé.

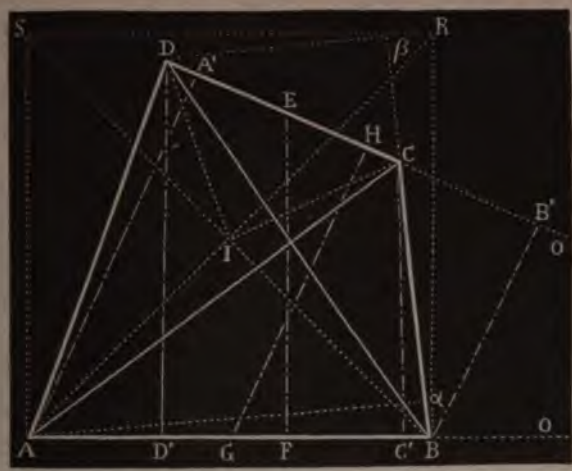
×Question 1095.

Voir (*Mathesis*, (2) VI, p. 264).

Construire un pseudocarré ABCD, *connaissant :*

1° *Le côté* AB *et les distances des sommets* A, B *au côté opposé* CD. 2° *Le côté* AB *et les distances des sommets* C, D *au côté* AB. 3° *La diagonale* AC *et le côté* AB *et soit la distance du milieu de* AB *à* CD, *soit la distance du milieu de* CD *à* AB. 4° *Les côtés opposés* AB, CD *et leur angle.* 5° *Les côtés opposés* AB, CD *et la diagonale* AC. 6° *La diagonale* AB *et les angles opposés* C, D. 7° *Les côtés* AB, AD *et l'angle* B. (Déprez.)

Solution par M. J. Jonesco(*). Soient $AA' \perp CD$, $BB' \perp CD$; $DD' \perp AB$; $CC' \perp AB$; $A\alpha \perp BC$; $D\beta \perp BC$. Soient E le milieu de CD et G le milieu



de AB; $EF \perp AB$; $GH \perp BC$. Appelons I le centre du carré ABRS, O l'intersection des droites AB, CD. On sait que

$$AA' = DB',\ BB' = CA',\ DD' = AC',\ CC' = BD',\ ID = IC,\ A\alpha = B\beta,$$
$$IDC = ICD = 45°.$$

Donc :

$$EF = \tfrac{1}{2}(DD' + CC') = \tfrac{1}{2}(DD' + DB'),$$
$$GH = \tfrac{1}{2}(AA' + BB') = \tfrac{1}{2}(AA' + CA').$$

Si l'on fait tourner l'angle CID autour de I, on prouvera aisément l'égalité des angles CIR, DIS, BDC.

Maintenant on peut résoudre les 7 questions :

1° On construira le triangle rectangle ACC' dont on connaît $AC' = DD'$, et CC'. Menons $BD \perp$ et $= AC$.

2° On construira le triangle rectangle AA'C dont on connaît AA' et $A'C = BB'$. Le sommet B se trouve à l'intersection d'une parallèle à A'C menée à la distance BB' de la droite CD, et d'une circonférence ayant A pour centre et AB pour rayon. Menons ensuite $BD \perp$ et $= AC$.

(*) La notation $\perp$ signifie *perpendiculaire à*. Nous préférons que nos collaborateurs n'emploient pas cette notation (*Réd*.)

3° On construira le triangle rectangle AC'C dont on connaît AC et $AC' + CC' = DD' + CC' = 2EF$. Le reste comme au N° 1.

3° On construira le triangle rectangle AA'C dont on connaît AC et $AA' + A'C = AA' + BB' = 2GH$. C'est une question connue. Le reste comme au N° 2.

4° On trouvera le point I. Faisons $CIR = BOC$, et le point C se trouvera à l'intersection de IC avec la circonférence ayant A pour centre et AC pour rayon.

5° On décrira sur AC les segments capables des angles donnés. La question revient à inscrire entre les deux circonférences une droite BO donnée en direction ($\perp$ AC) et en grandeur (= AC), question connue.

6° On décrira deux circonférences ayant A et C pour centres et AB, et CD pour rayons. Le reste comme au N° 5.

7° Soit AB donné, et l'angle $ABC = B$. Menons $A\alpha \perp BC$, prenons $B\beta = A\alpha$; menons $\beta D \perp BC$. Le point D se trouvera à l'intersection de $D\beta$ avec la circonférence ayant A pour centre et AD pour rayon.

Remarque. J'ai proposé la dernière question dans la Revue : « *Gazeta Matematica* » (qui paraît à Bucharest), 1ère année, n° 12.

Note. — M. Colette nous a envoyé une solution de la même question, que nous regrettons, faute de place, de ne pouvoir analyser.

Question CLXXXII.

(N. C. M., T. II., Lausanne, III, p. 219).

Tout cube est la différence de deux carrés, dont l'un au moins est divisible par 9. (Tait).

Solution par M. E. Fauquembergue. Soit A^3 le cube donné; posons

$$x^2 - y^2 = A^3.$$

Nous aurons une solution de cette équation en prenant

$$x + y = A^2, \quad x - y = A;$$

d'où

$$x = \frac{A\,A-1}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{A\,A-1}{2}.$$

Si A est multiple de 3, x et y le seront aussi et les deux carrés x^2 et y^2 seront multiples de 9.

Si $A = 3n + 1$, y sera multiple de 3; et si $A = 3n - 1$, x sera multiple de 3. Donc, etc ...

REMARQUE. Cette décomposition de A^3 suffit pour démontrer la proposition énoncée, mais ne donne pas toutes les solutions de l'équation.

Pour une solution complète, voir *Intermédiaire des Mathématiciens*, t. II, 1895, p. 309.

QUESTIONS D'EXAMEN.

781. Si les côtés d'un triangle sont en progression arithmétique, les rayons des cercles exinscrits sont en progression harmonique.

(PATERNO).

De $b = \frac{1}{2}(a + c)$, on déduit $p - b = \frac{1}{2}(p - a + p - c)$; donc $\frac{S}{r_b} = \frac{1}{2}\left(\frac{S}{r_a} + \frac{S}{r_c}\right)$.

782. Par le point d'intersection A de deux circonférences O, O', on mène une sécante quelconque qui rencontre ces lignes en B et B'; les diamètres BO et B'O' se coupent en M. Trouver le lieu géométrique du point M.

L'angle $OMO' = OAO'$; car $OBA = BAO$, $O'B'A = O'AB'$. Le point M décrit donc une circonférence passant par O,O' et par le second point d'intersection des circonférences données.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1101. (*Rectification*). Développer le déterminant suivant à $2n + 2$ lignes

$$F(z) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ -1 & z & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & z & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & z & -1 \end{vmatrix}$$

Trouver sa valeur pour $z = 1$ et pour $z = 2$ (*) (STUYVAERT.)

1102. Soit MN la corde normale en un point M d'une ellipse donnée. Le cercle de diamètre MN rencontre encore l'ellipse en un point P.

Trouver le degré et l'aire des courbes suivantes :

1° L'enveloppe de NP.

2° Le lieu de la projection du centre de l'ellipse sur NP.

3° Le lieu du milieu de NP.

4° Le lieu du pôle de NP par rapport à l'ellipse. (E. N. Barisien).

×**1108**. Si $Q_{n,p}$ désigne la somme des produits p à p des fractions $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}$; on a la formule :

$$\sum_{p=1}^{p=n} Q_{n,p} = \frac{1}{2}(n^2 + 3n).$$

(H. Mandart).

×**1109**. Soient ABC un triangle sphérique dont les côtés a, b, c sont inférieurs à un quadrant; A', B', C' des angles inférieurs à deux angles droits et tels que

$$\cos A' = \frac{\cos A}{\cos a}, \quad \cos B' = \frac{\cos B}{\cos b}, \quad \cos C' = \frac{\cos C}{\cos c}.$$

Démontrer que la somme $A' + B' + C'$ est aussi inférieure à deux angles droits.

1110. On donne une involution sur une droite u et un point P extérieur à u. Si d'un point quelconque A de u on abaisse une perpendiculaire AA'' sur la droite PA' qui joint A au conjugué A' de A, AA'' enveloppe une parabole, dont le foyer forme avec les points doubles de l'involution et le point P un quadrilatère harmonique. (Droz Farny).

PUBLICATIONS RÉCENTES.

5. *Ellipsoïdale evenwichtsvormen eener wentelende homogene vloeistofmassa*, door S. Krüger, S. J. Leiden, J. W. Leeuwen (VIII-196 p. in 8°).

6. *Théorie des équations algébriques* par J. Petersen, professeur à l'Université de Copenhague, traduction par H. Laurent, Examinateur d'admission à l'École Polytechnique de Paris. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1897 (XIII-350 p. in 8°). Prix : 10 fr.

7. *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques* par M. Ch. Méray, professeur à la Faculté des Sciences de Dijon. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1897 (VI-206 p. gr. in 8°). Prix : 7,50 fr.

Voici l'indication rapide des sujets traités dans ce nouveau volume du Cours si original de M. Méray. 1. Intégration indéfinie. 2. Intégrales définies, quand on ne connaît pas l'intégrale indéfinie. 3. Équations différentielles élémentaires. 4. Equations aux dérivées partielles du premier ordre. 5. Maxima et minima et calcul des variations. 6. Intégrales doubles et triples réelles. *Additions*. 1-2 sur un lemme à substituer au lemme de Cauchy dans la théorie des fonctions; démonstration

directe du lemme de Cauchy. 3. Sur la non-nullité du déterminant différentiel par rapport aux constantes arbitraires d'un système intégral général. 4. Sur la possibilité de faire croître sans limite le module d'une fonction indéfiniment olotrope. 5. Sur un cas étendu dans lequel l'interpolation permet de représenter une fonction avec une approximation indéfinie.

THÉORÈMES SUR LES TRIANGLES TRIHOMOLOGIQUES,

par M. H. Van Aubel, professeur honoraire.

Les points du plan d'un triangle de référence ont six à six les mêmes coordonnées barycentriques. Ainsi, à trois nombres donnés α, β, γ correspondent les six points :

$$M_a(\alpha, \beta, \gamma), \quad M_b(\beta, \gamma, \alpha), \quad M_c(\gamma, \alpha, \beta);$$
$$N_a(\alpha, \gamma, \beta), \quad N_b(\gamma, \beta, \alpha), \quad N_c(\beta, \alpha, \gamma).$$

Etant donné le point M_a, il est facile de construire ses *conjugués isobariques*. Soient A_1, B_1, C_1 les points de rencontre de AM*a*, BM*b*, CM*c* avec les côtés opposés, et A'_1, B'_1, C'_1 leurs isotomiques (symétriques par rapport aux milieux des côtés de ABC); nous désignons aussi par (A_2, B_2, C_2), (A_3, B_3, C_3),... les points de rencontre des côtés de ABC avec les droites joignant les sommets opposés aux points M_b, M_c, N_a,... Cela posé, il suffit de mener A'_1C_3, $B'A_3$, C'_1B_3 ou C'_1A_3, A'_1B_3, B'_1C_3 respectivement parallèles à CA, AB, BC, puis de joindre les points obtenus aux sommets opposés. Si l'on mène B_1C_4, C_1B_4 parallèles à BC, les droites AA'_1, BB_4, CC_4 concourent en N_a, etc.

Pour abréger le discours, nous disons que les triangles $M_aM_bM_c$, $N_aN_bN_c$ sont *isobariques* avec ABC. Inversement, ABC est isobarique avec $M_aM_bM_c$, les coordonnées étant maintenant $\alpha^2 - \beta\gamma$, $\beta^2 - \gamma\alpha$, $\gamma^2 - \alpha\beta$; il est également isobarique avec $N_aN_bN_c$, les coordonnées étant $\alpha^2 - \beta\gamma$, $\gamma^2 - \alpha\beta$, $\beta^2 - \gamma\alpha$.

Soient D, E, F trois points qui divisent BC, CA, AB dans un même rapport $n : m$; leurs coordonnées étant (o, m, n), (n, o, m), (m, n, o), DFE est un triangle isobarique inscrit à ABC. Les isotomiques D', E', F' de D, E, F sont les sommets du triangle isobarique inscrit D'F'E'.

Les propositions que nous allons énoncer se démontrent très facilement soit par les équipollences, soit par la géométrie analytique. Nous y appliquerons les notations précédentes.

I. Le triangle isobarique $M_aM_bM_c$ est triplement homologique avec

ABC; les centres d'homologie de $M_aM_bM_c$ avec ABC, BCA, CAB ont pour coordonnées

$$\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\beta}\right), \quad \left(\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha}\right), \quad \left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\gamma}\right).$$

Pour les relations entre les centres et les axes d'homologie, on peut voir J. M. S., 1887, p. 103.

Les centres d'homologie d'un triangle isobarique inscrit DFE avec ABC, BCA, CAB coïncident avec les sommets A, C, B.

II. Si $M_aM_bM_c$, $N_aN_bN_c$ sont deux triangles isobariques avec ABC, le triangle $M_aM_bM_c$ est triplement homologique avec $N_aN_bN_c$.

III. Le triangle $M_aM_bM_c$, isobarique avec ABC, est triplement homologique avec le triangle DEF dont les sommets divisent BC, CA, AB dans un même rapport.

IV. Si $M_aM_bM_c$, $N_aN_bN_c$ sont deux triangles isobariques avec ABC, $N_aN_bN_c$ est trihomologique avec tout triangle dont les sommets divisent M_bM_c, M_cM_a, M_aM_b dans un même rapport.

V. Soient D, E, F des points qui divisent BC, CA, AB dans un même rapport, et D', E', F' des points divisant les mêmes côtés dans un autre rapport. Si A_1, B_1, C_1 sont les points de rencontre de DE', EF', FD' avec FD', DE', EF', et que A_2, B_2, C_2 désignent les points de rencontre de DF', ED', FE' avec ED', FE', DF', les triangles $A_1B_1C_1$, $A_2C_2B_2$ sont trihomologiques.

VI. Sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC, on prend les points A', B' C', tels que $\frac{BA'}{BC} = \frac{CB'}{CA} = \frac{AC'}{AB} = m$ et les points A'', B'', C'', tels que

$$\frac{BA''}{BC} = \frac{CB''}{CA} = \frac{AC''}{AB} = n :$$

1° Les parallèles à AA'', BB'', CC'', menées par A', B', C', concourent en un point M.

Les parallèles à AA'', BB'', CC'', menées par B', A', C', concourent en un point N.

Les parallèles à AA'', BB'', CC'', menées par C', B', A', concourent en un point P.

2° Ces trois points, étant désignés par O_a, O_b, O_c dans le cas où $m = 0$, parcourent respectivement les côtés O_bO_c, O_cO_a, O_aO_b du triangle $O_aO_bO_c$, lorsqu'on fait varier m;

3° Les couples de triangles (ABC, MNP), (A″B″C″, MNP), (A′B′C′, A″C″B″) sont trihomologiques; le triangle $O_aO_bO_b$ est trihomologique avec chacun des triangles A′B′C′, A″B″C″, MPN.

4° Les triangles $O_aO_bO_c$, MNP ont le même centre de gravité que le triangle ABC.

VII. Après avoir divisé les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC dans un même rapport $m : n$, aux points D, E, F, on mène les droites BO_a, CO_b, AO_c parallèles respectivement à CF, AD, BE jusqu'à leur rencontre avec AD, BE, CF; par le point O_a, des parallèles aux côtés BC, CA, AB, rencontrant les deux autres côtés en B'_a, C'_a, en C''_a, A'_a, en A''_a, B'_a; par le point O_b, des parallèles à ces côtés, rencontrant les deux autres en B'_b et C'_b, en C''_b et A'_b, en A''_b et B'_b, et, par le point O_c des parallèles à ces côtés, rencontrant les deux autres en B'_c, C'_c, en C''_c, A'_c, en A''_c, B'_c :

1° Les triples de points :

$$(A'_a, B'_a, C'_a),\quad (A'_b, B'_b, C'_b),\quad (A'_c, B'_c, C'_c),\quad (A''_a, B''_a, C''_a), \ldots, \ldots;$$
$$(A''_a, C'_b, B'_c),\quad (B''_a, A'_b, C'_c), \ldots, (A''_a, C''_b, B''_c), \ldots, \ldots;$$

sont en ligne droite, et l'on a :

$$C'_aA'_a : A'_aB'_a = C'_bA'_b : A'_bB'_b = \cdots = C''_aA''_a : A''_aB''_a = \cdots = m : n,$$
$$A'_aC'_b : C'_bB'_c = B'_aA'_b : A'_bC'_c = C'_aB'_b : B'_bA'_c = m : n,$$
$$C''_bB''_c : B''_cA''_a = A''_bC''_c : C''_cB''_a = B''_bA''_c : A''_cC''_a = m : n.$$

2° Les six triangles

$$A'_aB'_bC'_c,\quad B'_aC'_bA'_c,\quad C'_aA'_bB'_c,\quad A''_aB''_bC''_c,\quad B''_aC''_bA''_c,\quad C''_aA''_bB''_c$$

sont trihomologiques deux à deux, si l'on permute les lettres de deux sommets dans un des triangles de chaque couple.

3° Les quadrilatères

$$B'_cA'_aA''_bC''_b,\quad C'_aB'_cB''_cA''_c,\quad A'_bC'_bC''_aB''_a,\quad A''_aB'_cC''_bA''_c,\quad B''_bC'_aA''_cB''_b,\quad C''_cA'_bB''_aC''_c$$

sont des parallélogrammes dont les centres M_a, M_b, M_c, N_a, N_b, N_c, sont les sommets de deux triangles, qui valent chacun le quart du triangle ABC.

4° Chacun des triangles $M_aM_cM_b$, $N_aN_cN_b$ est trihomologique avec chacun des six triangles précédents; $M_aM_bM_c$ est trihomologique avec $N_aN_cN_b$.

5° Ces huit triangles ont le même centre de gravité que ABC.

VIII. Après avoir divisé les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC dans un même rapport $m : n$, aux points a, b, c, on mène les droites BO_a, CO_b, AO_c parallèles respectivement à Cc, Aa, Bb, jusqu'à leur rencontre avec

A_a, B_b, C_c; par les points O_a, O_b, O_c, des parallèles à la médiane AD, rencontrant BC, CA, AB respectivement en A_a, B'_a, C''_a, en A_b, B'_b, C''_b, en A_c, B'_c, C''_c, puis des parallèles à la médiane BE, rencontrant CA, AB, BC en B_a, C'_a, A''_a, en B_b, C'_b, A''_b, en B_c, C'_c, A''_c, enfin des parallèles à la médiane CF, rencontrant AB, BC, CA en C_a, A'_a, B''_a, en C_b, A'_b, B''_b, en C_c, A'_c, B''_c :

1° Les dix triangles

$$O_aO_bO_c, \quad A_aB_bC_c, \quad B_aC_bA_c, \quad C_aA_bB_c, \quad A'_aB'_bC'_c, \quad B'_aC'_bA'_c, \quad C'_aA'_bB'_c,$$
$$A''_aB''_bC''_c, \quad B''_aC''_bA''_c, \quad C''_aA''_bB''_c,$$

qui ont le même centre de gravité que ABC sont trihomologiques deux à deux, si l'on permute les lettres de deux sommets dans un des triangles de chaque couple.

2° Les triples de points

$$(A_a, B_a, C_a), \quad (A_b, B_b, C_b) \cdots (A'_a, B'_a, C'_a), \cdots (A''_a, B''_a, C''_a) \cdots$$

qui sont en ligne droite, déterminent sur ces droites des segments qui sont dans le rapport $m : n$.

3° Les triples de points

$$(A_a, C_b, B_c), \quad (B_b, A_c, C_a), \quad (C_c, B_a, A_b), \quad (A'_a, C'_b, B''_c), \ldots,$$
$$\ldots (A'_a, C'_b, B''_c), \quad \ldots \ldots,$$

qui sont en ligne droite, déterminent des segments qui sont dans le rapport $n - m : 2n + m$.

4° Les quadrilatères

$$A_aC_bA_cB_c, \quad B_bA_aB_cC_c, \quad C_cB_aC_bA_c,$$
$$A_aC_cA_bB_c, \quad B_cA_cB_aC_b, \quad C_bB_cC_aA_b,$$
$$A_aC_aA_bB_b, \quad B_aA_aB_bC_b, \quad C_aB_aC_bA_b,$$

sont des parallélogrammes ayant respectivement pour centres

$$A_a, \quad B_a, \quad C_a,$$
$$A_b, \quad B_b, \quad C_b,$$
$$A_c, \quad B_c, \quad C_c.$$

5° Les droites

$$B_aC_a, \quad B_bC_b, \quad B_cC_c, \quad C_aA_a, \ldots, \quad \ldots A_aB_a \ldots \ldots$$

sont parallèles respectivement à

$$A_aC_a, \quad A_bC_b, \quad A_cC_c, \quad B_aA_a, \ldots \ldots C_aB_a \ldots \ldots$$

et en valent la moitié : les droites B_aA_a, C_aB_a, A_aC_a sont parallèles à B_bC_b, C_cA_c, A_bB_b et en valent la moitié : elles sont aussi parallèles à A_cC_c, B_cA_c, C_cB_c et sont à celles-ci dans le rapport $m + 2n : m + n$.

IX. Si l'on coupe un triangle ABC par une transversale, rencontrant les côtés BC, CA, AB en A′, B′, C′, et que, par les points A′, B′, C′, on mène les droites B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 parallèles à AB, BC, CA et les droites B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 parallèles à CA, AB, BC :

1° Les trois triangles directement semblables ABC, $B_1C_1A_1$, $C_2A_2B_2$ sont trihomologiques deux à deux ; trois de leurs neuf centres d'homologie, savoir ceux des trois couples ($A_1B_1C_1$, $C_2A_2B_2$), ($A_2B_2C_2$, CAB), (ABC, $C_1A_1B_1$), coïncident en un point R et les six autres sont en ligne droite.

2° Les trois triangles AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 sont trihomologiques deux à deux; trois de leurs neuf centres d'homologie, savoir ceux des trois couples

$$(BB_1B_2,\ C_2CC_1),\quad (CC_1C_2,\ A_2AA_1),\quad (AA_1A_2,\ B_2BB_1),$$

coïncident en R et les six autres se trouvent sur la transversale.

3° Les trois triangles AB_1C_2, BC_1A_2, CA_1B_2 sont trihomologiques deux à deux; trois de leurs neuf centres d'homologie, savoir ceux des couples (BC_1A_2, A_1B_2C), (CA_1B_2, B_1C_2A), (AB_1C_2, C_1A_2B), coïncident en R et les six autres sont à l'infini.

4° Soient L, M, N les points de rencontre B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 avec A_2B_2, B_2C_2, C_2A_2; L_1, M_1, N_1 ceux de B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 avec AB, BC, CA; L_2, M_2, N_2, ceux de BC, CA, AB avec A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1; les droites LMN, $L_1M_1N_1$, $L_2M_2N_2$, qui sont les axes d'homologie des couples de triangles ($A_1B_1C_1$, $C_2A_2B_2$), ($A_2B_2C_2$, CAB), (ABC, $C_1A_1B_1$), passent par un même point O; les trois triangles LL_1L_2, MM_1M_2, NN_1N_2, homothétiques à AA_1A_2, sont trihomologiques deux à deux, trois de leurs neuf centres d'homologie coïncident en O et les six autres sont en ligne droite.

5° Les trois triangles LM_1N_2, MN_1L_2, NL_1M_2, homothétiques à ABC, sont trihomologiques deux à deux; trois de leurs neuf centres d'homologie coïncident en O et les six autres sont en ligne droite.

X. Sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC, on prend les points D, E, F, qui divisent ces côtés dans un même rapport, et l'on construit les triangles isoscèles directement semblables BA_1C, CB_1A, AC_1B :

1° Pour que les parallèles à AD, BE, CF menées par les points A_1, B_1, C_1, passent par un même point M, il faut et il suffit que ces points soient les sommets du premier triangle de Brocard; en même temps les parallèles à BE, CF, AD menées par ces points concourront en un

point N, et les parallèles à CF, AD, BE partant de ces points passeront par un point P. On sait d'ailleurs que les points de concours des droites, menées des sommets A_1, B_1, C_1, du premier triangle de Brocard, parallèlement à BC, CA, AB, à CA, AB, BC, à AB, BC, CA, sont le point de Lemoine K et les conjugués isotomiques ω_1, ω_1' des points de Brocard.

2° Si l'on construit les triangles isoscèles directement semblables BA'C, CB'A, AC'B, pour que les parallèles à AA', BB', CC', menées par les points D, E, F, concourent en un point M', il faut et il suffit que les hauteurs de ces triangles isoscèles soient le triple des distances du point de Lemoine à leurs bases; en même temps, les parallèles à AA', BB', CC', menées par les points E, F, D et par les points F, D, E passeront par un point N' et par un point P'. Si Q_a est le point de concours des droites AA', BB', CC' et Q_b, Q_c les points de concours des droites menées par B, C, A et par C, A, B parallèlement à AA', BB', CC', les points M', N', P' se meuvent respectivement sur les côtés Q_bQ_c, Q_cQ_a, Q_aQ_b du triangle $Q_aQ_bQ_c$, quand on fait varier le rapport BD : DC.

3° Les triangles $A_1B_1C_1$, $K\omega_1\omega_1'$, MNP, $Q_aQ_bQ_c$, M'N'P' sont trihomologiques avec chacun des triangles ABC, DEF; ils sont également trihomologiques entre eux deux à deux, si l'on permute les lettres de deux sommets dans un des triangles de chaque couple.

4° Ces triangles ont le même centre de gravité que le triangle ABC.

XI. Sur les trois côtés d'un triangle ABC, on prend les points A', B', C' tels que

$$\frac{BA'}{BC} = \frac{CB'}{CA} = \frac{AC'}{AB} = m,$$

et, sur les droites AA', BB', CC', les points M, N, P, tels que

$$\frac{AM}{AA'} = \frac{BN}{BB'} = \frac{CP}{CC'} = n :$$

le triangle MPN est trihomologique avec chacun des triangles ABC, A'B'C'.

XII. Sur les trois côtés d'un triangle ABC, on prend les points A', B', C' tels que

$$\frac{BA'}{BC} = \frac{CB'}{CA} = \frac{AC'}{AB} = m ;$$

les droites AA', BB', CC' se coupent deux à deux aux points M, N, P,

par lesquels on mène respectivement B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 parallèles à BC, CA, AB, puis C_2A_2, A_2B_2, B_2C_2 parallèles à CA, AB, BC, enfin A_3B_3, B_3C_3, C_3A_3 parallèles à AB, BC, CA. Les triangles MPN, $A_1C_1B_1$, $A_2C_2B_2$, $A_3C_3B_3$ sont trihomologiques avec chacun des triangles ABC, A'B'C'; ils sont trihomologiques entre eux deux à deux, si dans l'un des triangles de chaque couple on permute les lettres de deux sommets.

XIII. Sur les côtés d'un triangle ABC, comme bases, on construit les triangles isoscèles directement semblables BA'C, CB'A, AC'B, et, sur les côtés du triangle A'B'C', comme bases, les triangles C'A''B', A'B''C', B'A''C' directement semblables aux précédents : le triangle A''C''B'' est trihomologique avec ABC.

XIV. Etant donnés, dans le plan d'un triangle ABC, les points A_1, B_1, C_1, dont les coordonnées barycentriques sont (α, β, γ), (β, γ, α), (γ, α, β), on prend sur les droites AA_1, AB_1, AC_1, BA_1, BB_1, CC_1, CA_1, CB_1, CC_1, les points M_a, N_a, P_a, M_b, N_b, P_b, M_c, N_c, P_c, qui divisent ces droites dans un même rapport. Les triangles $M_aN_cP_b$, $M_bN_aP_c$, $M_cN_bP_a$ sont trihomologiques avec ABC; ils sont trihomologiques entre eux deux à deux, si dans l'un des triangles de chaque couple on permute les lettres de deux sommets.

Anvers, 12 janvier 1896.

×NOTES MATHÉMATIQUES.

7. *Sur les triangles semiconjugués.* Un triangle formé par une corde d'une conique et les tangentes en ses extrémités peut être dit *semiconjugué*, parce que chaque sommet a pour polaire un côté du triangle.

Deux triangles ABC, A'B'C' *semiconjugués à une même conique* Σ *sont inscrits à une seconde conique* Σ' *et circonscrits à une troisième conique* Σ''.

En effet, soient AB, A'B' deux cordes de Σ et C, C' leurs pôles. Désignons par M, N, P les points d'intersection des couples de droites (CA, C'A'), (AB', A'B), (CB, C'B'). Dans le quadrilatère circonscrit CMC'P, les diagonales MP, CC' et les cordes de contact des côtés opposés, AB' et A'B, concourent en un même point N. Il résulte de là : 1° que CAB'C'A'BC est un hexagone de Pascal, ayant pour pascale MNP; 2° que AMA'B'PB est un hexagone de Brianchon, dont les diagonales principales concourent en N. (J. N.)

×8. *Sur l'extraction de la racine carrée des nombres.* Soit N un nombre

dont la racine carrée est $10d + u$; d représente le nombre des dizaines de la racine et u, le chiffre des unités. On peut écrire

$$(10d + u)^2 \leqslant N < (10d + u + 1)^2$$

ou

$$100d^2 + 20du + u^2 \leqslant N < 100d^2 + 20du + u^2 + 20d + 2u + 1 ;$$

la valeur maxima de N est ainsi

$$100d^2 + 20du + u^2 + 20d + 2u .$$

Le nombre d des dizaines de la racine ayant été déterminé, le reste renferme encore au plus

$$20du + u^2 + 20d + 2u$$

ou

$$20d(u + 1) + u^2 + 2u ;$$

le maximum de ce reste est atteint pour $u = 9$, alors

$$u^2 + 2u = 99 > 90$$

et le plus grand nombre de dizaines que puisse contenir ce reste est ainsi

$$2d(u + 1) + 9.$$

Or, pour obtenir le chiffre u des unités de la racine, on divise le nombre des dizaines du reste par $2d$; dans le cas le plus défavorable le quotient sera celui de

$$2d(u + 1) + 9$$

par $2d$ ou $u + 1 + \frac{9}{2d}$ et ainsi le nombre maximum d'essais pour l'obtention de u est donné par le plus grand entier contenu dans $\left(1 + \frac{9}{2d}\right)$.

On étend facilement la théorie précédente à l'extraction de la racine $n^{ième}$ des nombres et l'on trouve que le plus grand nombre d'essais à effectuer pour l'obtention de u est donné par le plus grand entier contenu dans l'expression

$$E_n = 1 + \frac{10(n-1)}{d \times 2!} + \frac{10(n-1)(n-2)}{d^2 \times 3!} + \frac{10(n-1)(n-2)(n-3)}{d^3 \times 4!}$$
$$+ \cdots + \frac{10(n-1)}{d^{n-3} \times 2!} + \frac{10}{d^{n-2}} + \frac{9}{nd^{n-1}} .$$

Pour $n = 2$, on retrouve $E_2 = 1 + \frac{9}{2d}$.

Pour $n = 3$, on obtient $E_3 = 1 + \frac{10}{d} + \frac{9}{3d^2}$.

Il est évident que les essais ci-dessus mentionnés sont aussi compris dans les quotients supérieurs à 9, quotients qui en pratique se trouvent tout de suite éliminés. (E. Barbette, Liége.)

×9. *Sur les triangles sphériques.* Théorème. *Soient* a, b, c, A, B, C *les côtés et les angles d'un triangle sphérique. Suivant que* $\sin^2\frac{1}{2}a$ *est égal, supérieur ou inférieur à* $\sin^2\frac{1}{2}b + \sin^2\frac{1}{2}c$, *l'angle* A *est égal, supérieur ou inférieur à* B + C. (Bosi, *Periodico di Matematica*).

A la démonstration un peu longue qui vient de paraître dans le Journal italien, on peut substituer la suivante qui se rapproche de celle d'une proposition analogue de géométrie plane.

Soit A' le milieu de l'arc BC. Si la médiane AA' = A'B = A'C, on a A = B + C; si AA' $\lesseqgtr$ A'B, on a respectivement

$$B \lesseqgtr A'AB, \quad C \lesseqgtr A'AC, \quad \text{d'où} \quad B + C \lesseqgtr A.$$

De A' comme pôle décrivons un petit cercle Δ passant par B et C. Dans l'hypothèse de A'A = A'B, Δ passe A, et l'angle rectiligne BAC inscrit dans un demi-cercle est droit; comme les cordes BC, BA, CA sont égales à $2\sin\frac{1}{2}a$, $2\sin\frac{1}{2}b$, $2\sin\frac{1}{2}c$, on a

$$\sin^2\tfrac{1}{2}a = \sin^2\tfrac{1}{2}b + \sin^2\tfrac{1}{2}c.$$

Soit A'A > A'B. Appelons M le milieu de la corde BC et A_1 le point où l'arc de grand cercle A'A coupe Δ; l'arc A'A étant moindre qu'un quadrant, la droite MA est plus grande que la droite MA_1; donc, si l'on fait tourner le plan ABC autour BC, pour amener A dans le plan de Δ, A se placera à l'extérieur de Δ. On conclut de là que l'angle rectiligne BAC est aigu, et que

$$\overline{BC}^2 < \overline{BA}^2 + \overline{CA}^2 \quad \text{ou} \quad \sin^2\frac{1}{2}a < \sin^2\frac{1}{2}b + \sin^2\frac{1}{2}c.$$

L'hypothèse A'A < A'B se traite d'une manière analogue.

Si l'on transforme la proposition au moyen du triangle polaire, on trouve le théorème suivant, également signalé par M. Bosi (*ibid*) :

Si $\cos^2\frac{A}{2}$ est égal, supérieur ou inférieur à la somme

$$\cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2},$$

$\pi + a$ sera respectivement égal, inférieur ou supérieur à la somme $b + c$.

(J. N.)

10. *Mort de Weierstrass.* Le doyen des géomètres de l'Allemagne et, sans doute, du monde entier, Weierstrass, est mort à Berlin, le 19 février dernier. Il était né à Ostenfelde, en Westphalie, le 31 octobre 1815. On lui doit de profondes recherches sur la théorie générale des fonctions analytiques et sur celle des fonctions abéliennes et il a transformé complètement la théorie des fonctions elliptiques (Voir *Mathesis*, 1895, (2), V, 273).

DÉMONSTRATION DE LA PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DES WRONSKIENS,

par M. A. Demoulin, répétiteur à l'Université de Gand.

Soient $y_1, \ldots, y_n$ n fonctions d'une variable x; représentons par $W(y_1, \ldots, y_n)$ le wronskien de ces n fonctions, c'est-à-dire le déterminant formé avec ces fonctions et leurs dérivées des $(n-1)$ premiers ordres. Dans une note antérieure (*Mathesis*, 1889, IX, 136), nous avons montré que l'une des propriétés des wronskiens se traduit par l'équation

$$W(y_1, \ldots, y_n) = y_1^n \, W\left(1, \frac{y_2}{y_1}, \ldots, \frac{y_n}{y_1}\right), \qquad (1)$$

en sorte que le signe W possède la même propriété que le signe des fonctions homogènes. Appliquons cette formule aux fonctions $ty_1, \ldots, ty_n$, t désignant une fonction arbitraire de x; il viendra

$$W(ty_1, \ldots, ty_n) = t^n y_1^n \, W\left(1, \frac{y_2}{y_1}, \ldots, \frac{y_n}{y_1}\right),$$

d'où, par comparaison avec la formule précédente,

$$W(ty_1, \ldots, ty_n) = t^n \, W(y_1, \ldots, y_n).$$

Cette relation est due à M. J. Neuberg qui en a donné une démonstration directe (*Mathesis*, 1894, (2), IV, 165).

La formule (1) est utile dans la théorie des équations différentielles linéaires(*), elle conduit également à une démonstration rapide de la propriété fondamentale des wronskiens :

(*) *Voir* P. Mansion, *Cours d'Analyse infinitésimale de l'Université de Gand.* (Seconde année). Gand, Autographie, J. Lobel, 1891.

Lorsque le wronskien de n fonctions d'une variable est identiquement nul, il existe entre ces fonctions une relation linéaire homogène à coefficients constants.

Ce théorème étant vrai pour une fonction, il suffira d'établir que, s'il est vrai pour $(n-1)$ fonctions, il le sera encore pour n fonctions. Soit donc

$$W(y_1, \ldots, y_n) = 0. \tag{2}$$

Si $y_1 = 0$, le théorème est démontré; si y_1 n'est pas identiquement nul, l'équation (2) s'écrit, en vertu de la formule (1),

$$W\left(1, \frac{y_2}{y_1}, \ldots, \frac{y_n}{y_1}\right) = 0.$$

ou

$$W\left[\left(\frac{y_2}{y_1}\right)', \ldots, \left(\frac{y_n}{y_1}\right)'\right] = 0.$$

Le théorème étant supposé vrai pour $(n-1)$ fonctions, cette équation entraîne la suivante

$$\alpha_2\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' + \cdots + \alpha_n\left(\frac{y_n}{y_1}\right)' = 0,$$

les coefficients $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant des constantes qui ne sont pas toutes nulles. Intégrant et désignant par α_1 une nouvelle constante, on trouve

$$\alpha_2\frac{y_2}{y_1} + \cdots + \alpha_n\frac{y_n}{y_1} = -\alpha,$$

d'où

$$\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n = 0.$$

SUR UNE CONIQUE INSCRITE OU CIRCONSCRITE A UN TRIANGLE;

par M. Stuyvaert,

ancien élève de l'École normale des Sciences, professeur à l'Athénée royal de Gand.

Nous nous proposons, dans ce travail, d'étudier, par les procédés de la Géométrie projective, quelques-unes des figures qui naissent de la combinaison d'une conique avec un triangle inscrit ou circonscrit, et une involution de points ou de rayons conjugués par rapport à la conique.

I.

1. On a, en Géométrie élémentaire, les théorèmes suivants :

Les hauteurs d'un triangle se coupent en un même point.

Le lieu des points tels que leurs projections sur les trois côtés d'un triangle sont en ligne droite est la circonférence circonscrite à ce triangle (Théorème de Simson).

La droite de Simson relative à un point de la circonférence partage en deux parties égales la distance de ce point à l'orthocentre du triangle.

En généralisant par projection centrale et en faisant la théorie corrélative, on obtient les six propositions suivantes :

(I) *Etant donnés un triangle* ABC *et une involution de points sur une droite n, les droites joignant* A, B, C *respectivement aux points* A_2, B_2, C_2 *de la droite n, conjugués de ceux où cette droite rencontre les côtés opposés du triangle, se coupent en un même point* H.

(II) *Le lieu des points* M *tels qu'en les joignant aux points* A_2, B_2, C_2, *les droites obtenues rencontrent les côtés correspondants du triangle en trois points* A_3, B_3, C_3 *en ligne droite est une conique passant par les sommets du triangle et par les points doubles (réels ou imaginaires) de l'involution donnés.*

(III) *Les points* M *et* H *sont conjugués relativement à l'angle des droites n et* $A_3 B_3 C_3$.

(I′) *Etant donnés un triangle* ABC *et une involution de rayons autour d'un centre* N, *les points d'intersection des côtés du triangle avec les rayons* $a_2 b_2 c_2$, *conjugués de ceux qui passent par les sommets opposés du triangle, sont situés sur une même droite h.*

(II′) *L'enveloppe des droites m telles qu'en les coupant par les rayons* a_2, b_2, c_2, *on obtienne trois points alignés, avec les sommets correspondants du triangle, sur un même point* S, *est une conique tangente aux trois côtés du triangle et aux rayons doubles (réels ou imaginaires) de l'involution donnée.*

(III′) *Les points* N *et* S *sont conjugués relativement à l'angle des droites m et h.*

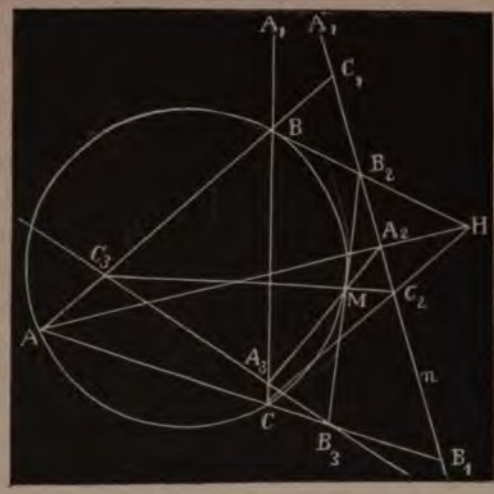
La figure ci-dessous se rapporte seulement aux théorèmes (I, II, III).

Le théorème I est bien connu, mais généralement énoncé sous une autre forme ; nous y reviendrons au § II.

La méthode par projection ne démontre le théorème (II) que dans le cas où la droite *n* ne coupe pas la conique, mais cette proposition est vraie dans tous les cas, en vertu du principe de continuité énoncé par Poncelet.

2. Parmi les nombreux cas particuliers des propositions ci-dessus, citons les deux suivants :

Si par les sommets d'un triangle on mène des droites antiparallèles aux côtés opposés par rapport à deux directions rectangulaires, ces droites se coupent en un point K *de la circonférence circonscrite au triangle.*



Le lieu des points M *tels que les droites antiparallèles menées de chacun d'eux aux côtés d'un triangle, par rapport à deux directions rectangulaires, rencontrent ces côtés en trois points* A_3, B_3, C_3, *en ligne droite, est une hyperbole équilatère circonscrite au triangle, et dont les asymptotes sont parallèles aux deux directions données. La droite* $A_3 B_3 C_3$ *passe par le milieu de* MK.

Si l'on rapproche ces énoncés du théorème de Simson et si l'on se rappelle que toute hyperbole équilatère circonscrite à un triangle passe par l'orthocentre de ce triangle, on obtient un ensemble de propriétés de nature à faire bien ressortir l'analogie du cercle et de l'hyperbole équilatère.

3. Revenons au théorème (II) du n° 1. Quand le point M décrit la conique, on reconnaît sans peine que les ternes de points A_3, B_3, C_3 sont communs à deux homographies du troisième ordre et du second rang ; par suite, la droite $A_3B_3C_3$ enveloppe une courbe de troisième classe. Celle-ci possède une tangente double et a certaines relations avec la conique lieu du point M.

Pareillement le lieu du point S considéré dans le théorème (II') est une cubique ayant un point double. Nous ne nous étendrons pas davantage sur ce sujet, parce que l'on retrouve ainsi un cas particulier du mode de génération des cubiques dû à Grassmann.

Contentons-nous de résumer ci-après le résultat de cette recherche:

Toute cubique acnodale peut être obtenue en projetant le lieu des pôles des droites de Simson relatives aux points d'un cercle circonscrit à un triangle.

Toute cubique crunodale peut être obtenue en projetant le lieu des pôles des droites A_1, B_1, C_1 *(définies au n° 2) relatives aux points d'une hyperbole équilatère circonscrite à un triangle.*

II.

4. Le théorème (I) du n° 1 s'énonce généralement ainsi :

Les côtés d'un triangle et les rayons qui projettent, d'un même point H, *les sommets opposés, coupent une droite* n *en six points en involution.*

A parler plus exactement, les deux énoncés sont réciproques, mais puisque deux couples de points déterminent l'involution, l'un des théorèmes entraîne évidemment l'autre.

Les sommets du triangle et les points doubles de l'involution déterminent une conique (Σ). Pour comprendre le cas où ces points doubles sont imaginaires, il suffit de dire qu'il existe une conique passant par A, B, C et par rapport à laquelle les points correspondants de l'involution sont des points conjugués (*).

5. Si la conique (Σ) est donnée, à toute droite n du plan correspond un point H que l'on obtient en joignant A, B, C, respectivement aux points conjugués de ceux où les côtés opposés, a, b, c, coupent n. Ces trois droites concourent en H.

En pratique, on opèrera comme il suit : soient $\alpha\beta\gamma$ le triangle formé par les tangentes en A, B, C, et N le pôle de la droite n. Les droites $N\alpha$, $N\beta$, $N\gamma$ coupent n en A_2, B_2, C_2 et les droites AA_2, BB_2, CC_2 concourent au point H. Nous avons omis ces nouveaux éléments dans la figure du n° 1 pour ne point trop la charger.

Si n est une tangente à la conique, H est au point de contact; si n coïncide avec un des côtés du triangle ABC, H est indéterminé et situé sur ce côté; enfin si n passe par un sommet du triangle, H coïncide avec ce sommet.

(*) En géométrie projective, on définit en effet deux points imaginaires conjugués par une involution elliptique. Cette idée est de von Staudt; on la trouvera développée dans un mémoire de M. Cl. Servais : *Sur les Imaginaires en Géométrie* (Extrait du tome XLIX des *Mémoires couronnés et autres Mémoires* publiés par l'Académie royale de Belgique, 1894).

6. Réciproquement, si l'on donne la conique, le triangle ABC et le point H non situé en un des sommets du triangle, la droite u est déterminée.

En effet, on a, dans la figure, trois droites fixes HA, HB, HC. En joignant un point de HA au point de HB conjugué du premier par rapport à la conique, on obtient une droite passant par deux points correspondants de deux ponctuelles projectives ; cette droite enveloppe une conique. De même la droite menée par un point de HA et le point conjugué situé sur HC enveloppe une deuxième conique ayant, avec la première, trois tangentes communes réelles, qui sont les droites $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ considérées dans le n° précédent. Donc ces coniques ont une quatrième tangente commune réelle, qui est la droite u.

Le raisonnement est en défaut quand H est en un sommet du triangle ABC, mais on vient de voir que toute droite u passant par un sommet A a pour correspondant ce même point A.

7. Corrélativement, si l'on joint un point H aux sommets α, β, γ d'un triangle, et aux points où une droite u coupe les côtés opposés, on a une involution de rayons ; les rayons doubles et les côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$ sont tangents à une certaine conique Σ_1. On a, pour déterminer la droite u, un procédé pratique analogue à celui du n° 5.

8. L'analyse conduit aussi aux résultats précédents. Ainsi dans la dernière question (n° 7), prenons pour triangle de référence le triangle ABC ayant ses sommets aux points de contact de $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$. Soit

$$lyz + mzx + nxy = 0$$

l'équation de la conique, et soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point H ; après quelques calculs, que le lecteur pourra s'exercer à refaire, on trouve, pour l'équation de la droite u,

$$\begin{aligned} &x\,[mnx_1(mz_1 + ny_1)(2ly_1z_1 + mz_1x_1 + nx_1y_1)] \\ &+ y\,[nly_1(nx_1 + lz_1)(ly_1z_1 + 2mz_1x_1 + nx_1y_1)] \\ &+ z\,[lmz_1(ly_1 + mx_1)(ly_1z_1 + mz_1x_1 + 2nx_1y_1)] = 0. \end{aligned}$$

La conique (Σ_1) ici considérée est la conique polaire d'un certain point P (*) par rapport au système du 3e ordre formé par les droites AB, BC, CA. Les coordonnées de P sont proportionnelles à l, m, n. L'équation précédente montre que si H coïncide avec P, la droite u coïncide avec la polaire de P par rapport à la conique (Σ_1). (*A continuer.*)

(*) Il est question de ce point dans l'article de M. Krahé (p. 33-36).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

Question 999.

(Voir *Mathesis*, (2) IV, p. 280).

D'un point P ***on abaisse les normales*** PA, PB, PC, PD ***à une ellipse*** (E); ***soient*** A', B', C', D' ***leurs seconds points d'intersection avec cette ellipse. Si les points*** A', B', C', D' ***appartiennent à une même circonférence, on demande le lieu du centre et l'enveloppe de l'hyperbole d'Apollonius relative au point*** P. (J. GILLET).

Solution par M. A. DROZ-FARNY. Soient PA une des normales, α et β les coordonnées de P, x' et y' celles de A et x, y celles de A'. On doit avoir

$$x' = \frac{x + \lambda\alpha}{1 + \lambda}, \quad y' = \frac{y + \lambda\beta}{1 + \lambda}$$

et comme le point A appartient à l'ellipse, on a la condition

$$\frac{(x + \lambda\alpha)^2}{a^2(1+\lambda)^2} + \frac{(y + \lambda\beta)^2}{b^2(1+\lambda)^2} = 1, \quad \text{d'où} \quad \lambda = -\frac{\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right)^2}{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1}.$$

Or A appartient aussi à l'hyperbole d'Apollonius du point P; donc

$$c^2 x'y' + b^2\beta x' - a^2\alpha y' = 0. \qquad (a)$$

En portant dans cette relation les valeurs de x', y' et λ, on trouve l'équation d'une conique qui passe évidemment par les quatre points A', B', C' et D'. Si ces points se trouvent sur une circonférence, cette conique a ses axes parallèles à ceux de (C); il suffit pour cela que le coefficient de xy disparaisse, d'où la condition qui fournit en même temps le lieu du point P,

$$(a^2 + b^2)\left[\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}\right] = c^2. \qquad (1)$$

Les coordonnées du centre de l'hyperbole (a) sont données par

$$c^2 y + b^2\beta = 0, \quad c^2 x - a^2\alpha = 0.$$

(*) Nous avons oublié de mentionner, p. 48, une solution de la question 1095, par M. COLART.

On en déduit

$$\beta = -\frac{c^2 y}{b^2}, \quad \alpha = \frac{c^2 x}{a^2}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (1) on aura l'équation du lieu du centre de l'hyperbole d'Apollonius :

$$(a^2 + b^2)\left[\frac{c^2 x^2}{a^6} - \frac{c^2 y^2}{b^6}\right] = 1;$$

ce lieu est une hyperbole concentrique et coaxale à (E).

2. L'hyperbole d'Apollonius du point P a pour équation :

$$c^2 xy + b^2 \beta x - a^2 \alpha y = 0, \tag{2}$$

avec la condition

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = \frac{c^2}{a^2 + b^2}. \tag{3}$$

Prenons les dérivées de (2) et (3) par rapport à α en considérant β comme fonction de α; on aura :

d'où
$$b^2 x \frac{d\beta}{d\alpha} - a^2 y = 0, \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{b^2 \alpha}{a^2 \beta};$$
$$b^4 x \alpha = a^4 y \beta. \tag{4}$$

On aura l'équation de l'enveloppe en éliminant α, β entre les équations (2), (3) et (4). On trouve aisément

$$a^6 y^2 - b^6 x^2 - c^2 (a^2 + b^2) x^2 y^2 = 0;$$

l'enveloppe est donc une quartique.

Solution analogue par M. J. Jonesco, qui emprunte la condition (1) à un article de la *Revue de Niewenglowski*, p. 314.

×Question 1016.

(Voir *Mathesis*, (2) V, p. 104).

Soient AA', BB', CC' ***les hauteurs d'un triangle*** ABC; ***les côtés correspondants des triangles*** ABC, A'B'C' ***se coupent aux points*** A'', B'', C''.

Démontrer que les droites AA_1, BB_1, CC_1 ***respectivement perpendiculaires aux droites*** AA'', BB'', CC'' ***concourent en un même point.***

(Vve Prime).

Solution par MM. Collette, Gob ***et*** Klompers. Soient A''', B''', C''' les sommets du triangle formé par les droites AA'', BB'', CC''. Les

triangles ABC, A'B'C' étant homologiques, les points A'', B'', C'' sont en ligne droite; il en résulte que A''' appartient à la droite AA', polaire de A'' par rapport à l'angle A; de même, les points B''', C''' appartiennent aux hauteurs BB', CC'. Les triangles A'''B'''C''', ABC sont donc tels que les perpendiculaires abaissées des sommets du premier sur les côtés du second se coupent en un même point; par conséquent, d'après un théorème connu, les perpendiculaires menées des sommets A, B, C du second triangle sur les côtés B'''C''', C'''A''', A'''B''' du premier sont aussi concourantes.

Solution par M. J. Jonesco. Soient M, N, P les milieux des côtés du triangle ABC et M'N'P' le triangle obtenu en menant par les points A, B, C des parallèles aux côtés BC, CA, AB. La circonférence de diamètre BC contient les points B', C'; donc la droite AA'' est la polaire de l'orthocentre H par rapport à ce cercle. Par conséquent la droite MH est perpendiculaire à la droite AA'', et parallèle à la droite AA_1. La figure NPMH est semblable à la figure $OBAA_1$. Donc AA_1 passe par l'orthocentre H' du triangle M'N'P'. On peut démontrer de la même manière que les droites BB_1, CC_1, passent aussi par H'. Donc les droites AA_1, BB_1, CC_1, concourent en H', orthocentre du triangle M'N'P'.

Solution analytique par MM. Mandart et Déprez. Si ABC est le triangle de référence, l'équation de la droite AA'' est

$$y\cos B + z\cos C = 0.$$

La relation qui lie les coefficients des équations de deux droites rectangulaires étant :

$$ll' + mm' + nn' - (mn' + m'n)\cos A - (nl' + n'l)\cos B + (lm' + l'm)\cos C = 0,$$

on a pour l'équation de AA_1 perpendiculaire à AA'' :

$$y[\cos A\cos B - \cos C] - z[\cos A\cos C - \cos B] = 0.$$

Celles des droites BB, CC, sont

$$z[\cos B\cos C - \cos A] - x[\cos B\cos A - \cos C] = 0.$$
$$x[\cos C\cos A - \cos B] - y[\cos C\cos B - \cos A] = 0.$$

On conclut que les droites AA_1, BB_1, CC_1 concourent au point ayant pour coordonnées normales

$$\cos A - \cos B\cos C,\quad \cos B - \cos C\cos A,\quad \cos C - \cos A\cos B.$$

Ce point est le symétrique de H par rapport à O.

M. Buyssens a donné deux solutions de la même question.

M. Déprez traite encore la question suivante :

Une droite Δ *coupe les côtés du triangle* ABC *aux points* A'', B'', C''. *Les perpendiculaires* AA_1, BB_1, CC_1 *élevées en* A, B, C *sur* AA'', BB'', CC'' *concourent en un point* M, *lorsque* Δ *enveloppe une certaine courbe. Quel est le lieu décrit par* M *et quelle est l'enveloppe de* Δ?

Soit $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$ l'équation de Δ. Les droites AA_1, BB_1, CC_1 ont pour équations

$$1) \quad \begin{cases} \mu(y\cos A + z) = \nu(z\cos A + y), \\ \nu(z\cos B + x) = \lambda(x\cos B + z), \\ \lambda(x\cos C + y) = \mu(y\cos C + x). \end{cases}$$

En multipliant ces égalités membre à membre on trouve l'équation du lieu de M, savoir :

$$\Sigma x(y^2 - z^2)(\cos A - \cos B\cos C) = 0.$$

Ce lieu est une cubique passant par A, B, C, O, H, I, I_a, I_b, I_c.

En éliminant x, y, z entre les équations on trouve l'équation de l'enveloppe de Δ :

$$\Sigma\lambda(\mu^2 - \nu^2)(\cos A - \cos B\cos C) = 0.$$

×Question 1018.

Voir (*Mathesis*, (2), V. p. 104).

Si M *est un point quelconque de la ligne d'Euler* HO *d'un triangle* ABC, *on a* :

$$\overline{MA}^2 + \lambda a^2 = \overline{MB}^2 + \lambda b^2 = \overline{MC}^2 + \lambda c^2,$$

où deux valeurs de λ *égales et de signes contraires se rapportent à deux points symétriques par rapport à* O. (E. Lemoine.)

Solution par MM. Francq, Colette, Déprez, Seligmann *et un anonyme.* Soient M_a, M_b, M_c et H_a, H_b, H_c, les projections des points M et H sur les côtés BC, CA, AB et soient A', B', C' les milieux de ces côtés.

$$\overline{MC}^2 - \overline{MB}^2 = \overline{M_aC}^2 - \overline{M_aB}^2 = (M_aC + M_aB)(M_aC - M_aB) = 2a.M_aA'.$$

$$b^2 - c^2 = \overline{H_aC}^2 - \overline{H_aB}^2 = 2a.H_aA'.$$

D'où

$$\frac{\overline{MC}^2 - \overline{MB}^2}{b^2 - c^2} = \frac{M_aA'}{H_aA'} = \frac{MO}{HO}.$$

On trouverait de même

$$\frac{\overline{MB}^2 - \overline{MA}^2}{a^2 - b^2} = \frac{\overline{MA}^2 - \overline{MC}^2}{c^2 - a^2} = \frac{MO}{HO}.$$

Posons

$$\frac{MO}{HO} = \lambda.$$

Il viendra

$$\overline{MA}^2 + \lambda a^2 = \overline{MB}^2 + \lambda b^2 = \overline{MC}^2 + \lambda c^2.$$

Si M' est le symétrique de M par rapport à O, M'O = — MO.

D'où

$$\frac{M'O}{HO} = -\frac{MO}{HO} = -\lambda;$$

λ aura donc deux valeurs égales et de signes contraires pour deux points symétriques par rapport à O.

Solution par MM. Hacken et Delahaye (Roye). En appliquant le théorème de Stewart au triangle HAO, le point M se trouvant entre H et O, on a :

$$\overline{MA}^2 - \frac{\overline{AH}^2 . OM}{OH} = \frac{R^2 . HM}{OH} - OM . HM. \tag{1}$$

On sait que

$$\overline{AH}^2 = 4R^2 - a^2;$$

si l'on pose

$$\frac{OM}{OH} = \lambda, \quad \frac{R^2(4OM + HM)}{OH} - OM . HM = X,$$

on obtient

$$\overline{MA}^2 + \lambda a^2 = X.$$

De la même manière, en appliquant le théorème de Stewart aux triangles HBO, HCO :

$$\overline{MB}^2 + \lambda b^2 = X, \quad \overline{MC}^2 + \lambda c^2 = X.$$

Si M prend une position symétrique par rapport à O de sa position actuelle, il suffit de changer dans (1), OM en — OM; λ changera donc aussi de signe.

Autres solutions par MM. Colart, Droz-Farny et J. Jonesco.

En éliminant λ entre les équations de M. Lemoine, on trouve l'équation de la droite d'Euler en coordonnées tripolaires, savoir

$$(b^2 - c^2)\,\overline{MA}^2 + (c^2 - a^2)\,\overline{MB}^2 + (a^2 - b^2)\,\overline{MC}^2 = 0.$$

L'équation analogue de la géométrie sphérique est

$$\cos a\,(\cos b - \cos c)\cos AM + \cos b\,(\cos c - \cos a)\cos BM + \cos c\,(\cos a - \cos b)\cos CM = 0.$$

(Déprez).

×Question 1020.

(Voir *Mathesis*, (2) V, p. 128).

L'orthocentre H *d'un triangle* ABC *est d'égale puissance par rapport aux quatre cercles qui ont respectivement les mêmes centres que les cercles tritangents et dont les rayons sont égaux aux rayons de ces cercles multipliés par* $\sqrt{2}$. (A. C.)

Solution par M. Déprez. Soit P la puissance de H par rapport au cercle de centre I et de rayon égal à $r\sqrt{2}$. On a

$$P = \overline{HI}^2 - 2r^2 = \overline{AH}^2 + \overline{AI}^2 - 2AH \cdot AI \cos HAI - 2r^2,$$

$$AH = 2R\cos A, \quad AI = \frac{r}{\sin\frac{1}{2}A} = 4R\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C,$$

$$\text{angle } HAI = \frac{B - C}{2}, \quad r = 4R\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C.$$

Il en résulte

$$P = -4R^2\cos A\cos B\cos C.$$

Semblablement

$$\overline{HI}_a^2 - 2r_a^2 = -4R^2\cos A\cos B\cos C.$$

Note. Ont résolu la même question MM. Droz Farny, J. Jonesco, V. Cristesco, Couturier, B. Jonesco, A. Gob, Mandart.

Dans les *Théorèmes et Problèmes* par Catalan (6e édition, p. 152), on trouve les relations

$$\overline{HI}^2 = 4R^2 + 2r^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

$$\overline{HI}_a^2 = 4R^2 + 2r_a^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

d'où l'on déduit

$$\overline{HI}^2 - 2r^2 = \overline{HI}_a^2 - 2r_a^2 = 4R^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

M. Cristesco invoque les formules connues

$$\overline{HI}^2 = 4R^2\left(8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} - \cos A\cos B\cos C\right),$$

$$\overline{HI}_a^2 = 4R^2\left(8\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2} - \cos A\cos B\cos C\right),$$

d'où il déduit

$$\overline{HI}^2 - 2r^2 = \overline{HI}_a^2 - 2r_a^2 = -4R^2\cos A\cos B\cos C = \frac{1}{2}(\overline{HO}^2 - R^2).$$

Le carré du rayon du cercle conjugué étant égal à $-4R^2\cos A\cos B\cos C$, ce cercle coupe orthogonalement les cercles considérés dans la question 1020.

Question 1021.

(Voir *Mathesis*, (2), V, p. 128).

Par le sommet O *de la cubique*

$$y = a\sqrt{\frac{x}{ka-x}}$$

on mène une sécante OAB *et la sécante* OA'B' *symétrique de* OAB *par rapport à l'axe de la courbe.* 1° *L'aire comprise entre la cubique et son asymptote est finie et égale à* $k\pi a^2$. 2° *Les tangentes en* A *et* B *se rencontrent sur la cubique.* 3° *Le lieu du point de rencontre des tangentes en* A *et* B *est une cubique.*

Cette dernière cubique, quelle que soit la valeur de k, *passe par deux points fixes.* (E. N. Barisien.)

Solution par M. Retali (Milan). L'aire comprise entre la cubique et son asymptote $x - ka = 0$ est

$$S = 2a\int_0^{ka}\sqrt{\frac{x}{ka-x}}\,dx;$$

en posant $ka = r^2$ et $\sqrt{ka-x} = z$, on trouve

$$S = 4a\int_0^r\sqrt{r^2-z^2}.\,dz = 4a.\,\frac{\pi r^2}{4} = \pi a^2 k.$$

Si l'on prend pour axe des y l'asymptote, et qu'on change le sens des abscisses positives, l'équation de la courbe devient

$$xy^2 + a^2x = a^2k.$$

La cubique a donc un point double (conjugué) à l'infini sur l'axe des x, et un de ses trois points d'inflexion est le point à l'infini de l'axe des y. Les tangentes au point double sont $y = \pm a\sqrt{-1}$.

La représentation paramétrique de notre cubique est

$$x = \frac{ka}{1+\theta^2}, \quad y = a\theta;$$

le paramètre du sommet est $\theta = 0$, celui du point stationnaire à l'infini, $\theta = \infty$. Entre les paramètres des trois points d'intersection d'une cubique acnodale avec une droite il existe la relation(*)

$$\theta'\theta'' + \theta''\theta''' + \theta'''\theta' = +1;$$

il s'ensuit que les paramètres de deux points A et B en ligne droite avec le sommet sont *réciproques*, et les paramètres de deux points B et B′ en ligne droite avec le point stationnaire à l'infini (c'est-à-dire symétriques par rapport à l'axe de la courbe) sont *égaux et de signes contraires*. Les paramètres des autres deux points d'inflexion sont

$$\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

et, par suite, les coordonnées de ces points sont

$$\left(\frac{3}{4}ka, \pm \frac{a}{\sqrt{3}}\right).$$

Les tangentes à la cubique aux points A, B et B′, dont les paramètres sont θ, $\frac{1}{\theta}$ et $-\frac{1}{\theta}$, ont pour équations

(1) $\qquad (1+\theta^2)^2x + 2k\theta y = ka(1+3\theta^2)$

(2) $\qquad (1+\theta^2)^2x + 2k\theta^3 y = ka\theta^2(3+\theta^2)$

(3) $\qquad (1+\theta^2)^2x - 2k\theta^3 y = ka\theta^2(3+\theta^2),$

dont les deux premières donnent, pour le point commun aux tangentes menées en A et B,

$$x = \frac{2ka\theta^2}{(1+\theta^2)^2}, \quad y = \frac{a(1+\theta^2)}{2.\theta};$$

(*) Voir Salmon-Fiedler, Höhere Curven, Art. 216, page 238 de la deuxième édition.

le lieu de ce point est donc la cubique cuspidale

$$xy^2 = a^3k;$$

le rebroussement est le point à l'infini de la droite $y = 0$, qui est la tangente cuspidale; la tangente stationnaire est $x = 0$, le point stationnaire est le point à l'infini de cette droite. Le lieu trouvé et la cubique donnée ont donc un point d'inflexion commun à l'infini avec même tangente stationnaire, et le rebroussement de la première courbe coïncide avec le point double de la cubique acnodale. Il n'est donc pas tout à fait exact de dire que les cubiques $xy^2 = a^3k$ passent par *deux* points fixes, car elles forment un faisceau, ce qui est dailleurs évident puisque l'équation contient le paramètre k linéairement.

Les équations (1) et (3) donnent pour le point commun aux tangentes menées en A et B′

$$x = \frac{4ka\theta^2}{(1+\theta^2)^2}, \quad y = \frac{a(1-\theta^2)}{2\theta};$$

c'est le point de la cubique donnée ayant pour paramètre

$$\frac{1-\theta^2}{2\theta}.$$

Autrement. En posant $\theta'' = \theta''' = \theta$ dans la relation

$$\theta'\theta'' + \theta''\theta''' + \theta'''\theta' = +1$$

on reconnaît immédiatement que le tangentiel du point θ est $\frac{1-\theta^2}{2\theta}$, et cette dernière expression ne varie pas si l'on change θ en $-\frac{1}{\theta}$, c'est-à-dire, si l'on passe du point A au point B′.

Autrement. Puisque les tangentiels des trois points O, A, B sont en ligne droite, il s'ensuit que les tangentiels de A et B sont symétriques par rapport à $y = 0$, mais les tangentiels de B et B′ sont aussi symétriques par rapport à la même droite; donc les tangentiels des points A et B′ coïncident.

Remarque. MM. Schoute et Zeuthen ont résolu le problème général suivant : *Par un point* O *situé dans le plan d'une courbe algébrique on mène une sécante l à la courbe, et aux points où cette sécante coupe la courbe on mène les tangentes. Trouver le lieu engendré par les points d'intersection mutuelle de ces tangentes quand la sécante l tourne autour*

du point O (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. X, p. 242, et t. XI; avril 1877). Le n° 3 de la question 1021 est un cas très particulier de ce problème de STEINER.

MM. MANDART et JEAN JONESCO ont résolu la même question.

×Question 1022.

(Voir *Mathesis*, (2), V, p. 152).

Soient BCDE, CAMN, ABPQ *les carrés construits extérieurement sur le côté* BC *et intérieurement sur les côtés* CA, AB *d'un triangle* ABC. *Si* tg A = 2, *les droites* DE, MN, PQ *et les tangentes en* B *et* C *au cercle circonscrit à* ABC *concourent en un même point.* (SANJANA).

Solution par M. E. COLART (Huy). Soient S le milieu de DE, I le milieu de BC, et F le point diamétralement opposé à B sur le cercle ABC.

Par hypothèse, CF = $\frac{1}{2}$ BC. Les deux triangles BCF et BIS sont donc égaux. Par suite, angle SBI = BFC et BS est tangente en B.

On a aussi BS = BF, angle PBS = ABF. Les deux triangles BAF et BPS sont donc égaux; par suite, PS est le prolongement de QP.

On démontrerait de même que MN passe par E.

Ont résolu la même question MM. A. FRANCQ, TIETE, CRISTESCO, B. JONESCO, DROZ FARNY, J. JONESCO, MANDART, MERLIN, SELIGMANN, COUTURIER.

×Question 1021.

(Voir *Mathesis*, (2) V, p. 215).

Si l'angle A *d'un triangle* ABC *est égal à* 60° *ou* 120°, *la ligne d'Euler* HO *forme un triangle isoscèle avec les côtés* AB, AC, *et le centre du cercle des neuf points est situé sur la bissectrice de l'angle* BAC *ou sur celle de l'angle supplémentaire adjacent.* (J. NEUBERG.)

Solution par A. DROZ FARNY. Supposons l'angle A = 60°, et soit A' le milieu de BC. On sait que AH = 2OA'; mais dans le triangle rectangle BOA', comme l'angle BOA' = 60°, on a aussi :

$$BO = 2OA'.$$

Par conséquent

$$BO = OA = AH.$$

Le triangle OAH est donc isoscèle; OA et AH étant deux isogonales dans l'angle A, la bissectrice de A est aussi bissectrice de OAH et elle passe par le milieu de OH, centre du cercle des neuf points; OH étant perpendiculaire sur la bissectrice de l'angle A, la première partie de la question est démontrée.

Démonstration identique pour $A = 120°$.

Ont résolu la même question MM. Cristesco, Mandart, Merlin, J. Jonesco, Jeřábek, Tirte, E. Colart, A. Francq, Déprez.

M. Déprez signale encore d'autres propriétés du triangle ABC dans lequel $A = 60°$; nous en retenons les suivantes, d'un caractère élémentaire : 1° On a

$$p = (R + r)\sqrt{3} = r_a\sqrt{3}, \quad r_a = r + R, \quad r_b + r_c = 3R,$$

$$S = rr_a\sqrt{3} = \frac{r_b r_c}{\sqrt{3}} = r(R + r)\sqrt{3}.$$

2° Prenons sur AB la longueur $AC' = b$, et sur AC la longueur $AB' = c$: les huit points B, C, B', C', I, I_a, O, H appartiennent à une même circonférence.

D'après une communication de M. Delahaye (Roye), la question 1031 est résolue en partie dans le Journal de Vuibert, 8° année p. 116, et 12° année p. 152. Nous l'avons rencontrée comme conséquence d'une question plus générale que nous avons proposée dans les *Wiskundige Opgaven*. (J. N.).

QUESTIONS D'EXAMEN.

783. Résoudre un triangle isoscèle, connaissant le périmètre $2p$ et la hauteur h issue d'une extrémité de la base. (Bellacchi).

Soient $2x, y, y$ les côtés du triangle et z la hauteur relative à la base $2x$. On a

$$y + x = p, \quad y^2 - x^2 = z^2, \quad 2xz = hy;$$

d'où l'on déduit l'équation en z :

$$z^3 + \frac{1}{2}hz^2 - p^2z + \frac{p^2h}{6} = 0,$$

ou en faisant $z = z_1 - \frac{1}{6}h$:

$$z_1^3 - \frac{12p^2 + h^2}{12}z_1 + \frac{h^3 + 72p^2h}{108} = 0.$$

Le problème n'admet pas de solution par la règle et le compas.

784. Trouver l'équation de la normale au point (x', y') d'une hyperbole équilatère; chercher la longueur de la corde interceptée.

785. On considère les circonférences de même axe radical xx'. Le lieu géométrique des points de contact des tangentes perpendiculaires à xx' est une hyperbole équilatère. (E. N. Barisien).

Ce théorème est une interprétation de l'équation $y^2 = x^2 \pm a^2$, la ligne des centres des circonférences étant prise pour axe des y. Si x, y sont les coordonnées d'un point du lieu, $y^2 - x^2$ est la puissance de l'origine des coordonnées par rapport à la circonférence correspondante.

786. Discuter le signe de la quantité

$$P \equiv (a+b)(b+c)(c+a) - 8abc.$$

On a

$$P \equiv a^2(b+c) + a(b^2 + c^2 - 6bc) + bc(b+c)$$

Soient a_1, a_2 les racines de l'équation $P = 0$; elles sont réelles et inégales, égales ou imaginaires suivant que la quantité

$$\Delta \equiv (b^2 + c^2 - 6bc)^2 - 4bc(b+c)^2$$
$$\equiv (b^2 - 14bc + c^2)(b-c)^2$$

est positive, nulle ou négative.

On a

$$b^2 - 14bc + c^2 = c^2\left(\frac{b}{c} - m\right)\left(\frac{b}{c} - n\right),$$

en posant

$$m = 7 + \sqrt{48}, \quad n = 7 - \sqrt{48}.$$

Si le rapport $\frac{b}{c}$ est compris entre m et n, sans être égal à l'unité, Δ est négatif, et P a le signe de $b + c$.

Si $\frac{b}{c} = m$, n ou 1, on a $\Delta = 0$, et P a encore le signe de $b + c$.

Si $\frac{b}{c} > m$ ou $< n$, Δ est positif; a_1 et a_2 étant réels, P a le signe de $b + c$ pour les valeurs de a non comprises entre a_1 et a_2, et le signe contraire pour a compris entre a_1 et a_2.

P est positif pour toutes les valeurs positives de a, b, c; c'est ce qu'on déduit des inégalités

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}, \quad \frac{b+c}{2} > \sqrt{bc}, \quad \frac{c+a}{2} > \sqrt{ca}.$$

La discussion précédente montre que les conditions $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ sont suffisantes, mais non nécessaires.

(En partie d'après le J. M. E. 1897, p. 14).

787. On considère une série d'ellipses d'aire constante ayant même centre et même directions d'axes, et un point fixe P dans leur plan. L'enveloppe des polaires du point P par rapport à chacune des ellipses de la série est une hyperbole équilatère. (E. N. Barisien).

788. $7^{2n+1} - 48n - 7$ est divisible par 288. (*Journal de* Vuibert).

L'expression proposée peut s'écrire

$$7(7^{2n} - 1) - 48n = 7(7^2 - 1)(7^{2n-2} + 7^{2n-4} + \cdots + 1) - 48n.$$

Supprimons le facteur 48 ; le quotient est

$$7(7^{2n-2}+7^{2n-4}+\cdots+7^2+1)-n. \tag{1}$$

La parenthèse se compose de n termes qui sont des multiples de $6+1$. On en conclut que l'expression (1) est divisible par 6, etc.

789. On donne deux droites parallèles et deux points. Mener par ces deux points deux droites parallèles formant un losange avec les deux premières.

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1108** (*Rectification*). Si $Q_{n,p}$ désigne la somme des produits p à p des fractions $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}$, on a la formule

$$\sum_{p=1}^{p=n} 2^p Q_{n,p} = \frac{1}{2}(n^2+3n).$$

(H. MANDART).

1111. Dans un triangle isoscèle ABC, le côté AB est fixe et la base BC tourne autour de B. Démontrer que deux côtés du triangle orthique de ABC enveloppent une même hypocycloïde de Steiner, et que le troisième côté enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements.

(DROZ FARNY).

1112. On mène une corde AB d'un cercle donné, et AC égale et perpendiculaire à AB. La droite BC rencontre le diamètre AA′ au point D, qu'on projette en E sur AB. Cela posé, trouver les lieux des points C et E : 1° lorsque A est fixe; 2° lorsque B est fixe.

(J. JONESCO).

×**1113.** Résoudre le système

$$\begin{aligned} a &= y + x(1+z)^2, \\ b &= y(1+z)^2 + xz^2, \\ c &= x + yz^2. \end{aligned}$$

(LEMOINE).

×**1114.** Construire un parallélogramme ABCD semblable à un parallélogramme *abcd* et tel que les sommets A et C se trouvent sur une circonférence donnée O et les deux autres sommets B et D sur une seconde circonférence donnée O′.

Cas particulier où ABCD est un carré. (SOONS).

Rectification. Page 30, question 778, lire : $27\sin^6\omega\cos^6\omega$ *au lieu de* $27\sin^5\omega\cos^5\omega$.

SUR UNE CONIQUE INSCRITE OU CIRCONSCRITE A UN TRIANGLE;

par M. STUYVAERT (*suite*, voir pp. 63-67).

III.

9. Reprenons, comme au début du § II, le triangle ABC, le point H et la droite s.

La nature de l'involution déterminée sur s, par les couples de droites (HA, BC), (HB, AB), (HC, AB) dépend de la position du point H et de la droite s.

Pour décider si l'involution est elliptique ou hyperbolique, il suffit de voir si les segments interceptés, sur s, par deux des couples de droites, empiètent ou non l'un sur l'autre.

Supposons d'abord que la droite s ne coupe aucun des côtés du triangle ABC; elle partage alors le plan en deux régions, dont l'une contient le triangle. Dans cette région, si le point H est dans le triangle ou dans un des angles opposés par le sommet à ceux du triangle, l'involution est elliptique, sinon hyperbolique; l'inverse a lieu dans l'autre région du plan.

Cela se vérifie directement sur la figure, et l'on résout sans plus de difficulté le cas où la droite s coupe le triangle.

Pour comprendre toutes les circonstances dans un même énoncé, convenons de dire, avec von Staudt(*), que deux points sur une droite indéfinie limitent deux segments, l'un fini, l'autre passant par le point de l'infini de la droite.

A, B, C sont donc les sommets de quatre triangles, que nous pouvons appeler T_1, T_2, T_3, T_4; la droite s est extérieure à l'un d'eux, T_1 par exemple, et partage chacun des autres en un triangle et un quadrilatère (t_2 et q_2; t_3 et q_3, t_4 et q_4). L'involution est elliptique si H est compris dans T_1, t_2, t_3 ou t_4; hyperbolique si H est dans q_2, q_3 ou q_4. Le cas où la droite s est parallèle à l'un des côtés est compris dans ce qui précède.

10. Supposons la droite s rejetée à l'infini; les points doubles de l'involution ayant pour support cette droite, et les sommets du triangle ABC déterminent une conique (Σ). En d'autres termes les droites joignant un point H aux sommets du triangle, et les parallèles, menées par H, aux

(*) *Geometrie der Lage*, Nurnberg 1847.

côtés opposés forment un faisceau involutif, dont les rayons doubles sont parallèles aux asymptotes d'une conique (Σ) circonscrite au triangle.

La nature de l'involution détermine aussi la nature de la conique (Σ), et, d'après le n° précédent, celle-ci est une ellipse quand le point H est dans le triangle ou dans un des angles opposés par le sommet aux angles intérieurs, une hyperbole quand le point H est dans un des angles extérieurs, une parabole quand le point H est à l'infini.

La conique (Σ) est un cercle quand H coïncide avec l'orthocentre du triangle, une hyperbole équilatère quand H est sur la circonférence circonscrite au triangle; en effet, dans ce dernier cas les rayons HA, HB, HC du faisceau involutif font entre eux des angles égaux à ceux de leurs conjugués, les parallèles menées par H à BC, CA, AB; par suite les rayons doubles du faisceau sont rectangulaires.

Enfin la conique (Σ) dégénère si H est sur un des côtés du triangle ABC.

IV.

11. En ayant égard à ce qui est exposé au n° 10, on peut dire qu'un triangle ABC, un point H et la droite de l'infini déterminent une conique (Σ).

On peut se proposer de trouver le lieu des points H tels que les coniques (Σ) soient des courbes semblables (*).

Des coniques semblables ont l'angle des asymptotes constant, ou, ce qui revient au même, les rayons qui projettent, d'un même centre, leurs points de l'infini se correspondent dans deux faisceaux directement égaux. Pour comprendre, dans le même énoncé, le cas des imaginaires, on dira que les involutions de points conjugués relativement aux coniques (Σ) ayant pour support la droite de l'infini sont projetées, d'un même centre, suivant des involutions de rayons qui se correspondent dans deux faisceaux directement égaux.

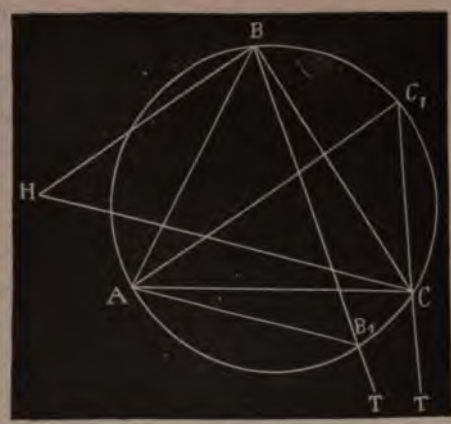
Choisissons pour centre commun des faisceaux le sommet A du triangle, et menons le cercle circonscrit.

Chacune des involutions de rayons marque, sur la circonférence, une

(*) L'objet de cette étude nous a été suggéré par M. Cl. Servais, à qui nous devons plusieurs indications utiles.

involution de points déterminée par deux couples : AC et AC_1 parallèles à HB, AB et AB_1 parallèles à HC.

On peut déterminer le pôle T de cette involution de points sur la circonférence : c'est le point de rencontre de BB_1 et CC_1.



Il est visible que deux involutions pareilles se correspondent dans deux faisceaux directement égaux, si l'on peut trouver, de la seconde, deux couples de points correspondants β, β_1 et γ, γ_1, tels que les arcs $B\beta$, $B_1\beta_1$, $C\gamma$, $C_1\gamma_1$, soient égaux et de même sens; mais alors toute la figure aura tourné d'un certain angle autour du centre du cercle circonscrit, et le point T se sera déplacé sur une circonférence concentrique.

Ainsi les points H et T se correspondent dans une certaine transformation, et le lieu des points H tels que les coniques (Σ) soient semblables est une courbe (H) transformée d'une circonférence concentrique au cercle ABC.

On devinera la forme de la courbe (H) en appliquant le principe de correspondance de Chasles.

Tout rayon BT rencontre la circonférence (T) en deux points; donc il lui correspond deux rayons tels que CT et réciproquement. Mais les droites BT, AB_1 et CH décrivent des faisceaux projectifs, et de même les droites CT, AC_1 et BH. Par suite la correspondance des faisceaux CH et BH peut être représentée, suivant la notation de Chasles, par (2, 2); la même correspondance existe pour deux ponctuelles, sections de ces deux faisceaux par une droite ne passant ni par B ni par C; dans ces ponctuelles, le nombre des coïncidences est donc 4, c'est-à-dire que le lieu du point H est du 4e ordre, puisque toute droite du plan le rencontre en 4 points. Seulement une droite passant par B, étant elle-même un rayon du faisceau, ne rencontre le lieu qu'en deux points autres que B; celui-ci est donc un point double de la courbe, ainsi que C et A.

Chacune des quartiques trinodales, que l'on vient de trouver est

déterminée par un seul point H; ces courbes forment donc un faisceau. Leurs trois points doubles comptent pour douze intersections, elles ont encore quatre autres points fixes communs. Comme on va le voir, ces points coïncident deux à deux avec les points cycliques du plan.

Cherchons en effet les intersections de la droite de l'infini avec une des courbes (H). Pour que deux droites BH, CH soient parallèles, il faut et il suffit que les rayons AB_1, AC_1 (réels ou imaginaires) coïncident; alors C_1 et B_1 ne forment qu'un point qui est à la fois sur le cercle ABC et sur le cercle (T); or ces deux cercles ont un double contact aux points cycliques, donc la droite de l'infini est une tangente double à toutes les quartiques (H). Quant aux points de contact, ce sont certainement les points circulaires à l'infini, car à une droite isotrope du faisceau CT correspond une droite isotrope du faisceau BH.

On peut énoncer, de la manière suivante, le résultat obtenu.

Si par un point H *du plan d'un triangle, on mène des droites aux sommets, et des parallèles aux côtés opposés, ces trois couples de rayons marquent, sur la droite de l'infini, une involution de points conjugués par rapport à une conique* (Σ) *circonscrite au triangle.*

Les courbes lieux des points H *tels que les coniques* (Σ) *soient semblables sont des quartiques trinodales, ayant leurs nœuds aux sommets du triangle, et un double contact avec la droite de l'infini aux points cycliques.*

12. L'application du principe de correspondance exige des précautions, et ce théorème est surtout un instrument de recherche. Il convient donc de vérifier les résultats par quelque autre méthode, et l'analyse peut être employée avec succès, bien que les calculs présentent des longueurs. Nous nous contenterons d'esquisser la marche à suivre.

Soit

$$lyz + msx + nxy = 0, \qquad (1)$$

l'équation d'une conique (Σ) circonscrite au triangle de référence ABC.

Cherchons l'équation des droites menées par A et passant par les points à l'infini de la conique (ou parallèles à ses asymptotes); nous trouvons

$$y^2 n \sin B + ys(-l \sin A + m \sin B + n \sin C) + s^2 m \sin C = 0. \qquad (2)$$

Appelant φ l'angle des asymptotes, on obtient :

$$tg\varphi = \frac{\sin A \sqrt{(-l \sin A + m \sin B + n \sin C)^2 - 4mn \sin B \sin C}}{n \sin B + m \sin C - (-l \sin A + m \sin B + n \sin C)\cos A}. \qquad (3)$$

Si x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées du point H correspondant à la conique (Σ), il faut exprimer que la parallèle menée par A à HB et la droite AC sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites représentées par l'équation (2), ce qui conduit à l'équation :

$$z_1 \sin C\,(l \sin A + m \sin B - n \sin C) = x_1 \sin A\,(-l \sin A + m \sin B + n \sin C).$$

On trouvera, par permutation tournante, deux autres conditions analogues pour exprimer que AB et AB_1 se correspondent dans l'involution, ainsi que HA et la parallèle par A à BC. De ces trois relations, dont une est une conséquence des autres, on peut tirer un seul système de valeurs de $\frac{l}{n}$ et $\frac{m}{n}$ en fonction de x_1, y_1 et z_1. Portant ces valeurs dans l'équation (3), considérant $tg\varphi$ comme un paramètre arbitraire, et x_1, y_1, z_1 comme coordonnées courantes, on a l'équation du faisceau de courbes lieux des points H. Après quelques calculs, cette équation se met sous la forme

$$k\,[f(x,y,z)]^2 - xyz\,(x \sin A + y \sin B + z \sin C) = 0$$

où l'on a :

$$f(x, y, z) = xy \sin C + yz \sin A + zx \sin B.$$

Cette équation représente un faisceau de quartiques trinodales ; l'une de ces courbes, correspondant à $k = 0$, se réduit aux trois côtés du triangle de référence accompagnés de la droite de l'infini ; une autre, correspondant à $k = \infty$, se réduit au cercle ABC dont tous les points seraient des points doubles.

Les points cycliques étant communs au cercle et à la droite de l'infini sont évidemment sur chacune de ces courbes, et si l'on cherche la tangente en l'un d'eux, on trouve la droite de l'infini.

Gand, le 29 janvier 1897.

NOTES MATHÉMATIQUES.

11. *Sur les combinaisons.* On sait que

$$C_m^r = C_m^{m-r}.$$

Réciproquement, si

(1) $$C_m^r = C_m^s,$$

on a $r + s = m$. En effet, soit $r > s$; l'égalité (1) revient à celle-ci :

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-r+1)}{1\cdot 2\cdots r} = \frac{m(m-1)\cdots(m-s+1)}{1\cdot 2\cdots s};$$

en divisant le premier numérateur par le second, et le premier dénominateur par le second, on obtient

$$(m-s)(m-s-1)\cdots(m-r+1) = (s+1)(s+2)\cdots r.$$

On a ainsi deux produits de $(s-r)$ nombres consécutifs égaux, ce qui exige l'égalité des plus grands facteurs, ou $m - s = r$.

La même proposition résulte aussi de ce que les coefficients de $(x+a)^m$ vont en augmentant jusqu'au milieu du développement, puis décroissent en repassant par les mêmes valeurs. (Barbette, *Liége*).

×12. *Sur le théorème relatif au carré de l'hypoténuse et le cinquième postulat d'Euclide.* Soit ABC un triangle isoscèle rectangle en A, ayant pour hauteur AD. On aura AB = AC, BD = DC = $\frac{1}{2}$ BC.

Si l'on admet le théorème relatif au carré de l'hypoténuse, on a

$$\overline{BC}^2 \quad \text{ou} \quad 4\,\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$$

ou, puisque BD = DC,

$$2\overline{BD}^2 = 2\overline{AD}^2, \qquad BD = AD$$

Le triangle ABD est donc isoscèle et l'angle en B est égal à $\frac{1}{2}$ droit; il en est de même de l'angle en C.

La somme des angles du triangle ABC est donc égale à deux droits; par suite, d'après des théorèmes dus à Legendre, la somme des angles de tout triangle vaut deux droits, ce qui entraîne la vérité du cinquième postulat d'Euclide (V. Reyes, *Bulletin de mathématiques élémentaires*, 1er février 1897, pp. 132-133).

×13. *La multiplication égyptienne et russe.* Soit à multiplier 42 par 37. On a

$$37 = 2^5 + 2^2 + 1.$$

Or

$$42 \times 1 = 42$$
$$42 \times 2^2 = 84 \times 2 = 168$$
$$42 \times 2^5 = 168 \times 2^3 = 336 \times 2^2 = 672 \times 2 = 1344$$
$$42 \times 37 = 1554$$

On peut évidemment ramener toute multiplication, comme la préci-

dente à une suite de *duplications* et à une addition, et c'est ainsi que procédaient les anciens Egyptiens (CANTOR, *G. d. Math.*, tome I, 2e édition, pp. 46-47).

D'après M. Plakhovo (JME, 1896, p. 22-23), les paysans russes emploient le même procédé sous une forme très originale. On a

37 fois 42 égale à 1 fois 42
plus 18 fois 84, ou
9 fois 168, qui est égale à 1 fois 168
plus 4 fois 336, ou
2 fois 672, ou 1 fois 1344
Donc le produit total est 1554

On dispose l'opération comme il suit :

37	42	42
18	84	
9	168	168
4	336	
2	672	
1	1344	1344
		1554

Pour former ce tableau, on divise le multiplicande par 2, en ne prenant que le quotient entier, et on multiplie le multiplicateur par 2; on procède de même sur le quotient et le produit obtenu, et l'on continue ces opérations jusqu'à ce qu'on arrive dans la première colonne au quotient 1. On ajoute ensuite les nombres de la seconde colonne qui correspondent à des nombres impairs de la première.

14. *Sur une propriété des coniques*, par M. A. DROZ-FARNY, Professeur à Porrentruy. — M. Mannheim vient de proposer dans le J. M. E., 1896, p. 96, l'intéressante question suivante :

Une tangente quelconque t menée au cercle inscrit à un triangle ABC *rencontre les bissectrices* AI, BI, CI *aux points* A_1, B_1, C_1. *Les secondes tangentes menées de ces points au cercle rencontrent respectivement les côtés* BC, CA, AB *en* A_2, B_2, C_2. *Démontrer que les points* A_2, B_2, C_2 *sont situés sur une même droite t' passant par* I.

Comme le fait remarquer très justement M. J. NEUBERG dans le numéro de janvier 1897 de *Mathesis*, cette proposition est susceptible de généralisation. Le cercle peut être remplacé par une conique

quelconque inscrite au triangle ABC et le point I par un point quelconque du plan du triangle.

Voici une démonstration très simple de ce théorème généralisé qui pourra intéresser quelques lecteurs de *Mathesis*.

Considérons l'hexagone $A_1A_2BAB_2B_1$ circonscrit à la conique. En vertu du théorème de Brianchon, les trois diagonales AA_1, BB_1, A_2B_2 se croisent en un même point. Or AA, et BB, se coupent en I ; donc A_2, B_2, I sont trois points en ligne droite ; on démontrerait de même que A_2, C_2 I sont en ligne droite, d'où le théorème.

On démontrerait tout aussi simplement la proposition corrélative.

RÉSUMÉ DES PROPRIÉTÉS CONCERNANT LES TRIANGLES D'AIRE MAXIMUM INSCRITS DANS L'ELLIPSE,

par M. E. N. Barisien.

(Voir *Mathesis*, (2), V, pp. 42 et 81).

27 (*). Le centre de gravité du triangle formé par les centres de courbure des trois points B, C, D coïncide avec le centre du cercle circonscrit au triangle BCD.

28. On a les relations

$$\cos\varphi = \cos 3\varphi_1 = \cos 3\varphi_2 = \cos 3\varphi_3,$$
$$-\sin\varphi = \sin 3\varphi_1 = \sin 3\varphi_2 = \sin 3\varphi_3,$$

c'est-à-dire que les angles d'anomalie excentrique aux sommets B, C, D du triangle T sont les racines des équations en Φ

$$\cos 3\Phi = \cos\varphi, \quad \sin 3\Phi = -\sin\varphi.$$

Par suite

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}, \quad \varphi_2 - \varphi_3 = \frac{2\pi}{3}, \quad \varphi_1 - \varphi_3 = \frac{4\pi}{3};$$

$$\varphi_1 = 2\pi - \frac{\varphi}{3}, \quad \varphi_2 = \frac{4\pi}{3} - \frac{\varphi}{3}, \quad \varphi_3 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\varphi}{3}.$$

29. Les sommets du triangle T′ formé par les tangentes aux sommets B, C, D du triangle T sont situés sur l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = 4a^2b^2.$$

L'ellipse donnée est l'ellipse d'aire maximum inscrite à T′.

(*) Les notations sont les mêmes que celles de *Mathesis* (2), V, p. 42.

29. La somme des carrés des distances du centre de l'ellipse donnée aux sommets du triangle T est constante et égale à $\frac{3}{2}(a^2+b^2)$.

31. La puissance du centre de l'ellipse par rapport au cercle des neuf points du triangle T est constante et égale à $-\frac{a^2+b^2}{8}$.

32. L'axe radical du cercle circonscrit au triangle T et de son cercle des neuf points enveloppe l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{(a^2+b^2)^2}{c^4}.$$

33. Le centre de l'hyperbole équilatère ABCD a pour lieu l'ellipse

$$a^2x^2+b^2y^2=\frac{(a^2+b^2)^2}{16}.$$

34. La droite qui unit le centre du cercle ABCD au centre de l'hyperbole équilatère ABCD est normale à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b^6}=\frac{(a^2+b^2)^2}{(a^4+a^2b^2+b^4)^2}.$$

35 L'hyperbole équilatère ABCD enveloppe la quartique

$$\left[2(x^2-y^2)-c^4\right]^2=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\left(a^2+b^2\right)^2.$$

36. Le point de rencontre des axes des deux paraboles passant par les joints A, B, C, D décrit l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{16}.$$

37. Les droites AB, AC, AD (cordes communes à l'ellipse et au cercle osculateur en B, C ou D), enveloppent la courbe (*)

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=2.$$

L'aire de cette courbe est $\frac{3}{2}\pi ab$.

38. Le lieu des pôles, par rapport à l'ellipse, des droites A'B, A'C, A'D est la kreuzcurve

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=4.$$

A' est le symétrique de A par rapport au centre O de l'ellipse.

(*) Voir *N. A. M.*, 1873, pp. 39 — 41.

39. Le lieu des milieux des cordes A'B, A'C, A'D est la sextique

$$(b^2x^2 + a^2y^2)^3 = 4a^4b^4x^2y^2,$$

dont l'aire est $\frac{1}{2}\pi ab$.

40. La projection du centre O de l'ellipse sur chacune des cordes A'B, A'C, A'D, décrit la sextique

$$(x^2 + y^2)^2(a^2x^2 + b^2y^2) = 4a^2b^2x^2y^2,$$

dont l'aire est

$$U = \frac{2\pi a^2b^2}{(a+b)^2} = 2\pi\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2.$$

Cette aire est deux fois l'aire du cercle concentrique à l'ellipse et tel qu'il existe une infinité de triangles inscrits dans l'ellipse et circonscrits au cercle.

41. Les droites A'B, A'C, A'D sont normales à l'ellipse

$$a^2x^2 + b^2y^2 = \frac{4a^4b^4}{c^4}.$$

42. Le lieu du point de rencontre des droites A'B et CD est la sextique

$$(b^2x^2+a^2y^2+a^2b^2)^2\left(b^2x^2+a^2y^2-\frac{a^2b^2}{4}\right)=4a^2b^2x^2y^2(b^2x^2+a^2y^2+2a^2b^2).$$

43. Le lieu du point de rencontre des tangentes en B, C, D à l'ellipse avec la tangente en A est la quartique.

$$(b^2x^2 - a^2y^2)^2 = a^2b^2(b^2x^2 + a^2y^2).$$

44. Le triangle d'aire maximum inscrit dans l'ellipse et dont un des sommets est A a ses deux autres sommets en β et γ. La droite $\beta\gamma$ rencontre le côté BC en un point tel que la droite qui joint ce point au point O a la même inclinaison sur les axes que la droite OD.

45. Le point de rencontre de la droite $\beta\gamma$ avec un côté du triangle BCD décrit la quartique

$$(b^2x^2 - a^2y^2)^2 = \frac{a^2b^2}{4}(b^2x^2 + a^2y^2).$$

46. Le lieu des points de rencontre des côtés opposés et des diagonales du quadrilatère ABCD est la courbe

$$[(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)^2 - b^4x^2(x^2 + 3a^2) - a^4y^2(y^2 + 3b^2)]^2$$
$$= 4a^4b^4x^2y^2(x^2 + 3a^2)(y^2 + 3b^2).$$

Cette courbe se réduit au 6e degré : son équation s'écrit

$$32x^2y^2(b^2x^2+a^2y^2)-25(b^2x^2+a^2y^2)^2$$
$$+32a^2b^2x^2y^2+10a^2b^2(b^2x^2+a^2y^2)-a^4b^4=0.$$

47. Le lieu des pieds des hauteurs du triangle BCD a pour aire

$$U=\frac{\pi(a^2+b^2)}{8}+\frac{5\pi}{2}(a-b)^2-\frac{6\pi c^4}{8ab}.$$

48. Le lieu du centre de gravité du triangle ACD a pour aire $\frac{11}{36}\pi ab$.

49. Le lieu de l'orthocentre du triangle ACD a pour aire

$$2\pi ab+\frac{3\pi c^4}{4ab}.$$

50. Le lieu du centre du cercle des neuf points du triangle ACD a pour aire

$$\frac{11\pi ab}{16}+\frac{3\pi c^4}{64ab}.$$

51. Le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle A'CD a pour aire $\frac{\pi c^4}{16ab}$. Cette aire est la même que celle de l'ellipse de la propriété 27.

52. Le lieu du centre de gravité du triangle A'CD a pour aire $\frac{11\pi ab}{36}$. Cette aire est la même que celle de la courbe de la propriété 48.

53. La courbe lieu de l'orthocentre du triangle A'CD a pour aire

$$\frac{11\pi ab}{4}+\frac{5\pi c^4}{4ab}.$$

54. La courbe lieu du centre du cercle des neuf points du triangle A'CD a pour aire

$$\frac{29\pi ab}{16}+\frac{9\pi c^4}{64ab}.$$

55. Le milieu de la distance des centres des cercles circonscrits aux triangles ACD et A'CD décrit l'ellipse

$$a^2x^2+b^2y^2=\frac{c^4}{16}.$$

C'est l'ellipse des propriétés 12 et 27.

56. Le milieu de la distance des centres de gravité des triangles ACD et A'CD parcourt l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{36}.$$

57. Le milieu de la distance des orthocentres des triangle ACD et A'CD décrit l'ellipse

$$a^2x^2+b^2y^2=\frac{a^2b^2}{4}.$$

58. Le milieu de la distance des centres des cercles des neuf points des triangles ACD et A'CD décrit l'ellipse

$$a^2x^2+b^2y^2=\frac{(a^2+b^2)^2}{64}.$$

59. Le milieu de la droite qui joint le point A à l'orthocentre du triangle BCD décrit l'ellipse

$$a^2x^2+b^2y^2=\frac{(a^2+b^2)^2}{16}.$$

60. L'hyperbole équilatère A'BCD enveloppe la kreuzcurve

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=4.$$

Son centre décrit l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{4}.$$

61. Les paraboles passant par les points A',B,C,D ont chacune leur axe parallèle à une des diagonales du rectangle des axes de l'ellipse donnée.

Elles enveloppent les deux quartiques

$$[(bx+ay)^2-a^2b^2]^2=a^2b^2(b^2x^2+a^2y^2),$$
$$[(bx-ay)^2-a^2b^2]^2=a^2b^2(b^2x^2+a^2y^2);$$

leurs axes se coupent sur l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^6}+\frac{y^2}{b^6}=\frac{1}{4(a^2+b^2)^2}.$$

62. Soient C_1 et H le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre du triangle BCD. Les droites AC_1, $A'C_1$, AH, A'H sont normales, chacune, à une ellipse fixe.

83. Soit C_2 le centre du cercle des neuf points du triangle BCD. Les droites AC_2 et $A'C_2$ sont normales chacune à une ellipse fixe.

84. Les deux paraboles circonscrites au quadrilatère ABCD enveloppent les deux quartiques

$$a^2(2y^2 - b^2)^2 = b^2(b^2x^2 + a^2y^2), \quad b^2(2x^2 - a^2)^2 = a^2(b^2x^2 + a^2y^2).$$

85. Le quatrième point de rencontre des deux hyperboles équilatères ABCD et A'BCD est l'orthocentre du triangle BCD.

86. Le lieu des sommets des paraboles ABCD se compose des deux quartiques

$$x = \frac{4ay(2y^2 + b^2)}{b^2\sqrt{16y^2 - b^2}}, \quad y = \frac{4bx(2x^2 + a^2)}{a^2\sqrt{16x^2 - a^2}}.$$

87. On considère le quadrilatère formé par les axes des deux paraboles ABCD et les axes des deux paraboles A'BCD. Le lieu des sommets de ce quadrilatère et des points de rencontre des côtés opposés se compose des six ellipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{16}, \quad \frac{x^2}{a^6} + \frac{y^2}{b^6} = \frac{1}{4(a^2 + b^2)^2},$$
$$16a^6y^2 + 4[(a^2 + b^2)bx \pm (a^2 + 3b^2)ay]^2 = a^6b^2,$$
$$16b^6x^2 + 4[(a^2 + b^2)ay \pm (b^2 + 3a^2)bx]^2 = b^6a^2.$$

88. Le lieu du 4e point de rencontre du cercle ABCD avec l'hyperbole équilatère A'BCD est l'ellipse

$$a^2x^2 + b^2y^2 = \frac{(a^2 + b^2)^2}{4}.$$

89. Les lieux suivants sont des ellipses :

Lieu du 4e point de rencontre du cercle ABCD avec l'une des paraboles A'BCD;

Lieu du 4e point de rencontre de l'hyperbole équilatère ABCD avec l'axe des paraboles A'BCD;

Lieu du 4e point de rencontre de l'hyperbole équilatère A'BCD avec l'une des paraboles ABCD;

Lieu du 4e point de rencontre d'une parabole ABCD avec une parabole A'BCD.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 252.

(Voir *Mathesis*, (1), III, 143, et (2) I p. 28).

I. *Si q, r, s, sont des entiers plus grands que 2 et p un entier quelconque, démontrer que les nombres de Bernoulli déterminés par la relation symbolique*

$$(B+1)^q - B^q = 0$$

vérifient la relation

$$B^p(B+1)^q(B+2)^r(B+3)^s = B^s(B-1)^r(B-2)^q(B-3)^p.$$

II. *Démontrer, sans se servir des séries, la relation symbolique*

$$(2B+1)^p + 2^pB_p - 2B_p = 0.$$

(Ed. Lucas).

Solution par M. Stuyvaert (Gand). Les notions de calcul symbolique, la définition et les propriétés fondamentales des nombres de Bernoulli ont été exposées plusieurs fois ici-même, notamment par M. Cesàro(*) et par le regretté Ed. Lucas(**) qui a étudié aussi ces questions dans les C. R. t. LXXXIII, et dans un mémoire présenté au Congrès de Rouen en 1883(***). C'est sur une formule établie dans ce dernier travail que nous fonderons la démonstration exposée dans ce qui suit ; d'abord nous rappellerons, en quelques mots, les préliminaires indispensables pour l'intelligence du texte. Notons en passant qu'il a déjà paru une solution (autre que celle qui va suivre) de la 2e partie de la question ; cette solution due à M. Hermite a été publiée en supplément à *Mathesis* en 1895.

Aujourd'hui l'on définit d'habitude les nombres de Bernoulli B_0, B_1, B_2 ... par la relation *symbolique*

$$(B+1)^q - B^q = 0,$$

laquelle signifie que l'on doit effectuer les opérations indiquées, puis remplacer les exposants de B par des indices ; la relation précédente

---

(*) *Mathesis*, 1883, p. 10 ; le même auteur a publié également, dans les N. A. M., des applications de cette théorie.

(**) *Mathesis*, 1883 et 1886.

(***) Les lecteurs de *Mathesis* trouveront un résumé de ce mémoire dans la *Notice historique* de M. Laisant publiée en supplément au présent journal, année 1888.

n'est vraie que pour $q > 0$; on *convient* en outre de la valeur initiale

$$B_0 = 1.$$

On démontre ensuite, sans grande difficulté, que, pour x entier et positif, on a symboliquement

$$(x + B + 1)^q - (x + B)^q = qx^{q-1}.$$

Par suite,

$$(n + B)^q - B^q = q[1^{q-1} + 2^{q-1} + 3^{q-1} + \cdots + (n-1)^{q-1}],$$

ou

$$\frac{1}{q}[n + B)^q - B^q] = \sum_{x=0}^{x=n-1} x^{q-1},$$

ou enfin

$$\int_B^{n+B} x^{q-1}dx = \sum_{x=0}^{x=n-1} x^{q-1}.$$

Si l'on a maintenant une fonction entière

$$\varphi(x) = Ax^m + A'x^{m'} + \cdots,$$

la formule précédente s'applique à chacun des termes, et l'on obtient par addition

$$\int_B^{n+B} \varphi(x)dx = \sum_{x=0}^{x=n-1} \varphi(x) \qquad (1)$$

C'est la formule de Lucas, à laquelle nous avons fait allusion.

I. Considérons la fonction

$$F(x) = (x-3)^p (x-2)^q (x-1)^r x^s.$$

Dérivons par rapport à x :

$$F'(x) = F(x)\left(\frac{p}{x-3} + \frac{q}{x-2} + \frac{r}{x-1} + \frac{s}{x}\right).$$

Appliquons la formule (1) à la fonction $F'(x)$; pour $n = 3$, nous aurons

$$\int_B^{3+B} F'(x)\,dx = \sum_{x=0}^{x=2} F(x)\left(\frac{p}{x-3} + \frac{q}{x-2} + \frac{r}{x-1} + \frac{s}{x}\right).$$

Or, si q, r, s, valent chacun au moins 2, la fonction sous le signe sommatoire Σ s'annule pour chacune des valeurs 0, 1, 2 de x ; donc le second membre est nul. Par conséquent,

$$\int_B^{3+B} F'(x)\,dx \quad \text{ou} \quad \Big[F(x)\Big]_B^{3+B} = 0.$$

Ainsi la première partie de l'énoncé est démontrée, et l'on voit que la proposition doit être légèrement rectifiée : p est un entier quelconque, et q, r, s doivent être supérieurs ou *égaux* à 2. On pourra d'ailleurs vérifier directement la formule pour $q = r = s = 2$ et $p = 0$; les calculs ne sont pas fort longs.

La démonstration donnée ci-dessus fait voir immédiatement comment on pourrait généraliser le théorème pour plus de quatre facteurs.

II. Soit à présent la fonction $(2x+1)^p$; la formule (1) donne

$$2(p+1)\int_{B'}^{n+B}(2x+1)^p dx = 2(p+1)\sum_{x=0}^{x=n-1}(2x+1)^p,$$

d'où

$$(2B+2n+1)^{p+1} - (2B+1)^{p+1} = 2(p+1)[1^p+3^p+5^p+\cdots+(2n-1)^p] \qquad (2)$$

D'autre part, on a :

$$(B+n)^{p+1} - B^{p+1} = (p+1)[1^p+2^p+\cdots+(n-1)^p].$$

Multipliant par 2^{p+1}, nous trouvons

$$(2B+2n)^{p+1} - (2B)^{p+1} = 2(p+1)[2^p+4^p+\cdots+(2n-2)^p] \quad (3).$$

Les égalités (2) et (3) donnent, par addition,

$$(2B+2n+1)^{p+1} + (2B+2n)^{p+1} - [(2B+1)^{p+1} + (2B)^{p+1}] = 2(p+1)[1^p+2^p+3^p+4^p+\cdots+(2n-1)^p].$$

Mais le second membre de cette dernière est encore égal à

$$2[(B+2n)^{p+1} - B^{p+1}].$$

Donc l'égalité précédente se ramène à

$$(2B+2n+1)^{p+1} + (2B+2n)^{p+1} - [(2B+1)^{p+1} + (2B)^{p+1}] = 2[(B+2n)^{p+1} - B^{p+1}]$$

ou

$$(2B+2n+1)^{p+1} + (2B+2n)^{p+1} - 2(B+2n)^{p+1} = (2B+1)^{p+1} + (2B)^{p+1} - B^{p+1}.$$

Cette relation est vérifiée pour toute valeur de n; le premier membre a donc la même valeur quel que soit n; si on le développe, les coefficients des diverses puissances de n sont nuls ; en particulier le coefficient de la première puissance de n étant égal à zéro, on trouve

$$(2B+1)^p + (2B)^p - 2B^p = 0.$$

C'est l'égalité à démontrer, et le raisonnement ci-dessus prouve que l'on a en outre, quel que soit n,

$$(2B + 2n + 1)^p + (2B + 2n)^p - 2(B + 2n)^p = 0.$$

Question 1035.

(Voir *Mathesis*, (2) V, p. 216).

On considère une cubique gauche équilatère. Il existe une infinité de plans rencontrant la cubique en trois points vus d'un point fixe M *de la courbe sous un angle trièdre trirectangle. Démontrer que tous ces plans sont parallèles au plan normal à la cubique au point* M.

Application. *Un plan quelconque parallèle au plan diamétral du diamètre passant par un point* P *de l'espace, dans une quadrique, rencontre la cubique des pieds des normales menées par le point* P *en trois points qui sont vus de* P *sous un angle trièdre trirectangle.*

(A. Cazamian).

Solution par M. E. Duporcq. Remarquons d'abord que le point de Frégier relatif à un point M d'un hyperboloïde équilatère est le point à l'infini de la normale au point M à cette quadrique, car les trièdres trirectangles de sommet M dont les arêtes sont parallèles à des génératrices de l'hyperboloïde montrent que ce point de Frégier est dans le plan de l'infini. — Considérons donc un des trièdres trirectangles dont est capable le cône de sommet M qui admet pour directrice la cubique considérée : ses arêtes coupent cette courbe en trois points, qui appartiennent à tous les hyperboloïdes équilatères passant par la cubique : leur plan passe donc par les points de Frégier relatifs au point M dans tous ces hyperboloïdes, c'est-à-dire par les points à l'infini des normales en M à ces quadriques : autrement dit, ce plan est perpendiculaire à la tangente à la cubique au point M.

Quant à l'application indiquée dans l'énoncé, elle résulte de ce que la tangente en P à la cubique considérée, est perpendiculaire au plan polaire de P par rapport à la quadrique : c'est une conséquence immédiate de la propriété bien connue de la cubique des pieds des normales d'être le lieu des points où les diamètres de la quadrique rencontrent les perpendiculaires abaissées de P sur leurs plans diamétraux conjugués, dans le cas où ces droites se coupent.

×Question 1053.

(Voir *Mathesis*, (2) VI, p. 32).

Étant donné un triangle équilatéral ABC, *on prend sur les côtés* AB, BC, CA *respectivement les segments* AM $= x$, BN $= 2x$, CP $= 3x$. *On demande pour quelles valeurs de* x *le triangle* MNP *est rectangle ou isoscèle. Peut-il se réduire à un segment de droite? Peut-il être semblable à un triangle quelconque?* (H. Brocard).

Solution par M. H. Mandart. En représentant par a la longueur du côté du triangle ABC, on a, quelle que soit la position des points M,N,P :

$$\overline{MP}^2 = x^2 + (a - 3x)^2 - x(a - 3x) = 13x^2 - 7ax + a^2,$$
$$\overline{HN}^2 = 4x^2 + (a - x)^2 - 2x(a - x) = 7x^2 - 4ax + a^2,$$
$$\overline{NP}^2 = 9x^2 + (a - 2x)^2 - (a - 2x)3x = 19x^2 - 7ax + a^2.$$

Le triangle sera rectangle pour les valeurs réelles de x satisfaisant aux équations

$$x^2 - 4ax + a^2 = 0, \quad x = a(2 \pm \sqrt{3})$$
$$25x^2 - 10ax + a^2 = 0, \quad x = \tfrac{1}{5}a$$
$$13x^2 - 4ax + a^2 = 0, \quad x \text{ est imaginaire.}$$

MNP est donc rectangle pour 3 valeurs de x; il est isoscèle pour les valeurs de x satisfaisant aux équations :

$$6x^2 - 3ax = 0, \quad 6x^2 = 0, \quad 12x^2 - 4ax = 0,$$

ou pour les valeurs de x égales à

$$0, \quad \tfrac{1}{4}a, \quad \tfrac{1}{2}a.$$

Le triangle MNP ne peut pas se réduire à un segment de droite. En effet, les trois points M,N,P seraient situés sur les prolongements des côtés, ou un seul des points (P évidemment) serait au-delà du sommet A. Dans le 1er cas, on voit que les trois points M,N,P ne peuvent être en ligne droite ; dans le second, la valeur de x serait comprise entre $\frac{1}{5}a$ et $\frac{1}{2}a$. Le segment $a - x$ serait plus petit que $2x$, et la droite MN irait couper le côté BC en un point P′ au-delà de C dans le sens AC.

Le calcul conduit à la même conclusion. On devrait avoir :

$$\frac{x}{a - x} \cdot \frac{2x}{a - 2x} \cdot \frac{3x}{a - 3x} = -1;$$

cette équation se réduit à

$$11x^2 - 6ax + a^2 = 0,$$

dont les racines sont imaginaires.

Le triangle MNP sera semblable à un triangle donné dont les côtés sont l, m, n, si on a :

$$\frac{13x^2 - 7ax + a^2}{l^2} = \frac{19x^2 - 7ax + a^2}{m^2} = \frac{7x^2 - 4ax + a^2}{n^2} = \lambda^2.$$

Généralement il n'existera aucune valeur de x pour laquelle le triangle MNP est semblable à un triangle donné, la valeur de x satisfaisant à la question devant être racine commune des deux équations précédentes.

Eliminant x^2 et ax entre ces équations on obtient la valeur de λ^2, qui combinée avec les équations

$$\frac{-6x^2}{l^2 - m^2} = \frac{6x^2 - 3ax}{l^2 - n^2} = \lambda^2$$

donne la relation qui doit exister entre l, m, n, pour que le problème soit possible.

Note. Ont résolu la même question : MM. Deguelder (Liége), Seligmann, Déprez, Francq (Charleroi), Soons (Tirlemont), Verhelst (Anvers), François (La Haye), Brien.

M. Soons trouve que les côtés l, m, n du triangle MNP doivent vérifier l'égalité

$$(n^2 - l^2)^2 - 6n^2(m^2 - l^2) + 3(m^2 - l^2)^2 = 0.$$

M. Brien trouve pour l'aire MNP l'expression

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(11x^2 - 6ax + a^2),$$

et en conclut que cette aire passe par un minimum $\frac{\sqrt{3}}{22}a^2$ pour $x = \frac{3}{11}a$.

MM. Verhelst, Deguelder et Brien cherchent les limites entre lesquelles varient les rapports de deux côtés du triangle MNP :

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{7} - 1) < \frac{n^2}{m^2} < \tfrac{1}{2}(\sqrt{7} + 1), \quad 1 < \frac{n^2}{l^2} < \sqrt{3}, \quad 1 < \frac{m^2}{l^2} < 3.$$

M. Déprez généralise la question en prenant les longeurs AM, BN, CP proportionnelles à trois longueurs données p, q, r. Voici quelques-uns des problèmes qu'il traite.

Le centre de gravité de MNP décrit une droite, et les côtés enveloppent des paraboles. La somme des carrés des côtés passe par un minimum; l'aire MNP passe par un minimum. On peut déterminer M, N, P par la condition que les perpendiculaire élevées en M, N, P respectivement sur AB, BC, CA concourent en un même point.

*Question 1059.

(Voir *Mathesis* (2), VI, p. 56).

Sur trois droites concourantes Ox, Oy, Oz *on prend les couples de points* A, A', B, B', C, C'. *Les plans* A'BC, B'CA, C'AB *se coupent en un point* S; *la droite* OS *rencontre les plans* ABC, A'B'C' *aux points* D, D'. *Démontrer que le rapport anharmonique* (OSDD') *a une valeur constante.*

(J. N.).

Solution par M. R. Buysens. Construisons une figure homologique à la figure donnée en prenant pour centre le point O, pour plan de fuite le plan ABC. Dans la nouvelle figure, le point S_1 est le sommet opposé à O du parallélipipède construit sur OA'_1, OB'_1, OC'_1 ; le point D_1 est à l'infini et l'on voit aisément que

$$(OSDD') = (OS_1D_1D'_1) = \frac{S_1D'_1}{OD'_1} = -2.$$

Solution par M Sollertinsky. Les plans A'BC, B'CA se coupent suivant la droite CC_1 joignant C à l'intersection C_1 de AB', BA'.

De même, B_1, A_1 étant les intersections des droites AC' et CA', BC' et CB', les plans A'BC, B'CA coupent C' BA suivant BB_1, AA_1.

La droite B_1C_1, comme intersection des plans AB'C', A'BC, passe au point de rencontre des droites BC, B'C'. Les côtés correspondants des triangles ABC, A'B'C', $A_1B_1C_1$ concourent donc sur la droite commune *s* de leurs plans. Les triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont par suite homologiques, et les droites AA_1, BB_1, CC_1 concourent en un même point S.

Désignons par D_1 la rencontre du plan $A_1B_1C_1$ avec la droite OS. Les plans *s*O, *s*D, *s*D_1, *s*D' forment un faisceau harmonique, parce qu'ils divisent harmoniquement la transversale OB_1 par exemple. On a donc.

$$(DD'OD_1) = -1 \qquad (1)$$

Mais le point S et le triangle A'B'C' jouent, par rapport aux couples de points AA_1, BB_1, CC_1, le même rôle que le point O et le triangle $A_1B_1C_1$ par rapport à AA', BB', CC'. On a donc, *mutatis mutandis*, $(DD_1SD') = -1$, d'où, d'après la règle connue,

$$(DD'SD_1) = \tfrac{1}{2}. \qquad (2)$$

En divisant (1) par (2), on a $(DD'OS) = -2$, ou enfin

$$(OSDD') = -2.$$

Autre solution par M. Laurens.

Question 1004.

(Voir *Mathesis*, (2) V, p. 264).

Réduire en fraction continue périodique l'expression $\sqrt{a^2-2}$, ***a étant un nombre entier plus grand que*** 2. ***Peut-on développer de même*** $\sqrt{a^2+a+1}$, ***le nombre des termes de chaque période étant indépendant de a?***

(J., *Liége*).

Solution par A. Droz Farny.

$$\sqrt{a^2-2}=a-1+\sqrt{a^2-2}-(a-1)=a-1+\frac{1}{\frac{\sqrt{a^2-2}+(a-1)}{2a-3}}.$$

$$\frac{\sqrt{a^2-2}+a-1}{2a-3}=1+\frac{\sqrt{a^2-2}-(a-2)}{2a-3}=1+\frac{1}{\frac{\sqrt{a^2-2}+(a-2)}{2}}.$$

$$\frac{\sqrt{a^2-2}+(a-2)}{2}=a-2+\frac{\sqrt{a^2-2}-(a-2)}{2}=a-2+\frac{1}{\frac{\sqrt{a^2-2}+(a-2)}{2a-3}}.$$

$$\frac{\sqrt{a^2-2}+(a-2)}{2a-3}=1+\frac{\sqrt{a^2-2}-(a-1)}{2a-3}=1+\frac{1}{\sqrt{a^2-2}+(a-1)}.$$

$$\sqrt{a^2-2}+(a-1)=2(a-1)+\sqrt{a^2-2}-(a-1)=2(a-1)+\frac{1}{\frac{\sqrt{a^2-2}+(a-1)}{2a-3}}.$$

Le premier quotient incomplet est donc $(a-1)$ et la période se compose des quatre quotients $1, a-2, 1, 2(a-1)$.

$\sqrt{a^2+a+1}$ ne se laisse pas développer de même. En donnant, en effet, à a les valeurs successives de 1 à 10 on trouve pour le développement correspondant, d'après le *Canon Pellianus* de Degen (Copenhague, 1807)(*), des fractions continues dont la période contient respectivement : 2, 4, 5, 6, 8, 10, 6, 7, 8 quotients incomplets.

(*) Voir aussi *Mathesis*, 1897, p. 8.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1111. (*Énoncé rectifié*). Dans un triangle isoscèle ABC, le côté AB est fixe et la base BC tourne autour de B. Démontrer que deux côtés du triangle orthique de ABC enveloppent une même hypocycloïde de Steiner et que le troisième côté enveloppe un cardioïde. (DROZ FARNY).

1115. On considère les paraboles dont l'axe passe par un point donné P et qui touchent une droite donnée AB au même point A. Le foyer décrit une hyperbole équilatère; la tangente au sommet enveloppe une parabole. (J. NEUBERG).

***1116.** Étant donné un triangle ABC; la bissectrice intérieure de l'angle ABC rencontre le côté AB en C', la bissectrice extérieure du même angle rencontre le côté AB et C'_1. On prend sur AB : 1° le point C'' vers l'intérieur du triangle, tel que $C''B = AC'$; 2° le point C''_1 vers l'extérieur du triangle, tel que $C''_1B = C'_1A$. Démontrer les relations

$$\overline{CC''}^2 - \overline{CC'}^2 = (BC - AC)^2,$$

$$\overline{CC''_1}^2 - \overline{CC'_1}^2 = (BC + AC)^2.$$ (E. N. BARISIEN).

1117. On donne un demi-cercle AB. C étant un point quelconque du diamètre AB, on décrit deux autres cercles I et I' sur AC et BC comme diamètres, puis un cercle I'' tangent aux trois précédents. Appelons I, I', I'' les centres des derniers cercles. Lorsque C se meut sur la droite AB :

1° Le centre I''' du cercle inscrit au triangle II'I'' décrit une parabole.

2° Les côtés II'', I'I'' enveloppent une parabole.

3° Les droites II''', I'I''' enveloppent une autre parabole.

4° Le cercle I''' enveloppe un cercle.

5° Le cercle des neuf points du triangle II'I'' enveloppe un cercle. (DÉPREZ).

1118. Trouver le lieu du troisième sommet d'un triangle rectangle isoscèle variable, qui reste homothétique à lui-même, sachant qu'une extrémité de l'hypoténuse se meut sur une circonférence donnée, et que le sommet de l'angle droit se meut sur le diamètre parallèle à l'hypoténuse. (SOONS).

QUESTIONS D'EXAMEN.

790. Le sinus de l'angle α que fait la normale en un point M d'une ellipse avec le rayon vecteur focal MF est égal au rapport du petit axe au diamètre conjugué du diamètre passant par M. (E. N. Barisien).

φ étant l'anomalie excentrique en M, on a

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{c\sin\varphi}, \quad \text{d'où} \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2\sin^2\varphi}} = \frac{b}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}},$$

ce qui démontre le théorème.

791. $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ est divisible par 1897.

(*Journal de* Vuibert).

$1897 = 7 \times 271$; l'expression proposée peut s'écrire

$$(2903^n - 803^n) - (464^n - 261^n) \quad \text{et} \quad (2903^n - 464^n) - (803^n - 261^n).$$

Les différences 2903 — 803, 464 — 261 sont divisibles par 7, et les différences 2903 — 464, 803 — 261 sont divisibles par 271.

792. On considère une parabole P et la corde focale perpendiculaire à l'axe. Soient M un point quelconque de cette corde et AB la corde polaire de M par rapport à P. Le centre du cercle circonscrit au triangle MAB est situé sur l'axe de la parabole. (E. N. Barisien).

Soient $y^2 = 2px$ l'équation de la parabole et (α, β) les coordonnées de M. On trouve pour les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle MAB :

$$x = \frac{2\beta^2 + p^2}{2p} \qquad y = \frac{(\beta p - 2\alpha)}{2p}, \text{ etc.}$$

793. Trouver l'axe du cylindre de révolution tangent aux plans de projection et à un plan donné qui est parallèle à la ligne de terre.

794. On donne deux cercles O, O' et un point P. Mener deux rayons parallèles dans ces cercles de façon que leurs extrémités soient équidistantes du point donné P. (*J. de* Vuibert).

1° Soient OA, O'A' les rayons cherchés, S le centre de similitude, M le milieu de AA', I le milieu de la distance des centres. M est à l'intersection du cercle de centre I et de rayon $\frac{R + R'}{2}$, avec le cercle décrit sur PS comme diamètre.

2° Menons A'P' parallèle à AP et rencontrant SP en P'. On peut déterminer le point P' au moyen de la proportion $\frac{SP}{SP'} = \frac{R}{R'}$; le point A' appartient au lieu des points satisfaisant à la relation $\frac{A'P \text{ ou } AP}{A'P'} = \frac{R}{R'}$.

795. Une droite AB de longueur et de direction invariables s'appuie par ses deux extrémités sur deux sphères fixes O, O'. Déterminer la courbe décrite par chaque extrémité sur la sphère correspondante.

(*J. de* VUIBERT).

La courbe décrite par B est l'intersection de la sphère O' avec la sphère O à laquelle on imprime une translation ayant pour mesure AB.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

9. *Essai sur la représentation analytique de la direction*, par CASPAR WESSEL. Traduction du Mémoire intitulé : *Om Directionens analytiske Betegning*, publié avec les trois planches de l'original et préfaces de MM. H. VALENTINER et T. N. THIELE, par l'Académie royale des Sciences et des Lettres de Danemark à l'occasion du centenaire de sa présentation à l'Académie le 10 mars 1797. Copenhague, Höst et Sön, 1897 (XIV-60, p. in-4°, avec 3 planches).

C. WESSEL, né à Jonsrud en Norvège le 8 juin 1745, mort en 1818, arpenteur (ou plutôt *géodète*) de l'Académie royale de Copenhague, a écrit en danois ce mémoire remarquable qui vient d'être traduit en français sous la direction de ZEUTHEN. On y trouve, non seulement une théorie du calcul des segments déterminés en grandeur et en direction, dans un plan, mais de plus, des spéculations sur la représentation analytique des directions dans l'espace, qui, poussées logiquement à bout, eussent conduit Weissel à la découverte des quaternions La vraie interprétation géométrique des imaginaires se trouve dans ce mémoire, qui a été publié en 1798, un an avant le premier écrit de Gauss, huit ans avant le célèbre opuscule d'Argand sur la théorie des imaginaires. (P. M.)

10. *Recherches sur la théorie des parallèles*, par M. FROLOV. 1er Supplément Deuxième édition entièrement refondue (9 p. in-8°; 2e Deuxième et dernier supplément (10 p. in-8°). Paris, J. Michelet, librairie centrale des sciences, 25, Quai des Grands Augustins, 1897. Prix : Fr. 0,50 + 0,50.

Additions aux essais de démonstration du postulatum d'Euclide et de réfutation de la géométrie non euclidienne, signalés, p. 32, n° 1. (Le supplément indiqué à cette page une publication préliminaire qui n'est pas dans le commerce).

11. *Arithmétique* à l'usage des candidats aux baccalauréats de l'enseignement secondaire, par L. GÉRARD. Paris, Société d'éditions scientifiques (88 p. in-16). Prix : 1 fr. 50.

Excellent résumé, écrit avec clarté, simplicité et précision.

12. *De Pluckersche Grootheden de Deviatiekromme*, door W. BOUWMAN. Groningen, 1896, Gebroeders Hoitsema (68 p. 8°).

Thèse intéressante présentée à l'Université de Groningue pour l'obtention du grade de docteur en sciences mathématiques. Ce travail, qui fait honneur à l'auteur et à son savant professeur, M. Schoute, a paru aussi en traduction allemande dans les *Mathematische Annalen*.

SUR LA FORMULE DES TROIS NIVEAUX(*);

par M. GOULARD, professeur au lycée de Marseille.

I. En 1848, Finck, qui fut professeur à Strasbourg, a publié dans les N. A. M. un mémoire qui se termine ainsi : « Tout cela est renfermé dans un théorème de Sarrus dont voici l'énoncé : Si dans un corps, toute section parallèle à un plan donné a son aire exprimée par $A + Bz + Cz^2$ où z est la distance de la section du plan; A, B, C sont des constantes; un segment quelconque, renfermé entre deux plans parallèles au même plan, se mesure par $\frac{1}{6}(b + 4b' + b'')$. Un peu d'intégral suffit pour la démonstration (b, b'' sont les sections extrêmes, b' est la section équidistante des premières). »

Dans *Le Petit Temps*, supplément du journal *Le Temps* du 15 novembre 1895, M. Th. Schneider, ancien professeur de physique au collège et à l'École des sciences appliquées de Mulhouse, donne la règle suivante pour le jaugeage des tonneaux : Élevez les deux diamètres au carré; ajoutez au carré du grand la moitié du carré du petit; multipliez la somme obtenue par la longueur du tonneau et enfin le nouveau produit par 0,5236. M. Schneider ajoute : « La formule empirique ci-dessus constitue une application directe d'un théorème général qui donne le volume de la plupart des corps considérés en géométrie élémentaire. Voici ce théorème, qui est dû au célèbre mathématicien Sarrus : Tout volume compris entre deux bases parallèles et dont les sections parallèles à ces bases sont des fonctions rationnelles et au plus du troisième degré de leur distance à l'une de ces bases, a pour mesure le sixième de la hauteur multiplié par la somme des deux bases et du quadruple de la section équidistante des bases... Le savant Sarrus qui enseignait, il y a quarante ans, le calcul différentiel et intégral à la Faculté des Sciences de Strasbourg, se trouvait un jour dans la brasserie où il allait parfois se désaltérer. Là, il fut sollicité par un tonnelier de vouloir bien lui indiquer une formule de jaugeage des tonneaux à la fois simple et exacte. Sarrus y consentit avec sa bienveillance accoutumée; mais, craignant peut-être que le procédé qu'il indiquait à son interlocuteur ne parût à

(*) La note de M. Goulard est une réponse à la question 684 de l'*Intermédiaire des mathématiciens*, de MM. Laisant et Lemoine. Voir sur le même sujet *Mathésis*, (1), V, 7 et 75, (2), II, p. 14.

celui-ci un peu trop compliqué, il promit pour le lendemain la formule la plus simple qu'il fût possible d'établir. Il tint parole, en effet, et, après avoir découvert le théorème général ci-dessus indiqué, il s'empressa de le traduire au tonnelier par la règle énoncée plus haut. »

Ces témoignages, et en particulier le dernier, qui est des plus explicites, mettent hors de doute la découverte de Sarrus. Il n'en est pas moins certain, comme on l'a déjà vu (*Intermédiaire des Mathématiciens*, III, p. 136-137) et comme on le verra plus loin, que la formule dont il s'agit était connue longtemps avant lui.

II. Voici l'historique de cette formule d'après Baltzer (*Stereometrie*, p. 245). Newton a montré (*Methodus differentialis*, prop. 6), comment on peut calculer approximativement un segment solide au moyen de plusieurs sections parallèles, et en particulier qu'on trouve approximativement ce segment en ajoutant les bases et le quadruple de la section moyenne et en multipliant la somme par le sixième de la distance des bases. Maclaurin (1742, Fluxions, n° 848) a ajouté aux formules de Newton des termes complémentaires, qui font reconnaître immédiatement que la règle particulière que l'on vient d'énoncer donne exactement le segment cherché, lorsque l'aire de la section située à une distance x de l'une des bases du segment est une fonction entière de la longueur x ne dépassant pas le troisième degré. Torricelli, Th. Simpson, et principalement Steiner, ont indiqué des segments qu'on obtient par cette règle.

Et dans une note au bas de la page, Baltzer ajoute : La règle particulière avait été donnée par Torricelli, comme le rapporte Perelli dans l'appendice aux *Instituzioni delle sezioni coniche de Guido Grandi*, Florence, 1744. Baltzer termine en disant qu'il n'est pas juste de désigner la règle de Newton du nom de Th. Simpson.

III. Dans le *Bulletin de mathématiques spéciales* (décembre 1896), M. Niewenglowski se propose de chercher quels sont les solides dont le volume peut être exprimé par la formule dite des trois niveaux. La méthode de l'auteur étant fort ingénieuse, je demande la permission de la reproduire ici, en la simplifiant un peu.

M. Niewenglowski a eu l'heureuse idée de compter les distances à partir du plan équidistant des bases. Soit alors $f(x)$ l'aire de la section faite dans le solide par un plan parallèle aux bases et situé à une distance x du plan origine. Supposons que $f(x)$ soit une fonction continue;

le volume du solide, en désignant par $2h$ sa hauteur, est $\int_{-h}^{h} f(x)dx$, ou $F(h) - F(-h)$, en posant $\int_{0}^{h} f(x)dx = F(h)$. Pour que la formule des trois niveaux soit applicable, on doit donc avoir

$$F(h) - F(-h) = \frac{h}{3}[f(h) + f(-h) + 4f(0)].$$

Remplaçons maintenant h par la variable x, et remarquons alors que $f(x) = F'(x)$; nous voyons que la fonction $F(x)$ doit vérifier l'équation

$$F(x) - F(-x) = \frac{x}{3}[F'(x) + F'(-x) + 4A],$$

en désignant par A la constante $f(0)$.

Posons $F(x) - F(-x) = y$; l'équation précédente devient

$$y = \frac{x}{3}(y' + 4A), \quad \text{d'où} \quad y \text{ ou } F(x) - F(-x) = 2Ax + \frac{2}{3}Bx^3,$$

B désignant une constante. En différentiant, il vient

$$f(x) + f(-x) = 2A + 2Bx^2,$$

ce qui nous conduit à poser

$$f(x) = A + Bx^2 + I(x), \quad \text{d'où} \quad f(-x) = A + Bx^2 + I(-x).$$

Substituant dans l'équation précédente, elle se réduit à

$$I(x) + I(-x) = 0 :$$

c'est l'équation caractéristique des fonctions impaires.

Donc enfin, pour que la formule des trois niveaux soit applicable, il faut et il suffit que l'aire désignée plus haut par $f(x)$ soit égale à $A + Bx^2 + I(x)$, A et B étant des constantes, et $I(x)$ étant une fonction impaire absolument quelconque (mais continue).

C'est donc à M. Niewenglowski que revient l'honneur d'avoir découvert toute l'étendue de la formule dite des trois niveaux. Aussi je propose qu'on la rajeunisse en l'appelant la formule de Niewenglowski.

IV. Chose curieuse, Sarrus a découvert son théorème général pour servir au jaugeage des tonneaux, tandis que, d'après M. C. Rey (J.M.E., 1886, p. 126), c'est à tort que l'on cite les tonneaux parmi les corps auxquels peut s'appliquer ce qu'il appelle pourtant l'omniformule. La méthode de M. Niewenglowski permet de trancher la difficulté. En effet, si le solide est symétrique par rapport au plan de la section moyenne, $f(x)$ se réduit à $A + Bx^2$; donc, si le solide est de révolution, on doit

avoir, en désignant par z l'ordonnée de la méridienne correspondant à l'abscisse x,

$$\pi z^2 = A + Bx^2,$$

c'est-à-dire que la méridienne doit être une conique dont le centre coïncide avec le centre du solide.

×NOTES MATHÉMATIQUES.

×**15.** ***Sur les fractions continues.*** Soit une fraction continue

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}$$

et appelons

$$\frac{B_1}{C_1}, \quad \frac{B_2}{C_2}, \quad \frac{B_3}{C_3}, \ldots$$

les réduites successives. On sait que

$$\frac{B_i}{C_i} = \frac{B_{i-1}a_i + B_{i-2}}{C_{i-1}a_i + C_{i-2}}.$$

Or, d'après le théorème connu, en ajoutant deux fractions terme à terme, on obtient une troisième fraction comprise entre les deux premières. Donc $\frac{B_i}{C_i}$ est compris entre $\frac{B_{i-1}}{C_{i-1}}$ et $\frac{B_{i-2}}{C_{i-2}}$; par conséquent, la 3e réduite est comprise entre les deux premières, la 4e entre la 2e et la 3e, etc. On déduit de là que les réduites de rang impair vont en augmentant, mais sont moindres que les réduites de rang pair qui, elles, vont en diminuant.

La différence entre deux réduites consécutives est une fraction ayant pour numérateur l'unité, pour dénominateur le produit des dénominateurs de ces réduites. Donc si la fraction continue est illimitée, comme les dénominateurs des réduites peuvent croître tant qu'on veut, la différence de deux réduites consécutives peut devenir aussi petite que l'on veut. On en conclut aisément que les réduites, tant de rang impair que de rang pair, convergent vers une limite commune. Cette limite est appelée la *valeur* de la fraction continue. (D'après une note de Mme Prime dans le J. M. S., 1895, p. 121).

16. *Sur la question* 999. (Voir *Mathesis*, (2) VII, p. 68). Si l'on élimine, comme il a été dit, x', y' et λ entre les équations

$$x' = \frac{x + \lambda\alpha}{1 + \lambda}, \quad y' = \frac{y + \lambda\beta}{1 + \lambda},$$

$$b^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2b^2, \quad c^2x'y' + b^2\beta x' - a^2\alpha y' = 0,$$

on trouve (dans le numérateur de la valeur de λ, p. 68, l'exposant de la parenthèse doit être remplacé par un coefficient 2) :

$$2\alpha\beta(x^2 - y^2) + \left[c^2 - (a^2 + b^2)\left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}\right)\right]xy + \cdots = 0.$$

Cette équation est celle d'une hyperbole équilatère passant par les points A', B', C', D'.

L'équation générale des coniques passant par ces points est

$$\mu[b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2] + 2\alpha\beta(x^2 - y^2)$$
$$+ \left[c^2 - (a^2 + b^2)\left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}\right)\right]xy + \cdots = 0.$$

Pour qu'elle représente une circonférence, le coefficient de xy doit être nul, ce qui donne l'équation (1) de la page 68; et les coefficients de x^2 et de y^2 doivent être égaux, ce qui détermine la valeur de μ.

On voit que l'hyperbole équilatère A'B'C'D' a ses axes parallèles à ceux de l'ellipse proposée lorsque les points A', B', C', D' sont sur une même circonférence.

Ce complément de solution répond à une objection qu'un honorable correspondant nous a adressée au sujet de la solution publiée par *Mathesis*.

La question 999 suggère d'autres problèmes : trouver les enveloppes des circonférences et des hyperboles équilatères A'B'C'D', les lieux de leurs centres, etc.

17. *Sur une formule de Newton*, par M. le professeur Lampe (Berlin). La formule étudiée par M. Mansion (*Messenger of Mathematics*, vol. XXV, p. 48; *Mathesis*, 1896, p. 84) a été le sujet d'un exercice que j'ai proposé à mes élèves. Je les ai engagés à développer en série la fraction

$$y = \sin x \frac{14 + \cos x}{9 + 6\cos x}.$$

On trouve :

$$y = x - \frac{1}{2100}x^7 - \frac{1}{18000}x^9 - \frac{19}{3960000}x^{11} \ldots$$

Posons $x = \frac{1}{4}\pi$, les termes de cette série ont les valeurs suivantes :

$$x = 45^\circ,\ \frac{x^7}{2100} = 18'',107,\ \frac{x^9}{18000} = 1'',303,\ \frac{19x^{11}}{3960000} = 0'',069.$$

La différence $x - y$ ne monte donc qu'à 19″,479 et non à 20″$\frac{1}{4}$.

Le calcul direct de l'expression y pour $x = \frac{1}{4}\pi$ donne

$$\frac{14\sqrt{2}+1}{2(9+3\sqrt{2})} = \frac{1}{42}(41\sqrt{2} - 25) = 0{,}78530371.$$

Cette valeur équivaut à 45° — 19″,5 comme celle que nous avons calculée par la série.

Note. Il faut donc corriger en conséquence les articles cités plus haut et dire que la formule de Newton comporte une erreur inférieure à *un tiers de minute* (P. M.).

88. *Sur la recherche de certains lieux géométriques.* Lorsque par la nature de la question, on sait que les coordonnées des points d'un lieu sont des fonctions symétriques des coordonnées de deux points assujettis à certaines conditions, il est souvent avantageux de rechercher d'abord les coordonnées des points du lieu en fonction des coordonnées des deux points, puis de calculer les valeurs des fonctions symétriques en fonction d'un paramètre variable qu'il faudra ensuite éliminer entre les expressions des coordonnées des points du lieu cherché.

1° Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de *déterminer le lieu des points de rencontre des normales menées à une ellipse par les extrémités des cordes passant par un des foyers.*

En représentant par x', y' et x'', y'' les coordonnées des extrémités de la corde, on obtiendra l'équation du lieu en éliminant ces quantités entre les équations suivantes :

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x'), \tag{1}$$

$$y - y'' = \frac{a^2 y''}{b^2 x''}(x - x''), \tag{2}$$

$$y'x'' - x'y'' = c(y' - y''), \tag{3}$$

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2, \tag{4}$$

$$a^2 y''^2 + b^2 x''^2 = a^2 b^2. \tag{5}$$

Si nous résolvons les deux premières équations par rapport à x et y, nous trouvons en vertu de la troisième

$$x = \frac{cx'x''}{a^2},$$

$$y^2 = \frac{c^2y'y''(x'-c)(x''-c)}{b^4}.$$

Pour obtenir les valeurs des fonctions de $x', x'', y'\ y''$ qui entrent dans ces deux égalités, représentons par

$$y = m(x-c)$$

l'une des cordes ; la combinaison de cette équation avec celle de la courbe nous donnera

$$x'x'' = \frac{a^2(m^2c^2-b^4)}{a^2m^2+b^2},$$

$$(x'-c)(x''-c) = \frac{-b^4}{a^2m^2+b^2},$$

$$y'y'' = \frac{-b^4m^2}{a^2m^2+b^2}.$$

Par suite,

$$x = \frac{c(m^2c^2-b^2)}{a^2m^2+b^2},$$

$$y^2 = \frac{b^4c^2m^2}{(b^2m^2+b^2)^2},$$

et, en éliminant m^2, on aura, pour l'équation du lieu,

$$b^2y^2+(a^2x-c^2)(x+c) = 0.$$

2° S'il s'agissait du lieu des orthocentres des triangles formés par la corde et les deux normales, on devrait remplacer les deux premières équations par celles-ci :

$$y-y' = -\frac{b^2x''}{a^2y''}(x-x'),$$

$$y-y'' = -\frac{b^2x'}{a^2y'}(x-x'').$$

L'abscisse du point d'intersection est

$$x = \frac{a^2y'y''+b^2x'x''}{b^2c}$$

et l'ordonnée,

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m} x$$

L'équation du lieu des orthocentres sera

$$cx(b^2x^2 + a^2y^2) = b^2x^2(c^2 - b^2) - a^2y^2.$$

3° Supposons qu'il s'agisse de l'orthocentre du triangle formé par la corde et les deux tangentes menées à ses extrémités. Les deux premières équations seront :

$$y - y' = \frac{a^2y''}{b^2x''}(x - x'),$$

$$y - y'' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x''),$$

et l'on trouve

$$a^2x = a^2(x' + x'') - cx'x'',$$
$$b^2my = b^2m(y' + y'') - cy'y''$$

ou

$$x(a^2m^2 + b^2) = cm^2(a^2 + b^2) + b^2c,$$
$$y(a^2m^2 + b^2) + b^2cm = 0.$$

En éliminant m entre ces deux équations, on obtient pour l'équation du lieu

$$b^2y^2 + c(x - c)(cx - a^2 - b^2) = 0. \qquad \text{(A. C.)}$$

SUR UNE MÉTHODE ÉLÉMENTAIRE D'EXPOSITION DES PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE.

1. *Objet de la présente note.* « Depuis un siècle, les mathématiciens ont soumis les principes fondamentaux de la science de l'espace à un examen critique qui leur a permis de créer à côté de la géométrie ordinaire, ou géométrie euclidienne, deux autres systèmes de géométrie, tout aussi admissibles, tant au point de vue de la rigueur logique qu'à celui de leur application possible à l'étude du monde physique.

Le premier de ces systèmes est la géométrie lobatchefskienne, ainsi nommée parce que c'est Lobatchefsky (1793-1856) qui en a trouvé les bases vers 1826 et en a donné un exposé complet dans de nombreux écrits publiés de 1829 à 1856.

Le second est la géométrie riemannienne, dont l'idée fondamentale,

presque sans aucun développement, a été indiquée par Riemann (1826-1866) en 1854 et publiée seulement en 1867(*). »

Dans la présente note, nous nous proposons de montrer comment, dès 1826, Taurinus (1794-1874) et Lobatchefsky ont pu arriver (ou, au moins, auraient pu arriver), *par une induction légitime*, aux principes fondamentaux des deux géométries non euclidiennes, en partant de formules établies en géométrie euclidienne.

2. *Le postulat des deux droites et le postulat des trois droites comme caractéristiques des trois géométries.* On peut caractériser les trois géométries, euclidienne, lobatchefskienne et riemannienne, par la manière dont elles particularisent, au moyen de certains postulats, la notion générale de la droite.

Dans les trois géométries, *la droite est une ligne indéfinie, homogène, entièrement déterminée par deux quelconques de ses points suffisamment rapprochés.* En pratique, un fil tendu très fin réalise, autant que possible, ce concept *général* de la droite, lequel suffit d'ailleurs pour établir avec rigueur une partie assez notable des Éléments de Géométrie.

Mais quand on veut aller plus loin, on est forcé de particulariser la définition générale de la droite, au moyen de l'un, ou de l'autre, ou enfin de l'un et de l'autre des deux postulats suivants :

Postulat des deux droites (6e postulat d'Euclide). *Deux droites ne peuvent enclore un espace.*

Postulat des trois droites (5e postulat d'Euclide). *Deux droites d'un plan qui font d'un même côté, avec une troisième, des angles dont la somme est inférieure à deux angles droits se rencontrent de ce côté.*

En géométrie euclidienne, on admet ces deux postulats ; en géométrie lobatchefskienne, on n'admet que le premier; en géométrie riemannienne, on n'admet que le second.

On appelle *droite euclidienne* celle qui jouit des deux propriétés exprimées par ces postulats; *droite lobatchefskienne*, celle qui ne jouit que de la première, *droite riemannienne* celle qui ne jouit que de la seconde(**).

(*) Nous empruntons ces quelques mots d'introduction à nos *Principes de Métagéométrie* (*Mathesis*, octobre 1896, supplément).

(**) Nous n'abordons pas ici, *explicitement* au moins, la question de la compatibilité logique des postulats avec les définitions, soit en géométrie euclidienne, soit en géométrie non euclidienne. De fait, cette compatibilité logique, pour la géométrie euclidienne, n'a été, ni contestée, ni démontrée pendant deux mille ans. Mais elle

En géométrie euclidienne, on n'étudie que des droites euclidiennes et des figures dont la définition dépend, en dernière analyse, de celle de ces droites; de même, la géométrie lobatchefskienne et la géométrie riemannienne étudient respectivement les droites de même nom ou des figures qui en dépendent.

Les trois géométries ont cependant des propositions communes; ce sont, comme nous l'avons dit plus haut, celles qui conviennent au *genre* DROITE tout entier (par exemple, ce théorème : un triangle est déterminé par ses trois côtés), ou aux deux sortes de droites non euclidiennes (ex. : un triangle non euclidien est déterminé par ses trois angles), ou encore aux deux sortes de droites non lobatchefskiennes (ex.: le postulat des trois droites), ou enfin aux deux sortes de droites non riemanniennes (ex. : le postulat des deux droites).

8. *La trigonométrie sphérique.* Dès l'antiquité, on a étudié, pour les besoins de l'astronomie, les propriétés des grands cercles de la sphère et des triangles sphériques et l'on en a déduit, sous forme géométrique, la trigonométrie sphérique. Dans les temps modernes, on a résumé cette science en un petit nombre de formules analytiques, dont les principales sont les suivantes avec celles que l'on en déduit par permutation circulaire (a, b, c sont les côtés d'un triangle ABC, A, B, C les angles opposés; $2p = a + b + c$) :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A ; \tag{1}$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} ; \tag{2}$$

$$\cot a \sin b = \cos b \cos c + \sin c \cot A ; \tag{3}$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a ; \tag{4}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(A + B + C) = -\frac{\sqrt{\sin p \sin (p-a) \sin (p-b) \sin (p-c)}}{2 \cos \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} b \cos \tfrac{1}{2} c} . \tag{5}$$

Si l'angle A est droit, les formules se simplifient et l'on a, en particulier,

$$\cos B = \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} a}, \quad \cos C = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a} ; \tag{6}$$

$$\cos a = \cos b \cos c. \tag{7}$$

---

est établie *à posteriori*, pour ainsi dire, pour les trois géométries, depuis que M. De Tilly a prouvé que chacune d'elles est contenue toute entière dans une seule relation analytique entre les dix distances mutuelles de cinq points.

Au lieu de déduire les formules (6) et (7) de celles qui se rapportent aux triangles quelconques, on peut aussi démontrer directement les formules (6) et (7); alors on en déduit la formule (1) de la manière suivante.

Considérons un triangle quelconque ABC, où l'on a mené les deux hauteurs BD, CE(*). Posons, comme d'ordinaire, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. On a successivement, dans les triangles rectangles BCD, ABD,

$$\cos BC = \cos BD \cos CD = \frac{\cos AB}{\cos AD} \cos (AC - AD),$$

$$\cos BC = \cos AB \cos AC + \sin AB \sin AC \frac{\operatorname{tang} AD}{\operatorname{tang} AB},$$

c'est-à-dire, puisque $\operatorname{tang} AD = \operatorname{tang} AB \cos A$,

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \qquad (1)$$

On arrive au même résultat, en partant des triangles rectangles BCE, ACE. On a, en effet,

$$\cos BC = \cos CE \cos BE = \frac{\cos AC}{\cos AE} \cos (AE - AB),$$

$$\cos BC = \cos AC \cos AB + \sin AC \sin AB \frac{\operatorname{tang} AE}{\operatorname{tang} AC},$$

ou, puisque $\operatorname{tang} AE = \operatorname{tang} AC \cos A$,

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \qquad (1)$$

Il n'est pas inutile d'observer que si l'on ne connaissait pas la formule (7), la démonstration précédente prouverait que l'on a

$$\frac{\operatorname{tang} AD}{\operatorname{tang} AB} = \frac{\operatorname{tang} AE}{\operatorname{tang} AC}$$

c'est-à-dire que *le rapport de la tangente d'un segment d'arc de grand cercle à la tangente de sa projection sur un autre arc de grand cercle ayant une extrémité commune avec le premier, ne dépend que de l'angle du segment et de sa projection.*

De la formule (1) et de celles que l'on en déduit par permutation tournante, on tire, comme on le sait, les relations (2), (3), (4), (5).

4. *Autre manière d'exposer la trigonométrie sphérique.* Abandonnons la définition habituelle du grand cercle de la sphère et remplaçons-la par la suivante : *Un grand cercle d'une sphère est une ligne* (tracée sur cette

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

surface) *indéfinie, homogène, entièrement déterminée par deux quelconques de ses points suffisamment rapprochés et telle qu'il existe pour un triangle* ABC, *rectangle en* A *et formé par des arcs de grand cercle, les relations*

$$\cos B = \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} a}, \quad \cos C = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a} \tag{6}$$

$$\cos a = \cos b \cos c, \tag{7}$$

entre les angles et les côtés de ce triangle.

Au moyen de cette définition, on établit les formules (1), (2), (3), (4), (5), par une voie surtout analytique; on déduit ensuite de ces dernières formules les propriétés des grands cercles et des triangles sphériques. Pour ceux-ci, on peut supposer les côtés et les angles inférieurs à π, comme on le déduit de ces formules mêmes (*).

Ainsi, par exemple, au moyen de la formule (1) et de celles qui s'en déduisent par permutation tournante, on démontre qu'un triangle sphérique est déterminé par ses trois côtés, a, b, c, pourvu que chacun d'eux soit inférieur à la somme des deux autres; au moyen de la formule (5), on prouve ensuite que la somme des trois angles est comprise entre π et 3π. On prouve de même qu'un triangle sphérique est déterminé par deux côtés et l'angle compris; par un côté et deux angles adjacents; enfin, par trois angles (moyennant certaines conditions).

De ce qu'un triangle est déterminé par un côté et deux angles adjacents, il résulte que deux arcs de grands cercles réunis par un troisième de longueur a et faisant avec lui des angles B et C, se coupent en un point A, en faisant un angle donné par la formule (**)

$$\operatorname{Cos} A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

La formule (1) et celles qui s'en déduisent par permutation tournante peuvent s'écrire

$$\operatorname{Cos} a = \cos(\pi - b)\cos(\pi - c) + \sin(\pi - b)\sin(\pi - c)\cos A,$$
$$\operatorname{Cos}(\pi - b) = \cos(\pi - c)\cos a + \sin(\pi - c)\sin a \cos(\pi - B),$$
$$\operatorname{Cos}(\pi - c) = \cos a \cos(\pi - b) + \sin a \sin(\pi - b)\cos(\pi - C).$$

(*) Nous laissons au lecteur familiarisé avec les calculs de la trigonométrie sphérique le soin de démontrer les divers théorèmes dont nous parlons ici et plus bas.

(**) Il est facile de voir que cos A est compris entre

$$-\cos(B + C) \text{ et } -\cos(B - C)$$

et, par suite, entre -1 et $+1$.

Ces équations prouvent que les deux arcs de grand cercle, qui se coupent une première fois en A, se coupent une seconde fois, sous le même angle en un point A′ et l'on a *arc* ABA′ = *arc* ACA′ = π. Par suite, comme on le voit assez aisément, tous les arcs de grand cercle qui passent par le point A, passent aussi par le point A′ et ne se rencontrent nulle part ailleurs. Deux points tels que A et A′ peuvent être appelés, par convention, *points opposés*, sans que cela implique la considération de la droite euclidienne AA′ qui les réunit.

D'après ce qui précède, les arcs de grand cercle définis comme nous venons de le faire présentent de grandes analogies avec la droite riemannienne. Ainsi, par exemple, ***deux arcs de grand cercle, suffisamment prolongés, renferment toujours un espace.***

Par suite, ils jouissent d'une propriété analogue au postulat des trois droites. En effet, il est clair que ***deux grands cercles qui font d'un même côté, avec un troisième, des angles dont la somme est inférieure à deux droits, se rencontrent de ce côté***, puisque deux pareils arcs se rencontrent toujours. Il y a plus, ils se rencontrent aussi de l'autre côté, comme nous l'avons vu tantôt. Ils se rencontrent d'ailleurs aussi des deux côtés, même si la somme des angles d'un côté et de l'autre du troisième grand cercle, est égale à deux droits. P. M

(*A continuer*).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 783.

(Voir *Mathesis*, X, p. 216).

De combien de manières un pion du jeu de dames, placé en un coin du damier, peut-il se rendre sur le bord opposé en progressant par cases consécutives parallèlement à l'une ou l'autre diagonale? (Ed. Lucas).

Solution par M. R. H. Van Dorsten. Supposons que le pion soit placé en haut dans le coin gauche d'un damier de $2n$ cases de côté.

C'est Ed. Lucas lui-même — le géomètre distingué, dont la mort a été une perte immense pour la science mathématique — qui, dans sa *Théorie des Nombres* (p. 90), a indiqué, dans les termes suivants, la méthode par laquelle la question proposée peut être résolue :

« Si l'on fait tourner le damier d'un demi-quart de tour dans le sens

« opposé aux aiguilles d'une montre, les déplacements du pion devien-
« nent parallèles aux directions ↓ et →, c'est-à-dire parallèles à ceux
« d'une tour, tandis que les bords verticaux deviennent parallèles à la
« diagonale ↘. On est ainsi ramené à la considération de l'hexagone
« arithmétique. »

En effet, il y a deux transversales formées de zéros. Dans l'une de ces transversales le premier zéro se trouve à la 1^{re} ligne et à la $2n+1^{ième}$ colonne, dans l'autre à la $2^{ième}$ ligne et à la 1^{re} colonne; de sorte que $a=1$ et $b=2n$. Si l'on désigne le terme qui est placé dans la case, dont les coordonnées sont x et y (c'est-à-dire dans la $(x+1)^{ième}$ ligne et la $(y+1)^{ième}$ colonne) par $Z_{x,y}$ le nombre cherché devient

$$Z = Z_{n-1,n} + Z_{n-2,n+1} + Z_{n-3,n+2} \cdots + Z_{0,2n-1}.$$

L'expression générale de $Z_{x,y}$ est :

$$\sum_{h=0} [C_{x+y,x-h(a+b)} - C_{x+y,y-h(a+b)-b} - C_{x+y,x-y(a+b)-a} + C_{x+y,y-(h+1)(a+b)}].$$

Comme on a $x < a+b$, c'est-à-dire $< 2n+1$ et $y < b$, c'est-à-dire $< 2n$, le deuxième et le quatrième terme de l'expression entre les parenthèses peuvent être supprimés; et la seule valeur de h qui ne rend pas négatifs les indices supérieurs est $h=0$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} Z_{n-1,n} &= C_{2n-1,n-1} - C_{2n-1,n-2}, \\ Z_{n-2,n+1} &= C_{2n-1,n-2} - C_{2n-1,n-3}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z_{1,2n-2} &= C_{2n-1,1} - C_{2n-1,0}, \\ Z_{0,2n-1} &= C_{2n-1,0}. \end{aligned}$$

L'addition de ces égalités nous fournit le nombre cherché

$$Z = C_{2n-1,n-1}.$$

Si le damier a $2n+1$ cases de côté, on a :

$$a=1, \quad b=2n+1, \quad Z = Z_{n,n} + Z_{n-1,n+1} + \cdots + Z_{0,2n}.$$

Dans ce cas on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} Z_{n,n} &= C_{2n,n} - C_{2n,n-1}, \\ Z_{n-1,n+1} &= C_{2n,n-1} - C_{2n,n-2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z_{1,2n-1} &= C_{2n,1} - C_{2n,0}, \\ Z_{0,2n} &= C_{2n,0}, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut :

$$Z = C_{2n,\,n}.$$

Une autre solution de la question a été donnée par M. D. André (*Bulletin de la Société mathématique*, t. VII, p. 43). Cette solution n'est pas aussi simple que celle qui est donnée ci-dessus, mais elle doit être considérée comme une application fort intéressante d'une méthode générale, indiquée par M. André pour la solution des questions diverses qui se rattachent à l'*analyse combinatoire*.

×Question 948.

(Voir *Mathesis*, (2) IV, p. 151).

On divise les côtés AB, BC, CD, DA ***d'un quadrilatère*** ABCD ***dans un même rapport*** $(p : q)$ ***aux points*** X, Y, Z, U ***et dans le rapport inverse*** $(q : p)$ ***aux points*** X′, Y′, Z′ ,U′. ***Soient*** L, M, N, P ***les points d'intersection des côtés homologues des deux quadrilatères*** XYZU, X′Y′Z′U. ***Démontrer que les droites*** LM ***et*** NP ***sont parallèles et proportionnelles aux diagonales du quadrilatère primitif*** ABCD. (J. N.).

Solution par M. Bastin. Il est aisé de voir que X′Y, XY′, U′Z et UZ′ sont parallèles à la diagonale AC, de même que Y′Z, YZ′, X′U et XU′ sont parallèles à la diagonale BD.

On a, N et P étant les points de rencontre XU avec X′U′ et de YZ avec Y′Z′,

$$\frac{X'N}{NU'} = \frac{X'U}{XU'} = \frac{AU}{AU'} = \frac{q}{p}, \quad \frac{YP}{PZ} = \frac{YZ'}{Y'Z} = \frac{CZ'}{CZ} = \frac{q}{p};$$

on conclut de là que NP est parallèle à AC.

On prouverait d'une manière analogue que LM est parallèle à BD.

Des relations

$$(p+q)\,NP = p.\,X'Y + q.\,U'Z,$$

$$\frac{X'Y}{AC} = \frac{BY}{BC} = \frac{p}{p+q}, \quad \frac{U'Z}{AC} = \frac{DZ}{CD} = \frac{q}{p+q},$$

on déduit

$$\frac{NP}{AC} = \frac{p^2+q^2}{(p+q)^2}.$$

La même question a été résolue par MM. Droz Farny, Dépbez, Fairon (Seraing) et J. Jonesco au moyen des équipollences). M. Fairon observe que la proposition s'applique à un quadrilatère gauche.

Question 958.

(Voir *Mathesis*, (2) IV, p. 152).

On donne une ellipse de centre O ; *soient* F *et* F′ *ses foyers, a et b ses demi-axes. Soit* M *un point de la circonférence de rayon* $a+b$ *et de centre* O ; *démontrer que la droite symétrique de* OM *par rapport à la bissectrice de l'angle* FMF′ *est normale à l'ellipse.*

La même propriété a lieu si M *est un point de la circonférence de rayon* $a-b$ *et de centre* O. (Lemoine).

Solution par M. P. Bastin. Si l'on prend pour coordonnées de M

$$(a+b)\cos\varphi, \qquad (a+b)\sin\varphi,$$

on trouve, pour équations des droites MF et MF′ :

$$y\,[(a+b)\cos\varphi - c] - x\,(a+b)\sin\varphi + c\,(a+b)\sin\varphi = 0,$$
$$y\,[(a+b)\cos\varphi + c] - x\,(a+b)\sin\varphi - c\,(a+b)\sin\varphi = 0.$$

Soit P $(\alpha,0)$ le point où la droite symétrique de OM rencontre l'axe des x. En exprimant que le rectangle des distances des points O et P à la droite MF est égal au rectangle des distances des mêmes points à la droite MF′, on trouve, après un calcul facile

$$\alpha = \frac{c^2\cos\varphi}{a}.$$

On obtient alors, pour équation de la droite MP,

$$y.b\cos\varphi - x.a\sin\varphi + c^2\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Cette droite est normale à l'ellipse au point $(a\cos\varphi\,,\,b\sin\varphi)$.

Si le point M appartenait à la circonférence de centre O et de rayon $a-b$, la droite MP aurait pour équation

$$-y.b\cos\varphi - x.a\sin\varphi + c^2\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$

et serait normale à l'ellipse au point $(a\cos\varphi\,,\,-b\sin\varphi)$.

Autres solutions analytiques par MM. J. Jonesco, Déprez, Barisien et Bovy; elles s'appuient sur la construction, d'après Chasles, des axes d'une ellipse dont on donne deux diamètres conjugués.

Solution par M. Cl. Servais. La tangente et la normale en un point P de l'ellipse, déterminent sur l'axe AA′, deux points K′ et K conjugués harmoniques par rapport aux foyers. Il en résulte que les couples OK, FF′, K′ ∞, appartiennent à une involution, dont les points doubles sont les points LL′ conjugués par rapport aux foyers, et ayant pour milieu le

point K'. La circonférence (K') décrite sur LL' comme diamètre rencontre la normale PK en deux points M et M'; les droites ML et ML' sont rectangulaires et divisent harmoniquement les couples de rayons MF et MF', MO et MK, donc ML est la bissectrice des angles FMF' et OMK. De même, les angles FM'F' et OM'K ont pour bissectrice M'L; par conséquent les droites OM et OM' sont également inclinées sur l'axe a. On en conclut que ces droites rencontrent la circonférence (K') aux points M_1' et M_1, qui sont les symétriques des points M' et M par rapport à l'axe a. Le milieu Q de la corde MM_1 est donc situé sur l'ordonnée du point P. Le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre rencontre cette ordonnée en un point X, tel que la tangente au cercle en ce point passe par K';les deux points X et Q sont donc identiques et on a $OQ = a$. Mais

$$OM.OM' = OL.OL' = \overline{OF}^2;$$

par conséquent,

$$OM = a + b, \quad OM' = a - b;$$

la question proposée est donc résolue.

Dans le triangle MOM' on a

$$\overline{OM}^2 + \overline{OM'}^2 = 2\overline{OP}^2 + 2\overline{PM}^2$$

ou

$$a^2 + b^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2.$$

PM est donc égal au demi-diamètre conjugué de OP. On a ainsi le théorème suivant dû à Chasles(*) et qui sert à construire les axes d'une ellipse connaissant deux diamètres conjugués en grandeur et position : *Soient* O *le centre de l'ellipse*, OP et OP_1 *deux demi-diamètres conjugués; par le point* P *on mène une droite perpendiculaire à* OP, *et on prend sur elle deux segments* PM et PM' *égaux à* OP_1. *Les axes principaux de l'ellipse sont les bissectrices des angles formés par les droites* OM *et* OM'. *Le grand axe sera égal à la somme de ces droites et le petit axe égal à leur différence.*

Solution par les équipollences, par un Abonné. Le point M ayant pour coordonnées $(a + b)\cos\varphi$ et $(a + b)\sin\varphi$, on a l'équipollence $OM = (a + b, \varepsilon^{\varphi}$. Les droites FM, F'M s'expriment par $(a + b)\varepsilon^{\varphi} \pm c$, et la symétrique de OM par rapport à la bissectrice de l'angle FMF' a pour direction celle de la droite

$$MN = \frac{(a+b)^2\varepsilon^{2\varphi} - c^2}{(a+b)\varepsilon^{\varphi}} = (a+b)\varepsilon^{\varphi} - \frac{c^2}{(a+b)}\varepsilon^{-\varphi} = (a+b)\varepsilon^{\varphi} - (a-b)\varepsilon^{-\varphi}.$$

(*) *Aperçu historique*, 1837, p. 45.

Un point quelconque E de cette droite est donc donné par la relation

$$OE = OM + u\,MN = (a+b)\,\varepsilon^{\varphi} + u\,[(a+b)\,\varepsilon^{\varphi} - (a-b)\,\varepsilon^{-\varphi}],$$

u étant un paramètre algébrique variable. Faisant $u = -\frac{1}{2}$, il vient

$$OE = \frac{a+b}{2}\,\varepsilon^{\varphi} + \frac{a-b}{2}\,\varepsilon^{\varphi} = a\cos\varphi + i\,b\sin\varphi.$$

Le point E est donc sur l'ellipse ; il a pour coordonnés $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$; et on vérifie immédiatement que

$$EN = 2(b\cos\varphi + ia\sin\varphi) + 2i(a\sin\varphi - ib\cos\varphi)$$

est normale à la courbe en E.

Un calcul analogue s'appliquerait au cas du cercle de rayon $a - b$. Le point d'incidence de la normale a alors pour coordonnées $a\cos\varphi$ et $-b\sin\varphi$.

Question 1000.

(Voir *Mathesis*, (2) IV, p. 280).

Soient A *un point d'une conique* Σ *de centre* O, M *et* N *le centre de courbure et l'extrémité de la corde normale au point* A ; C *et* D *les projections sur les axes du point* A_1 *diamétralement opposé à* A *sur* (Σ). *Les droites* OM, A_1N *et* CD *sont concourantes. Si* A_2 *est le symétrique de* A *par rapport à l'axe* a, *les droites* A_2N *et* CD *se coupent sur la perpendiculaire abaissée du point* M *sur l'axe* a. *La parallèle menée à l'axe* a *par un point d'intersection* E *de* CD *avec* Σ *coupe la normale en* A *au point* H. *La perpendiculaire à la normale en ce point rencontre* EA *au point* K. *Démontrer que* KM *est perpendiculaire à l'axe* a. (C. Servais.)

Solution géométrique par M. E. Buisseret. Soit M le centre de courbure au point A. Par ce point, on peut mener deux normales à la conique autres que MA. Les pieds E et F de ces normales s'obtiennent en joignant les projections C et D sur les axes, du symétrique A_1 du point A par rapport au centre O. Les points A, O, M, E, F sont situés sur une hyperbole équilatère tangente à la conique au point A, et dont les asymptotes sont parallèles aux axes de cette conique. Les deux courbes sont donc homologiques. Le centre d'homologie est le point A, et l'axe d'homologie la droite EF.

Dans cette homologie les points A_1 et O sont correspondants, ainsi que

M et le point normal N. Les droites OM et A_1N concourent donc sur EF.

Si A_2 est le symétrique de A par rapport à l'axe a, il a pour correspondant, sur l'hyperbole, le point à l'infini dans la direction de l'axe b. Les droites A_2N, CD et la perpendiculaire abaissée de M sur l'axe a, sont donc concourantes.

Soient X et Y les points à l'infini dans la direction des axes a et b. La droite KH est la pascale de l'hexagone (AAEXYM). La droite MY perpendiculaire à l'axe a, passe donc par le point K.

Remarque. Soient G le point d'intersection de la normale avec a, L le point d'intersection du diamètre OA, avec la perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe a. La droite LG est la pascale de l'hexagone(AAOXYM). Donc elle est parallèle à la tangente au point A. De là, la construction bien connue du centre de courbure en un point d'une conique. On pourrait en déduire d'autres, il suffirait de combiner de diverses manières, les points AA, O, E, F, X, Y et de chercher au moyen de l'hexagone de Pascal, l'intersection de l'hyperbole équilatère avec la normale en A.

Remarquons aussi que le théorème proposé nous donne trois constructions simples du centre de courbure dans le cas où la conique est donnée.

Note. MM. Déprez et Verdeyen ont donné une solution analytique de la même question.

M. Barisien nous transmet les remarques suivantes :

Le lieu du point de rencontre commun des trois droites OM, A_1N et CD est la courbe ayant pour équation

$$\left(a^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}\right)^2\left[(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}}\right] = (ab)^{\frac{8}{3}}.$$

2° Le lieu du point de rencontre des deux droites A_2N et CD est une courbe fermée ayant pour aire

$$U = \frac{3\pi bc^2(3a^2 - b^2)}{8a^3}.$$

3° Si H′ est le point analogue au point H et correspondant au second point d'intersection E′ de CD avec (Σ), le lieu du milieu de HH′ est une courbe fermée unicursale ayant pour aire

$$V = \frac{5}{8}\pi\frac{b^2}{a} - \frac{\pi ab}{4}.$$

Question 1040.

(Voir *Mathesis*, (2) V, p. 240).

D'un point quelconque M *d'une normale fixe à une parabole on abaisse les deux autres normales. 1° La droite* Δ *qui joint les pieds de ces deux normales est parallèle à une direction fixe. 2° Le lieu de la projection du point* M *sur* Δ *est une ligne droite.* (E. N. Barisien.)

Solution géométrique par M. A. Gob. Soient A le sommet de la parabole, N le point d'incidence de la normale fixe, P et Q les points d'incidence des deux autres normales. Les points N, A, P, Q sont sur une même circonférence (cercle de Joachimsthal); donc la droite PQ a une direction fixe, symétrique de celle de AN par rapport à l'axe de la parabole.

Désignons par S l'extrémité du diamètre correspondant à la direction PQ, par R et T le milieu et le pôle de PQ, par α et β les projections des points T et M sur PQ. Le triangle TαR étant rectangle et S étant le milieu de TR, le triangle SαR sera isoscèle et l'angle SαR sera égal à l'angle αRS. Donc la droite Sα passe par le foyer F. Le lieu de α est donc SF.

Or, le quadrilatère MPTQ est inscriptible dans un cercle de diamètre TM; donc les points α et β sont symétriques par rapport à R. Le lieu de β est donc la droite SX conjuguée harmonique de SF par rapport à SR et à la tangente en S.

De la définition même du lieu, il résulte que le point X où la droite SX rencontre une seconde fois la courbe, est le point où la normale parallèle à PQ rencontre la parabole.

Solution analytique par M. Colart (Huy). Soient A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C (x_3, y_3) les pieds des normales issues du point M (α, β). Les ordonnées y_1, y_2, y_3 sont les racines de l'équation

$$y^3 + 2p(p - \alpha)y - 2p^2\beta = 0,$$

de sorte que

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0, \quad y_1 y_2 y_3 = 2p^2\beta. \qquad (a)$$

Par suite,

$$\frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} \quad \text{ou} \quad \frac{2p}{y_2 + y_3} = -\frac{2p}{y_1} = -\frac{y_1}{x_1}.$$

Si A est fixe, la droite BC est donc parallèle à la symétrique, par rapport à l'axe de la parabole, de la droite AO joignant le point A au sommet O.

2° L'équation de la droite BC peut s'écrire

$$y - y_2 = -\frac{y_1}{x_1}(x - x_2), \quad \text{ou} \quad xy_1 + yx_1 = x_1y_2 + x_2y_1;$$

en transformant le second membre au moyen des relations

$$y_1^2 = 2px_1, \; y_2^2 = 2px_2, \; y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$

on trouve

$$x_1y + y_1x = -\frac{y_1y_2y_3}{2p} = -p\beta; \tag{1}$$

la projetante de M sur BC a pour équation

$$y - \beta = \frac{x_1}{y_1}(x - \alpha), \tag{2}$$

et l'on a la condition

$$y_1 - \beta = -\frac{y_1}{p}(x_1 - \alpha). \tag{3}$$

Si, entre les équations (1), (2) et (3), on élimine α et β, on obtient

$$(2p + 3x_1)\,y + 2y_1x + y_1\,(p + x_1) = 0.$$

Autres solutions analytiques ou mixtes par MM. Droz-Farny, Déprez, Mandart, Francq, Vandeuren, Seligmann.

M. Déprez fait remarquer que le centre de gravité, l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit et celui du cercle des neuf points du triangle formé par M avec la corde Δ décrivent des droites.

Autre solution géométrique par M. Buysens; nous regrettons que le défaut d'espace nous empêche de la reproduire.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1119. On donne une ellipse E, de centre O et de foyers F et F'. D'un point quelconque M du plan on mène à E les tangentes.

Par les points de contact P, Q et par M on fait passer une circonférence qui rencontre l'ellipse en deux nouveaux points P', Q'. Soit M le pôle de la corde P'Q' par rapport à E.

1° M, M', F, F' sont quatre points concycliques.

2° MM' est une symédiane du triangle FMF'.

3° Si M se meut sur une circonférence de centre O, M' se meut sur une seconde circonférence de centre O et la droite MM' enveloppe une développée de conique.

4° Si M décrit une lemniscate de Bernoulli de centre O et de mêmes axes que E, M' décrira une hyperbole équilatère.

5° Si M décrit une strophoïde droite ayant O pour point double et OF pour axe, M' décrira une hyperbole équilatère.

6° Si M décrit une cissoïde ayant pour axe OF et O pour point de rebroussement, M' décrira une parabole.

7° Si M décrit un limaçon de Pascal (cardioïde) dont l'axe est dirigé suivant OF et dont le pôle est en O, M' décrira une conique (parabole).

8° Si M décrit la podaire de O par rapport à une hypocycloïde à quatre rebroussements ayant pour axes ceux de l'ellipse, M' décrira une kreuzcurve.

9° Si M décrit une ellipse dont les axes sont dirigés suivant ceux de E, M' décrira une podaire d'ellipse. (Déprez.)

×**1120.** Quelle relation entre les angles α, β, γ, δ peut-on déduire de l'égalité

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma & \sin\delta \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & \cos\delta \\ \sin\beta & \sin\alpha & \sin\delta & \sin\gamma \\ \cos\beta & \cos\alpha & \cos\delta & \cos\gamma \end{vmatrix} = 0 ?$$

(J. Neuberg.)

1121. Si k^2 est un cercle réel de centre O, et k_i^2 son cercle conjugué (*) (complémentaire) : 1° les coniques passant par O et bitangentes à k^2 sont des ellipses ; 2° les coniques passant par O et bitangentes au cercle imaginaire k_i^2 sont des ellipses, hyperboles ou paraboles suivant que la corde de contact coupe le cercle réel k^2 en deux points imaginaires, coïncidents ou distincts. (V. Retali.)

(*) Si $x^2 + y^2 = r^2$ est l'équation de k^2, celle de k_i^2 est $x^2 + y^2 = -r^2$. On désire pour cette question et la suivante des solutions par la géométrie pure.

1122. Etant donnés dans un plan un pôle fixe o et un point-cercle a, faisons correspondre à un point variable p son conjugué p' par rapport au point-cercle, aligné avec o : si p décrit une droite h, le lieu de p' est une hyperbole, parabole ou ellipse suivant que h coupe le cercle décrit sur le diamètre oa en deux points réels et distincts, coïncidants, ou imaginaires conjugués. (V. Retali.)

PUBLICATIONS RÉCENTES.

12. *Leçons d'Arithmétique* à l'usage des cours scientifiques et des écoles normales par J. Thirion, S. J., professeur au Collège de la Compagnie de Jesus à Louvain. Namur, Ad. Wesmael-Charlier, 1897 (VIII-446 p. in-8°). — *Résumé des Leçons d'Arithmétique* à l'usage des cours moyens et des classes d'humanités, par le même. Ib. (277 p. in-8°).

QUESTIONS D'EXAMEN.

792. On considère une parabole P et la corde focale perpendiculaire à l'axe. Soient M un point quelconque de cette corde et AB la corde polaire de M par rapport à P. Le centre du cercle circonscrit au triangle MAB est situé sur l'axe de la parabole. (E. N. Barisien.)

Soient $y^2 = 2px$ l'équation de la parabole et (α, β) les coordonnées de M. On trouve pour les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle MAB :

$$x = \frac{2\beta^2 + p^2}{2p} \quad y = \frac{\beta(p - 2\alpha)}{2p}, \text{ etc.}$$

793. Déterminer l'axe et l'angle du cône de révolution qui touche les plans de projection et un plan P donné par ses traces.

On cherche l'intersection du plan bissecteur du dièdre PH avec celui du dièdre HV.

794. Trouver l'axe du cylindre de révolution tangent aux plans de projection et à un plan donné qui est parallèle à la ligne de terre.

795. On donne deux cercles O, O' et un point P. Mener deux rayons parallèles dans ces cercles de façon que leurs extrémités soient équidistantes du point donné P. (*J. de Vuibert.*)

1° Soient OA, O'A' les rayons cherchés, S le centre de similitude, M le milieu de AA', I le milieu de la distance des centres. M est à l'intersection du cercle de centre I et de rayon $\frac{R + R'}{2}$, avec le cercle décrit sur PS comme diamètre.

2° Menons A'P' parallèle à AP et rencontrant SP en P'. On peut déterminer le point P' au moyen de la proportion $\frac{SP}{SP'} = \frac{R}{R'}$; le point A' appartient au lieu des points satisfaisant à la relation $\frac{A'P \text{ ou } AP}{A'P'} = \frac{R}{R'}$.

796. Une droite AB de longueur et de direction invariables s'appuie par ses deux extrémités sur deux sphères fixes O, O'. Déterminer la courbe décrite par chaque extrémité sur la sphère correspondante.

(*J. de Vuibert.*)

La courbe décrite par B est l'intersection de la sphère O' avec la sphère O à laquelle on imprime une translation ayant pour mesure AB.

797. Soit un polygone régulier P de n côtés inscrit dans un cercle de rayon R. On joint les milieux des côtés consécutifs et on forme ainsi un second polygone P_1 sur lequel on opère comme sur le premier, et ainsi de suite. Démontrer que la somme des surfaces de ces polygones tend vers une limite égale à l'aire d'un polygone régulier de n côtés dont le côté égale 2 R. (*J. de Vuibert.*)

Soient R_1 R_1, R_2,... les rayons des cercles circonscrits à ces polygones. On a

$$\frac{P}{R^2} = \frac{P_1}{R_1^2} = \frac{P_2}{R_2^2}, \text{ etc.};$$

$$\frac{R}{R_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_2}{R_3}, \text{ etc.}$$

798. On connaît la surface totale d'un cône droit et la surface d'une section par l'axe. Trouver le rayon de la base et la hauteur.

799. Résoudre et discuter l'équation

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = a. \qquad \text{(E. N. Barisien.)}$$

On a, successivement,

(1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

(2) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x,$

(3) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$

(4) $\sin^{10} x + \cos^{10} x = 1 - 5\sin^2 x \cos^2 x + 5\sin^4 x \cos^4 x,$

$$a = 1 - \frac{4}{5}\sin^2 2x + \frac{5}{16}\sin^4 2x,$$

On élève (1) au carré, on multiplie ensuite (1) par (2), puis (2) par (3).

SUR QUELQUES FORMULES

qui représentent par approximation l'arc dont on connaît le sinus et le cosinus.

Par M. le Professeur E. LAMPE (Berlin).

Il y a quelques années on s'est occupé de la formule trigonométrique approximative :

$$\alpha^\circ = \frac{172c}{2h+a}\text{degrés},$$

où c désigne le côté opposé, a le côté adjacent de l'angle α d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est h. Cette formule, qui semble avoir été trouvée par *Nicolaus Cusanus*, est équivalente à la relation approximative :

$$x = \frac{3\sin x}{2+\cos x},$$

où x, supposé inférieur à $\frac{1}{2}\pi$, est l'arc appartenant à $\sin x$ ou $\cos x$. Une autre formule du même genre, qui remonte à NEWTON,

$$x = \frac{14+\cos x}{9+6\cos x}\sin x,$$

a été récemment tirée de l'oubli(*) et étudiée, au point de vue de l'usage qu'on peut en faire par M. P. MANSION dans une jolie note insérée au *Messenger of Mathematics*, t. XXV, p. 48 et dans *Mathesis*, 1896, p. 84.

Dans les questions de Mathématiques que je donne à mes élèves de l'École technique supérieure, j'ai fait étudier ces formules, en leur faisant chercher des expressions dont les développements en série coïncident le plus possible avec une fonction donnée. Des exemples de ce genre sont bien propres à faire connaître la portée de la méthode des coefficients indéterminés, et l'on en trouve plusieurs dans quelques recueils répandus de problèmes dont il suffit de nommer : O. SCHLÖMILCH, *Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis*. Prenons, par exemple, la série

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots\right),$$

(*) En réalité, c'est M. Aubry qui a fait observer que cette formule appartenait à Newton (J. M. S. 1893, p. 184 et p. 193; 1894, p. 202); M. Massau l'avait retrouvée depuis longtemps, par le procédé même de Newton (*Intégration graphique*, n° 334). (P. M.).

et supposons que cette série s'exprime par le quotient :

$$\frac{x + a_3x^3 + a_5x^5}{1 + b_3x^3 + b_5x^5}.$$

On a donc quatre coefficients à déterminer, et l'on trouve, à l'aide du procédé connu, les valeurs

$$a_3 = -\frac{7}{9}, \quad a_5 = \frac{64}{945}, \quad b_3 = -\frac{10}{9}, \quad b_5 = \frac{5}{21}.$$

La différence entre la série et le quotient, développé en série, ne commence qu'avec le terme x^{11}; on aura donc la formule approximative :

$$l\frac{1+x}{1-x} = \frac{2x(945 - 735x^2 + 64x^4)}{15(63 - 70x^2 + 15x^4)},$$

ou bien pour $x = \frac{1}{n}$:

$$l\frac{n+1}{n-1} = \frac{2(945n^4 - 735n^2 + 64)}{15n(63n^4 - 70n^2 + 15)},$$

formule qui donne pour $n = 3$:

$$l2 = 0{,}693\ 147\ 15\ldots,$$

tandis qu'on a effectivement :

$$l2 = 0{,}693\ 147\ 18\ldots$$

Considérées sous ce point de vue, les deux formules de trigonométrie que nous venons de citer, appartiennent donc à un ensemble de formules dont on peut demander la continuation. J'en ai établi quelques-unes que je crois assez intéressantes et assez utiles pour les communiquer ici; elles peuvent servir de questions pour les étudiants qui veulent s'initier à la théorie des suites infinies(*).

I.

Déterminer n nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *tels qu'on ait*

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots + a_n \sin nx = x,$$

avec une erreur qui ne porte que sur la plus haute puissance possible de x.

En développant les sinus suivant les puissances ascendantes de x, on

(*) Les séries employées par M. Lampe, savoir :

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \text{etc.}, \quad \cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \text{etc.},$$

sont établies avec rigueur, d'une manière élémentaire, dans la *Trigonométrie* de Serret. On pose $1.2.3\ldots n = n!$

parvient à former pour les n inconnues $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ le système des n équations linéaires :

$$\begin{array}{llllll}
a_1 + 2a_2 & + 3a_3 & + \cdots + na_n & = 1, \\
a_1 + 2^2 a_2 & + 3^2 a_3 & + \cdots + n^2 a_n & = 0, \\
a_1 + 2^3 a_2 & + 3^3 a_3 & + \cdots + n^3 a_n & = 0, \\
\vdots \quad\quad & \vdots \quad\quad & \vdots \quad\quad\quad & \vdots \quad\quad \vdots \\
a_1 + 2^{2n-1} a_2 & + 3^{2n-1} a_3 & + \cdots & + n^{2n-1} a_n = 0.
\end{array}$$

Soit D le déterminant de ce système d'équations et posons $D = n! P$, où l'on a posé :

$$P = \begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\
1 & 2^4 & 3^4 & \cdots & n^4 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & 2^{2n-2} & 3^{2n-2} & \cdots & n^{2n-2}
\end{vmatrix}$$

$$= (n^2 - 1^2)(n^2 - 2^2)(n^2 - 3^2) \cdots (n^2 - \overline{n-1}^2)$$
$$\times (n-1)^2 - 1^2)(n-1)^2 - 2^2) \cdots (\overline{n-1}^2 - \overline{n-2}^2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\times (k^2 - 1^2)(k^2 - 2^2)(k^2 - 3^2) \cdots (k^2 - \overline{k-1}^2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\times (3^2 - 1^2)(3^2 - 2^2)$$
$$\times (2^2 - 1^2).$$

Le coefficient a_k se déduit de la relation

$$D.a_k = \begin{vmatrix}
1 & 2 & 3 & \cdots & k-1 & 1 & k+1 & \cdots & n \\
1 & 2^3 & 3^3 & \cdots & (k-1)^3 & 0 & (k+1)^3 & \cdots & n^3 \\
1 & 2^5 & 3^5 & \cdots & (k-1)^5 & 0 & (k+1)^5 & \cdots & n^5 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \cdots & (k-1)^{2n-1} & 0 & (k+1)^{2n-1} & \cdots & n^{2n-1}
\end{vmatrix}$$

$$(-1)^{k-1}\left(\frac{n!}{k}\right)^2 \begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & (k-1)^2 & (k+1)^2 & \cdots & n^2 \\
1 & 2^4 & 3^4 & \cdots & (k-1)^4 & (k+1)^4 & \cdots & n^4 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & 2^{2n-4} & 3^{2n-4} & \cdots & (k-1)^{2n-4} & (k+1)^{2n-4} & \cdots & n^{2n-4}
\end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{k-1}\left(\frac{n!}{k}\right)^2 \cdot (n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots(n^2-\overline{k+1}^2)(n^2-\overline{k-1}^2)\cdots(n^2-n^2)$$

$$\times \quad .$$

$$\times (\overline{k+1}^2-1^2)(\overline{k+1}^2-2^2)\cdots(\overline{k+1}^2-\overline{k-1}^2)$$

$$\times (\overline{k-1}^2-1^2)(\overline{k-1}^2-2^2)\cdots(\overline{k-1}^2-\overline{k-2}^2)$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\times (3^2-1^2)(3^2-2^2)(2^2-1^2).$$

Toute réduction faite, on a donc :

$$n!\,P.\,a_k = (-1)^k\left(\frac{n!}{k}\right)^2 \cdot \frac{P}{P_1.P_2},$$

où l'on a posé :

$$P_1 = (n^2-k^2)(\overline{n-1}^2-k^2)(\overline{n-2}^2-k^2)\cdots(\overline{k+1}^2-k^2),$$

$$P_2 = (k^2-1^2)(k^2-2^2)(k^2-3^2)\cdots(k^2-\overline{k-1}^2).$$

Or on voit immédiatement que l'on a :

$$P_1 \cdot P_2 = (n+k)(n+k-1)(n+k-2)\cdots(2k+1)$$

$$\times (n-k)(n-k-1)(n-k-2)\cdots 1$$

$$\times (k+1)(k+2)(k+3)\cdots(2k-1)$$

$$\times (k-1)(k-2)(k-3)\cdots 1$$

$$= \frac{(n+k)!\,(n-k)!}{2k\;k}.$$

Donc :

$$a_k = (-1)^{k-1}\frac{2(n!)^2}{k(n+k)!\,(n-k)!}$$

$$= (-1)^{k-1}\frac{2n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}.$$

Faisant $k = 1, 2, 3, \ldots$, on a enfin :

$$a_1 = \frac{2n}{n+1},$$

$$a_2 = -\frac{2n(n-1)}{2(n+1)(n+2)},$$

$$a_3 = \frac{2n(n-1)(n-2)}{3(n+1)(n+2)(n+3)},$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

et la formule cherchée se présente sous cette forme :

$$\frac{2n}{n+1}\left\{\sin x - \frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{\sin 2x}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{(n+2)(n+3)}\cdot\frac{\sin 3x}{3}\right.$$
$$\left. - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+2)(n+3)(n+4)}\cdot\frac{\sin 4x}{4} + \cdots\right\} = x + cx^{2n+1} + \cdots$$

En particularisant encore cette formule pour $n = 2, 3, 4, \ldots$, nous obtiendrons ces cas spéciaux :

$$\frac{4}{3}\sin x - \frac{1}{6}\sin 2x = x - \frac{1}{30}x^5 \ldots,$$

$$\frac{3}{2}\sin x - \frac{3}{10}\sin 2x + \frac{1}{30}\sin 3x = x + \frac{1}{140}x^7 \ldots,$$

$$\frac{8}{5}\sin x - \frac{2}{5}\sin 2x + \frac{8}{105}\sin 3x - \frac{1}{140}\sin 4x = x - \frac{1}{630}x^9 \ldots,$$

$$\frac{5}{3}\sin x - \frac{10}{21}\sin 2x + \frac{5}{42}\sin 3x - \frac{5}{252}\sin 4x + \frac{1}{630}\sin 5x = x + \frac{1}{2772}x^{11} \ldots$$

. . . . . .

Pour que ces formules se prêtent au calcul d'approximation quand on se donne $\sin x$ et $\cos x$, observons que

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x,\ \sin 3x = \sin x\,(-1 + 4\cos^2 x),$$

$\sin 4x = \sin x\,(8\cos^3 x - 4\cos x)$, $\sin 5x = \sin x\,(16\cos^4 x - 12\cos^2 x + 1)$, et ainsi on arrivera à établir les relations :

A.

(1) $$\frac{1}{3}\sin x\,(4 - \cos x) = x - \frac{1}{30}x^3 \ldots,$$

(2) $$\frac{1}{15}\sin x\,(22 - 9\cos x + 2\cos^2 x) = x + \frac{1}{140}x^7 \ldots,$$

(3) $$\frac{1}{150}\sin x\,(160 - 81\cos x + 32\cos^2 x - 6\cos^3 x) = x - \frac{1}{630}x^9 \ldots,$$

(4) $$\frac{1}{315}\sin x\,(488 - 275\cos x + 144\cos^2 x - 50\cos^3 x + 8\cos^4 x)$$
$$= x + \frac{1}{2772}x^{11} \ldots$$

Avant de passer à d'autres formules, il est utile de signaler quelques propriétés de la formule générale à n termes.

Pour n infini, elle se transforme en

$$x = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots\right),$$

la série connue de Fourier pour x. En intégrant la formule et en déterminant convenablement les constantes de l'intégration, on trouve les séries pour x^2, x^3, ... procédant suivant les sinus ou cosinus des multiples de x. Mais ce qui est curieux, c'est qu'on peut aussi différentier la série $\Sigma\, a_k \sin kx$ *tant que* n *est un nombre fini*, et qu'on parvient ainsi à plusieurs identités remarquables. Une première différentiation fait sortir :

$$\frac{2n}{n+1}\left[\cos x - \frac{n-1}{n+2}\cos 2x + \frac{(n-1)(n-2)}{(n+2)(n+3)}\cos 3x - \cdots\right] = 1 + (2n+1)\,cx^{2n} + \cdots,$$

Le premier membre est donc une représentation approximative de l'unité. Substituons 0 pour x; il viendra

$$\frac{n}{n+1}\left\{1 - \frac{n-1}{n+2} + \frac{(n-1)(n-2)}{(n+2)(n+3)} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \cdots\right\} = \frac{1}{2}$$

pour toute valeur entière de n (*). — Signalons enfin une dernière curiosité. Si l'on fait n infini (ce qui, on le sait, n'est pas permis), cette relation se transforme en

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \quad \textit{in infinitum} = \frac{1}{2},$$

résultat fameux rencontré par *Leibniz*. (*A suivre.*)

SUR UNE MÉTHODE ÉLÉMENTAIRE D'EXPOSITION DES PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE.

(*Suite et fin;* voir pp. 109-113).

5. *Géométrie riemannienne.* Le parallélisme qui existe entre les propriétés des grands cercles de la sphère euclidienne et celles qui caractérisent la droite riemannienne, nous fait conjecturer que *la définition générale de la droite, avec les relations* (6) *et* (7), *admises à priori*

(*) Deux différentiations ultérieures donnent de même :

$$1 - 2^2\frac{n-1}{n+2} + 3^2\frac{(n-1)(n-2)}{(n+2)(n+3)} - 4^2\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \cdots = 0, \text{ etc.}$$

pour caractériser un triangle rectangle et en définir les angles*(*), *suffisent pour établir la géométrie riemannienne.

Il en est bien ainsi. La géométrie riemannienne plane s'établit absolument comme on l'a vu au n° précédent pour la trigonométrie sphérique. Il suffit d'y remplacer le terme *arc de grand cercle* par le terme ***ligne droite.*** Ainsi, d'abord, de (6) et (7), on déduit (1), (2), (3), (4), (5). On prouve ensuite qu'un triangle, formé par des droites définies comme il a été dit plus haut, est déterminé (moyennant certaines restrictions dans le premier et le dernier cas) par ses trois côtés, par deux côtés et un angle compris, par un côté et deux angles adjacents, enfin par ses trois angles; que la somme de ses angles est supérieure à deux droites. Enfin, ***deux de ces droites renferment toujours un espace***; par suite, ***deux droites qui font d'un même côté, avec une troisième des angles dont la somme est inférieure*** (ou même égale ou supérieure) ***à deux droits se rencontrent de ce côté*** (et même de l'autre). Ce sont donc des droites riemanniennes d'après les définitions du n° 2.

Grâce à la propriété fondamentale de la perpendiculaire à un plan, qui est vraie dans les trois systèmes de géométrie, on établit ensuite facilement la théorie des droites et des plans perpendiculaires dans l'espace, au moyen de démonstrations calquées sur celles de la géométrie euclidienne; puis, en recourant au besoin au calcul intégral, le reste de la géométrie riemannienne solide.

6. ***Géométrie lobatchefskienne.*** Une nouvelle induction, d'un autre genre que celle qui permet de tirer la géométrie riemannienne de la trigonométrie sphérique, conduit aux formules fondamentales de la géométrie lobatchefskienne de la manière suivante :

Remplaçons, dans les formules (1) à (7), les cosinus circulaires par des cosinus hyperboliques, les sinus circulaires par des sinus hyperboliques multipliés par $\sqrt{-1}$. Nous trouverons

$$\operatorname{Ch} a = \operatorname{Ch} b \operatorname{Ch} c - \operatorname{Sh} b \operatorname{Sh} c \cos \mathrm{A}, \tag{1'}$$

$$\frac{\operatorname{Sh} a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{\operatorname{Sh} b}{\sin \mathrm{B}} = \frac{\operatorname{Sh} c}{\sin \mathrm{C}}, \tag{2'}$$

(*) Nous appelons l'attention du lecteur sur ce point : ce sont les relations (6) qui servent à définir les angles B et C du triangle rectangle ABC. La légitimité de cette définition ressort de ce fait que les deux rapports (tang *c* : tang *a*), (tang *b* : tang *a*) ne dépendent pas de la longueur *a*, en vertu même de la démonstration qui permet de tirer (1) de (6) et (7), comme on l'a vu au n° 3.

$$\operatorname{Coth} a \operatorname{Sh} b = \operatorname{Ch} b \cos C + \sin C \cot A, \qquad (3')$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \operatorname{Ch} a ; \qquad (4')$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(A+B+C) = + \frac{\sqrt{\operatorname{Sh} p \operatorname{Sh}(p-a) \operatorname{Sh}(p-b) \operatorname{Sh}(p-c)}}{2 \operatorname{Ch} \tfrac{1}{2} a \operatorname{Ch} \tfrac{1}{2} b \operatorname{Ch} \tfrac{1}{2} c} ; \qquad (5')$$

$$\cos B = \frac{\operatorname{Th} c}{\operatorname{Th} a}, \quad \cos C = \frac{\operatorname{Th} b}{\operatorname{Th} a}, \qquad (6')$$

$$\operatorname{Ch} a = \operatorname{Ch} b \operatorname{Ch} c. \qquad (7')$$

Taurinus a conjecturé (1826) que ces formules expriment les propriétés de triangles curvilignes tracés sur quelque surface inconnue, les côtés de ces triangles ayant des propriétés analogues à celle de la droite euclidienne, à part le postulat des trois droites. Beltrami a montré la justesse de cette conjecture en prouvant que ces formules caractérisent les triangles géodésiques sur la pseudosphère.

Lobatchefsky en a donné une autre interprétation (*Journal de Crelle*, t. XVII, pp. 295-320). Il a montré que ces relations (auxquelles d'ailleurs il donne une autre forme, en y introduisant des fonctions trigonométriques auxiliaires) sont les formules fondamentales de la géométrie qui porte maintenant son nom.

On peut simplifier les démonstrations de Lobatchefsky, en employant comme nous le faisons ici, les fonctions hyperboliques et procédant de la manière suivante :

On prend pour point de départ *la définition générale de la droite avec les relations* (6), (7), *admises à priori pour caractériser un triangle rectangle et en définir les angles.*

De ces relations, on déduit (1'), (2'), (3'), (4'), (5'), par des calculs semblables à ceux qui conduisent, des relations (6) et (7), aux relations (1), (2), (3), (4), (5). D'après la formule (5'), la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux droites. Cela posé, on établit successivement les diverses propositions fondamentales suivantes :

I. D'après la formule (1'), un triangle est déterminé par ses trois côtés, pourvu que chacun soit inférieur à la somme des deux autres. En effet, on tire de cette formule,

$$1 + \cos A = 1 + \frac{\operatorname{Ch} b \operatorname{Ch} c - \operatorname{Ch} a}{\operatorname{Sh} b \operatorname{Sh} c} = \frac{\operatorname{Ch}(b+c) - \operatorname{Ch} a}{\operatorname{Sh} b \operatorname{Sh} c} > 0,$$

$$1 - \cos A = 1 - \frac{\operatorname{Ch} b \operatorname{Ch} c - \operatorname{Ch} a}{\operatorname{Sh} b \operatorname{Sh} c} = \frac{\operatorname{Ch} a - \operatorname{Ch}(b-c)}{\operatorname{Sh} b \operatorname{Sh} c} > 0.$$

On a donc $1 > \cos A > -1$, ce qui prouve que A est réel.

II. La même formule (1') prouve qu'un triangle est déterminé par un angle A et les deux côtés qui le comprennent. En effet, supposons b égal ou supérieur à c. On a

$$\operatorname{Ch} a = \operatorname{Ch} b \operatorname{Ch} c - \operatorname{Sh} b \operatorname{Sh} c \cos A = \operatorname{Ch}(b-c) + \operatorname{Sh} b \operatorname{Sh} c (1 - \cos A),$$

$$\operatorname{Ch} a = \operatorname{Ch}(b+c) - \operatorname{Sh} b \operatorname{Sh} c (1 + \cos A).$$

La première de ces deux relations prouve que Ch a est supérieur à l'unité, et, par suite, que a est réel et d'ailleurs plus grand que $b - c$; la seconde, que a est plus petit que $b + c$. On a donc $a + b > c$ d'après l'hypothèse $b > c$ ou $b = c$; par démonstration, $a + c > b$, $b + c > a$.

III. D'après (4') un triangle est déterminé par ses trois angles A, B, C, pourvu que $A + B + C$ soit inférieur à π. En effet, dans ce cas, on a $A < \pi - (B + C)$, $\cos A > \cos(\pi - B - C)$ ou $\cos A > -\cos(B + C)$ c'est-à-dire, $\cos A + \cos(B + C) > 0$. Or, on tire de (4')

$$\operatorname{Ch} a = 1 + \frac{\cos A + \cos(B + C)}{\sin B \sin C} > 1.$$

Il en résulte que a est réel; on prouve de même que b, c sont réels, puis, par le théorème précédent, que l'on a $a < b + c$, $b < c + a$, $c < a + b$.

IV. Pour qu'un triangle soit déterminé par un côté a et deux angles adjacents B et C, il faut et il suffit que a soit suffisamment petit et que $B + C$ soit inférieur à deux droits. Cette dernière condition est évidemment nécessaire : la somme des trois angles d'un triangle étant inférieure à deux droits, il en est de même, *à fortiori*, de la somme de deux de ces angles. La relation (4') peut ensuite s'écrire

$$\cos A = \cos(\pi - B - C) + (\operatorname{Ch} a - 1) \sin B \sin C.$$

Si le côté a va en croissant, le second membre de cette formule deviendra aussi grand qu'on le voudra; s'il est égal ou supérieur à l'unité, on trouve pour A une valeur nulle ou imaginaire et, par suite, il est impossible de former un triangle ayant le côté a et les angles B, C. Donc, pour que le triangle soit possible, il *faut* que a soit assez petit pour que l'on ait

$$\cos(\pi - B - C) + (\operatorname{Ch} a - 1) \sin B \sin C < 1,$$

et, de plus, comme on l'a vu plus haut, $B + C < \pi$.

Mais si ces conditions sont vérifiées, on aura

$$1 > \cos A > \cos(\pi - B - C)$$

et, par suite, on trouvera pour A une valeur supérieure à 0 et inférieure

à $\pi - B - C$, et le triangle sera déterminé. On observera d'ailleurs que si l'on dispose de la grandeur de a, on pourra toujours faire en sorte que $(\mathrm{Ch}a - 1)$ soit assez petit pour que l'on ait

$$(\mathrm{Ch}a - 1)\sin B \sin C < 1 - \cos(\pi - B - C),$$

et que le triangle soit possible, pourvu que $B + C$ soit inférieur à π.

V. Il résulte de cette proposition IV, que les droites considérées dans ce n° 6 sont des droites lobatchefskiennes. 1° Le *postulat des trois droites n'est pas vrai* dans le système de géométrie considéré ici. En effet, on a vu que si a est assez grand pour que l'on ait

$$\cos(\pi - B - C) + (\mathrm{Ch}a - 1)\sin B \sin C \gtrless 1,$$

les côtés non communs des angles B et C ne se rencontrent pas, bien que $B + C$ soit inférieur à deux droits. 2° *Le postulat des deux droites est toujours vrai* dans ce même système de géométrie. En effet, si deux droites BA, CA se rencontrent en A, prolongées au delà de BC, du côté ou ne se trouve pas A, elles ne peuvent se rencontrer en un second point A'. En effet, la somme des angles des deux triangles A'BC, ABC serait

$$A' + A'BC + A'CB + ABC + ACB + A = A' + 4\pi + A$$

ce qui est absurde, puisque dans chaque triangle, la somme des angles est inférieure à deux droits.

VI. On établit ensuite, comme au n° 5, les propriétés fondamentales des droites et des plans perpendiculaires dans l'espace et le reste de la géométrie lobatchefskienne.

7. *Conclusion.* Nous résumerons ce qui précède comme il suit : On peut fonder la géométrie lobatchefskienne sur la définition générale de la droite et sur le postulat des deux droites; on en déduit les relations métriques (6') et (7'), puis, de celles-ci, tout le reste. Mais on peut aussi prendre pour point de départ la définition générale de la droite avec les relations (6') et (7'), et en tirer tout le reste y compris le postulat des deux droites.

On peut fonder la géométrie riemannienne sur la définition générale de la droite et sur le postulat des trois droites; on en déduit les relations métriques (6) et (7), puis, de ces dernières relations, tout le reste. Mais on peut aussi prendre pour point de départ la définition générale de la

droite avec les relations (6) et (7) et, en tirer tout le reste, y compris le postulat des trois droites (*).

On peut résumer plus brièvement encore les considérations précédentes de la manière suivante :

Le postulat des deux droites est équivalent aux relations (6'), (7').

Le postulat des trois droites est équivalent aux relations (6), (7) (**).

Lobatchefsky a vu clairement la légitimité du mode d'exposition que nous avons fait connaître dans cet article pour la géométrie qui porte son nom.

NOTE DE GÉOMÉTRIE;

par M. E. Mathot.

1. Théorème. *Soit* ABCDEF *un hexagone* (convexe ou non) *inscrit à un cercle, et tel que les diagonales* AD, BE, CF *qui joignent les sommets opposés concourent en un même point* O. *Le produit de trois côtés non adjacents est égal au produit des trois autres.*

En effet, les triangles semblables AOB et EOD, BOC et FOE, COD et AOF donnent

$$\frac{AB}{ED}=\frac{AO}{EO},\quad \frac{EF}{BC}=\frac{EO}{CO},\quad \frac{CD}{FA}=\frac{CO}{AO};$$

d'où, par multiplication,

$$AB.CD.EF=BC.DE.FA. \qquad (1)$$

(*) De même, on a fondé la géométrie euclidienne sur la définition générale de la droite et sur les postulats des deux et des trois droites, et l'on en a déduit les relations $a^2=b^2+c^2$, $b=a\cos C$, $c=a\cos B$, entre les côtés et les angles d'un triangle rectangle; mais on peut aussi prendre pour point de départ la définition générale de la droite, avec ces dernières relations et en déduire tout le reste y compris les deux postulats.

(**) Dans les relations (6), (7), (6'), (7'), a, b, c désignent le rapport des côtés à une unité de longueur arbitraire; si on change d'unité, l'unité primitive de longueur apparaît dans les formules; si on la fait croître indéfiniment, les formules (6), (7) aussi bien que (6'), (7'), tendent indéfiniment vers celles qui caractérisent la géométrie euclidienne : $a^2=b^2+c^2$, $b=a\cos C$, $c=a\cos B$. Par suite, celles-ci sont équivalentes à la fois aux postulats des deux et des trois droites.

2. Réciproque. *Si un hexagone inscrit* ABCDEF *est tel que le produit de trois côtés non adjacents est égal au produit des trois autres, les diagonales* AD, BE, CF *concourent en un même point.*

Car, si la droite qui joint C au point d'intersection O des droites AD, BE rencontre la circonférence la seconde fois en F', on a, par le théorème précédent

$$AB.CD.EF' = BC.DE.F'A. \qquad (2)$$

En comparant cette égalité à l'hypothèse (1), on trouve

$$\frac{EF}{EF'} = \frac{FA}{F'A};$$

les triangles AFE, AF'E sont donc semblables, et l'angle EAF = EAF'. Par suite F et F' se confondent.

3. Applications. — *a*) *Dans un triangle* ABC, *les trois bissectrices concourent en un même point.*

En effet, les bissectrices rencontrent la circonférence circonscrite au triangle en trois points A', B', C', tels que BA' = CA', CB' = AB', AC' = BC'; on a donc

$$AC'.BA'.CB' = C'B.A'C.B'A, \qquad (3)$$

et les diagonales AA', BB', CC' de l'hexagone inscrit AC'BA'CB' concourent en un même point.

b) *Les hauteurs d'un triangle se coupent en un même point.*

Car elles rencontrent la circonférence circonscrite au triangle en trois points A', B', C', tels que AB' = AC', BC' = BA', CA' = CB' (les angles ABB' et ACC', ... sont égaux). L'égalité (3) a encore lieu, etc.

c) *Si trois droites menées par les sommets d'un triangle* ABC *concourent en un même point* O, *leurs symétriques par rapport aux bissectrices du triangle concourent également en un même point.*

En effet, soient A', B', C', A'', B'', C'' les points où ces six droites rencontrent la circonférence circonscrite au triangle ABC. Les droites AA', BB', CC' étant concourantes, on a

$$BA'.CB'.AC' = A'C.B'A.C'B. \qquad (4)$$

Mais BA' = CA'', CA' = BA'', etc.; par suite, l'égalité (4) peut se transformer en

$$CA''.AB''.BC'' = BA''.CB''.AC''.$$

On en conclut que les droites AA'', BB'', CC'' passent par un même point.

4. *Théorème de Céva.* — Soient A', B', C' les points où les droites joignant les sommets d'un triangle ABC à un même point O rencontrent les côtés opposés, et soient A'', B'', C'' les points où ces droites coupent la circonférence circonscrite. Les triangles semblables ABA' et CA''A', ACA' et BA''A' donnent

$$\frac{BA'}{A'A''} = \frac{BA}{CA''}, \quad \frac{CA'}{A'A''} = \frac{CA}{A''B};$$

d'où, par division,

$$\frac{BA'}{CA'} = \frac{BA}{CA} \cdot \frac{A''B}{A''C}.$$

En multipliant membre à membre cette égalité et les deux autres analogues et en appliquant le premier théorème à l'hexagone inscrit AC''BA''CB'', on trouve

$$BA'.CB'.AC' = A'C.B'A.C'B.$$

5. Théorème. *Dans un quadrilatère circonscrit à un cercle, les diagonales et les cordes de contact des couples de côtés opposés passent par un point.*

Soit le quadrilatère circonscrit ABCD; désignons par M, N, P, Q les points de contact des côtés AB, BC, CD, DA, et par E, F les points où la diagonale AC rencontre la circonférence inscrite au quadrilatère. Les triangles semblables AEM et AMF, AQE et AFQ donnent

$$\frac{EM}{MF} = \frac{AM}{AF}, \quad \frac{EQ}{QF} = \frac{AQ}{AF},$$

d'où, par division,

$$\frac{EM}{EQ} = \frac{MF}{QF}.$$

Par analogie,

$$\frac{FN}{FP} = \frac{EN}{EP}.$$

Multiplions les deux dernières égalités membre à membre ; il vient

$$\frac{EM.FN}{EQ.FP} = \frac{MF.EN}{QF.EP} = \frac{MF.EN - EM.FN}{QF.EP - EQ.FP}.$$

Le dernier rapport est égal à $\frac{MN.EF}{QP.EF}$; par suite,

$$\frac{EM.FN}{EQ.FP} = \frac{MN}{QP}, \text{ ou } EM.FN.QP = EQ.FP.MN.$$

Donc les diagonales de l'hexagone inscrit EMNFPQ concourent en un même point.

NOTE MATHÉMATIQUE.

24. ***Sur les triangles semiconjugués*** (Voir ***Mathesis***, p. 59). I. Soient BC, B'C' deux cordes d'une conique K^2, et A, A' leurs pôles. Pour démontrer que les triangles semiconjugués ABC, A'B'C' sont inscrits à une seconde conique et circonscrits à une troisième, il suffit de faire voir qu'ils sont autopolaires par rapport à une même conique.

Soit O l'intersection des cordes BC, B'C'. Construisons la conique K_0^2 qui est sa propre polaire réciproque par rapport à K^2 et au pôle O, ou la *conjuguée* de K^2 par rapport à O ; cette courbe est bitangente à K^2, la corde de contact étant dirigée suivant la polaire de O, c'est-à-dire suivant la droite AA'. Les points A, A' étant situés sur cette corde, ont les mêmes polaires BC, B'C' par rapport aux deux courbes. Les polaires des points B, C alignés sur le pôle O sont respectivement BA, CA. On voit que les triangles ABC, A'B'C' sont autopolaires par rapport à K_0^2.

(Retali, Milan.)

II. Soient M, N, P, Q, quatre points quelconques d'une conique. En menant les tangentes m, n, p, q en ces points, nous formons trois couples de triangles semiconjugués ayant respectivement pour bases les cordes MN et PQ, MP et NQ, MQ et NP. A chaque couple correspondent un hexagone de Brianchon et un hexagone de Pascal, une conique inscrite et une conique circonscrite. Les propriétés de ces hexagones ne diffèrent pas essentiellement des théorèmes, bien connus, se rapportant aux deux quadrilatères MNPQ et $mnpq$. (Lorent, Ypres).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 901.

(Voir ***Mathesis***, (2), IV, 31).

On donne deux droites Ox, Oy ***et deux points*** A, D. ***Une sécante quelconque menée par*** D ***rencontre*** Ox, Oy ***aux points*** B, C. ***Étudier synthétiquement les enveloppes des hauteurs*** BB', CC' ***du triangle*** ABC, ***et les***

lieux des pieds B', C', *de l'orthocentre* H *et du centre* O' *du cercle circonscrit.* (J. Neuberg.)

Solution par M. Droz Farny. 1. Désignons par l la droite de l'infini. Les côtés de l'angle droit BB'A marquent sur l deux ponctuelles en involution; la ponctuelle décrite par B est projective avec le faisceau engendré par AC et, par suite, avec la ponctuelle déterminée par B'B sur l. B'B joignant les éléments homologues de deux ponctuelles projectives enveloppe une parabole π qui touche Ox.

Il importe de remarquer les positions où le triangle ABC est rectangle. La circonférence décrite sur AD comme diamètre rencontre Ox en deux points B_1, B_2 et OY en deux points C_3, C_4. Menons les sécantes DB_1, DB_2 qui coupent Oy en C_1, C_2; traçons aussi les droites DC_3, DC_4 qui coupent Ox en B_3, B_4. Nous aurons ainsi les triangles AB_1C_1, AB_2C_2 qui sont rectangles en B_1, B_2, et les triangles AB_3C_3, AB_4C_4 rectangles en C_3, C_4. On voit immédiatement que B_3C_3, B_4C_4 sont deux positions de BB'; donc ce sont les tangentes menées de D à π.

Soit $\beta A\gamma$ un triangle rectangle en A et ayant ses sommets β, γ sur Ox, Oy. L'hypoténuse enveloppe une parabole ayant pour foyer F et touchant Ox, Oy. Désignons par B_5C_5, B_6C_6 les tangentes menées de D à cette courbe. B_5A, B_6A sont deux positions de BB'; ce sont donc les tangentes menées de A à la parabole π.

2. Le point B' décrit la podaire de A par rapport à la parabole π. On sait que cette podaire est une cubique circulaire ayant en A un point double; les tangentes en A étant perpendiculaires aux tangentes AB_5, AB_6 de π, se confondent avec AC_5, AC_6.

3. Toute droite Au renferme l'orthocentre du triangle ABC dont le côté BC est la perpendiculaire abaissée de D sur Au. Le point A lui-même est l'orthocentre des deux triangles AB_5C_5, AB_6C_6. On conclut de là que le lieu de H est une cubique ayant en A un point double, les tangentes en A étant les perpendiculaires abaissées de A sur B_5C_5 et B_6C_6.

Les asymptotes de cette cubique sont perpendiculaires aux droites AD, Ox, Oy; car H est à l'infini dans les directions de ces perpendiculaires, lorsque BC se confond avec AD ou est parallèle aux droites Ox, Oy.

Les orthocentres qui tombent sur Ox sont B_1, B_2 et l'orthocentre du triangle ABC dont le côté AC est perpendiculaire sur Ox.

4. Généralisons le problème : Étant donnés une conique K et deux

points A et D, une sécante quelconque menée par D rencontre K en B et C; on demande le lieu du centre O′ de la circonférence circonscrite au triangle ABC. Pour déterminer le degré du lieu, nous cherchons combien de points O′ tombent sur une droite donnée v. Une circonférence décrite d'un point M de v comme centre et passant par A rencontre K en quatre points M_1, M_2, M_3, M_4. Lorsque M décrit v, les six cordes M_1M_2 M_1M_3, ··· M_3M_4 enveloppent une même courbe de troisième classe; car, par un point donné M_1 de K il passe trois de ces cordes (M_1M_2, M_1M_3, M_1M_4). Une tangente menée de D à cette courbe rencontre K en deux points B,C tels que le centre du cercle ABC appartient à v. Comme il y a trois tangentes issues de D, le lieu (O′) a trois points sur v; il est donc du troisième ordre.

Remarque. Le cercle ABC rencontre K en deux points autres que B et C; la courbe qui joint ces points enveloppe une parabole ayant A pour foyer.

Note. M. Barisien nous a adresé une *solution analytique* de la même question; il prend pour axes coordonnés AD et la perpendiculaire élevée en A sur AD. Nous regrettons que le défaut d'espace nous empêche de reproduire les élégants calculs de notre zélé collaborateur.

Pour trouver le lieu de O′, appelons b, c les milieux des côtés AB, AC. Le point b parcourt une parallèle à Ox; par suite la droite O′b enveloppe une parabole π_1 qui a pour foyer A. De même, la droite O′c enveloppe une parabole π_2 de foyer A. Les tangentes communes aux paraboles π_1, π_2 sont la droite de l'infini, les droites isotropes issues de A et la perpendiculaire élevée au milieu de la droite OA (les points B et C se réunissent en O lorsque la sécante menée par D est DO).

Les droites O′b et O′c se correspondent homographiquement sur les deux courbes π_1 et π_2. On en déduit que quatre points O′ tombent sur une droite quelconque v. En effet, appelons b_1 et c_1 les points où deux tangentes homologues des deux paraboles rencontrent v; il existe entre ces points une correspondance (2,2), car si l'on donne b_1, bb_1 est l'une des deux tangentes menées de b_1 à π_1 et chacune de ces tangentes détermine une tangente correspondante c_1c de π_2. Les quatre coïncidences de la correspondance (b_1,c_1) appartiennent au lieu (O′). Cependant la perpendiculaire élevée au milieu de la droite AO représente une partie du lieu; donc le lieu proprement dit est du troisième ordre.

Question 946.

(Voir *Mathesis*, (2) IV, p. 151).

La tangente en un point M *d'une courbe* Δ *coupe les axes rectangulaires* O*x*, O*y aux points* A, B. *Soit* N *le quatrième sommet du rectangle construit sur* OA, OB. *On demande : 1° l'enveloppe de la droite* MN *lorsque* Δ *est une ellipse dont les axes sont dirigés suivant* O*x*, O*y*; *2° quelle doit être la courbe* Δ *lorsque la droite* MN *passe par un point fixe* P. (Petit-Bois.)

Solution par MM. Cristesco, Petresco, Bastin *et* J. Jonesco. 1° Si $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ sont les coordonnées du point M, celles de N seront $\left(\frac{a}{\cos\varphi}, \frac{b}{\sin\varphi}\right)$, et l'équation de la droite MN sera

$$bx\cos^3\varphi - ay\sin^3\varphi = ab(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi). \qquad (1)$$

Pour avoir l'équation de l'enveloppe, il faut éliminer φ entre l'équation (1) et sa dérivée par rapport à φ :

$$bx\cos\varphi + ay\sin\varphi = \frac{4}{3}ab. \qquad (2)$$

Multipliant l'équation (2) par $\sin^2\varphi$ et ajoutant à (1), on trouve aisément

$$\frac{3x}{a} = 2\cos\varphi + \frac{1}{\cos\varphi}. \qquad (3)$$

De même, multipliant l'équation (2) par $\cos^2\varphi$ et soustrayant de (1), on trouve

$$\frac{3y}{b} = 2\sin\varphi + \frac{1}{\sin\varphi}. \qquad (4)$$

On a ainsi les *équations paramétriques* de l'enveloppe.

Elévant au carré les équations (3) et (4) et ajoutant membre à membre, on obtient

$$9\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = 12 + \frac{4}{\sin^2 2\varphi},$$

d'où

$$\frac{1}{\sin 2\varphi} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{9\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) - 12}. \qquad (5)$$

Si l'on multiplie membre à membre les équations (3) et (4), il vient

$$9\frac{xy}{ab} = 2\sin 2\varphi + \frac{6}{\sin 2\varphi}, \quad \text{ou} \quad 9\frac{xy}{ab}\times\frac{1}{\sin 2\varphi} = 2 + \frac{6}{\sin^2 2\varphi}.$$

Dans cette dernière équation, remplaçons $\frac{1}{\sin 2\varphi}$ par sa valeur donnée par (5), puis élevons au carré; l'équation de l'enveloppe de la droite MN sera

$$729(b^4x^4 + a^4y^4) - 27(b^2x^2 + a^2y^2)(27x^2y^2 + 64a^2b^2) + 2430a^2b^2x^2y^2 + 1024a^4b^4 = 0.$$

2° Soient $(2\alpha, 2\beta)$ les coordonnées du point P, et (x, y) celles de M. La tangente en M à la courbe Δ ayant pour équation

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

les coordonnées de N sont

$$X = x - \frac{ydx}{dy}, \quad Y = y - \frac{xdy}{dx},$$

et l'on a, pour l'équation de MN,

$$Y - y = \frac{x}{y}\frac{dy^2}{dx^2}(X - x).$$

En exprimant qu'elle est vérifiée par le point P, on trouve l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2\alpha x}} \pm \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 2\beta y}} = 0,$$

ou, en transportant l'origine des coordonnées au milieu $O'(\alpha, \beta)$ de la distance OP :

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}} \pm \frac{dy}{\sqrt{y^2 - \beta^2}} = 0. \tag{6}$$

On en tire, successivement,

$$l(x + \sqrt{x^2 - \alpha^2}) = l(y \mp \sqrt{y^2 - \beta^2}) + lC,$$

$$x + \sqrt{x^2 - \alpha^2} = C(y \mp \sqrt{y^2 - \beta^2}),$$

$$4C^2(\alpha^2y^2 + \beta^2x^2) - 4Cxy(\alpha^2 + C^2\beta^2) + (\alpha^2 - C^2\beta^2)^2 = 0,$$

$$(\alpha^2y - C\beta^2x)(Cy - x) + \frac{(\alpha^2 - C^2\beta^2)^2}{4C} = 0.$$

Les courbes cherchées sont donc des hyperboles ayant pour centre commun le milieu O′ de OP, et touchant les axes primitifs Ox, Oy; les asymptotes sont deux diamètres conjugués quelconques de l'hyperbole représentée par

$$\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1.$$

Si le point P coïncide avec O, l'équation (6) donne immédiatement les deux solutions

$$xy = C, \quad y = Cx.$$

×Question 959.

(Voir *Mathesis*, (2) IV, p. 175).

Etant donné un triangle rectangle ABC, ***on décrit deux circonférences passant par le sommet*** A ***de l'angle droit et ayant leurs centres l'une en*** B, ***l'autre en*** C. ***On demande de mener une tangente*** MT ***à la première et une tangente*** NT ***à la seconde de telle façon que ces droites soient rectangulaires et que la somme des segments*** TM ***et*** TN ***compris entre le point de concours*** T ***et les points de contact*** M, N ***soit égale à une longueur donnée*** l. — ***Discussion.***

Cette question a été résolue partiellement par MM. J. Jonesco, Barisien, Soons, Strymeersch, Déprez et Critesco; la discussion aurait pu être plus complète.

Les droites MB, NC se coupent en un point I de la circonférence décrite sur BC comme diamètre. On connaît la somme ou la différence des droites IB, IC, ce qui permet de construire le triangle rectangle IBC.

En effet, si le point I appartient à l'arc CA de la demi-circonférence BAC, soient M, M′ les extrémités du diamètre IB de la circonférence B, et N, N′ celles du diamètre IC de la circonférence C; M et M′ sont situés du même côté de I et nous supposons $MI > M'I$; I est situé entre N et N′ et nous supposons $IN > N'I$. Soient T, T′, T″, T‴ les points de concours des tangentes menées respectivement en M et N, M′ et N′, M et N′, M′ et N. On voit qu'à un même point I correspondent quatre valeurs de l, à savoir

$$TM + TN, \quad T'M' + T'N', \quad T''M + T''N', \quad T'''M' + T'''N;$$

ces valeurs sont égales aux sommes

$$IM + IN, \quad IM' + IN', \quad IM + IN', \quad IM' + IN.$$

Posons

$$BC = a, \quad AB = c, \quad AC = b, \quad IB = \gamma, \quad IC = \beta;$$

alors

$$IM = \gamma + c, \quad IM' = \gamma - c, \quad IN = b + \beta, \quad IN' = b - \beta,$$

et nous aurons suivant que l'on considère le point T, T', T'' ou T''' :

$$\beta+\gamma+b+c=l, \tag{1}$$
$$\gamma-\beta+b-c=l, \tag{2}$$
$$\gamma-\beta+c-b=l, \tag{3}$$
$$\gamma+\beta-c+b=l. \tag{4}$$

De même, si I appartient à l'arc BA, on trouve respectivement,

$$\beta+\gamma+b+c=l, \tag{5}$$
$$\beta-\gamma+c-b=l, \tag{6}$$
$$\beta-\gamma+b-c=l, \tag{7}$$
$$\beta+\gamma-b+c=l. \tag{8}$$

Le problème proposé revient donc à la résolution des systèmes d'équations

$$(9)\ \begin{cases}\beta^2+\gamma^2=a^2,\\ \beta+\gamma=s,\end{cases}\qquad (10)\ \begin{cases}\beta^2+\gamma^2=a^2,\\ \beta-\gamma=\pm d,\end{cases}$$

s et d ayant des valeurs connues.

Pour la discussion, il convient d'étudier la variation de l lorsque I parcourt la demi-circonférence CBA. La somme $\beta+\gamma$ croît d'abord de a à $a\sqrt{2}$, puis décroît de $a\sqrt{2}$ à a. Par suite, dans les équations (1) et (5) l peut varier entre un minimum $a+b+c$ et $a\sqrt{2}+b+c$. Pour toute valeur de l comprise entre ces limites le problème admet deux solutions ; les points correspondants I sont sur une droite parallèle à BC, et il faut prendre pour M et N les extrémités des diamètres IB, IC les plus éloignées de I.

Soit K le milieu de la demi-circonférence CAB. Dans l'équation (4), l varie, sur l'arc CK, entre $a-c+b$ et $a\sqrt{2}-c+b$, et sur l'arc KA entre $a\sqrt{2}-c+b$ et $2b$ (nous supposons $b>c$). Donc si l est compris entre $a\sqrt{2}-c+b$ et $2b$, nous avons pour I deux positions situées sur une droite parallèle à BC et passant entre K et A, mais si l est compris entre $2b$ et $a+b-c$, on a une seule position de I sur l'arc CK et CI < BA. C'est le point désigné par T''' qu'il faut prendre. D'après l'équation (8), le point T''' qui correspond à une certaine position de I sur l'arc BA résout le problème si l est compris entre $2c$ et $a+c-b$.

Lorsque I parcourt la demi-circonférence CAB, la différence $\beta-\gamma$ varie de a à 0, puis de 0 à $-a$. Donc l, dans l'équation (2) peut varier entre $a+b-c$ et $b-c$, et dans l'équation (7) entre $a+b-c$ et $2(b-c)$. D'ailleurs ces équations sont les mêmes sauf le changement de

β en γ et de γ en β. Par conséquent, si l est compris entre $2(b-c)$ et $a+b-c$, on trouve pour I deux positions situées sur une parallèle à BC; la première est sur l'arc CK et il faut prendre le point T', la seconde est sur l'arc BA et il faut prendre le point T''. Lorsque l est compris entre $b-c$ et $2(b-c)$, on a deux positions de I sur une corde parallèle à BC et comprises entre K et A; pour les deux on choisit le point T'.

Enfin, les équations (3) et (6) donnent lieu à des conclusions semblables.

NOTE. M. CRISTESCO suppose les circonférences B et C quelconques, et l'angle MTN égal à un angle donné α. L'intersection I des rayons BM, CN se trouve encore sur une circonférence déterminée, et on peut obtenir la somme ou la différence des droites $IB=\gamma$, $IC=\beta$. Car, si l'on mène Im parallèle à NT et rencontrant MT en m, et de même In parallèle à MT et terminée à NT en n, on trouve aisément

$$MT = Mm + In = (\gamma + b)\cot\alpha + (\beta + c)\operatorname{cosec}\alpha,$$
$$NT = Nn + Im = (\beta + c)\cot\alpha + (\gamma + b)\operatorname{cosec}\alpha,$$
$$MT + NT = (\beta + \gamma + b + c)(\cot\alpha + \operatorname{cosec}\alpha).$$

Pour tenir compte de toutes les dispositions possibles de la figure, il faut attribuer à certains termes de cette égalité le double signe $\pm$.

Question 1058.

(*Mathesis* (2), tome VI, p. 56).

Démontrer que les nombres qui, divisés par a, b, c . . laissent respectivement les restes a', b', c', ... sont de la forme $mt+n$, t désignant un nombre entier quelconque. Signification des nombres m et n.

(H. BROCARD.)

Solution par M. E. COLART. On devra avoir, x, y, z ... étant des nombres entiers,

$$N = ax + a' = by + b' = cz + c' = \cdots$$

L'équation $ax+a'=by+b'$ n'est possible, en nombres entiers, que si le p. g. c. d. de a et b divise aussi $b'-a'$. En divisant tous les termes par ce p. g. c. d., l'équation se réduit à

$$a_1x - b_1y = p_1,$$

dont toutes les solutions entières sont données par les formules

$$x = A + b_1t_1, \quad y = B + a_1t_1,$$

A et B étant une solution et t_1 étant un entier quelconque.

Par suite, pour les diviseurs a et b, on a la formule

$$N = aA + a' + ab_1t_1 = n_1 + m_1t_1,$$

dans laquelle m_1 est le moindre multiple de a et b.

Pour passer au diviseur suivant c, on résoudra l'équation

$$n_1 + m_1t_1 = cz + c' \quad \text{ou} \quad m_1t_1 - cz = c' - n_1.$$

En raisonnant comme précédemment, on trouvera que, si le problème est possible, les nombres qui, divisés par a, b, c, laissent pour restes a', b' et c' sont donnés par la formule

$$N = n + mt$$

dans laquelle n est l'un de ces nombres et m le moindre multiple de a, b, c. Et ainsi de suite.

Remarques. Si a, b, c, ... sont premiers entre eux deux à deux, le problème est toujours possible, et m est égal au produit de ces diviseurs.

Si a, b, c, ... ne sont pas premiers entre eux, on peut faire m égal à leur produit; mais alors la formule $N = n + mt$ ne donnera plus *toutes* les solutions (Voir Colart, *Compléments d'algèbre*, p. 40).

M. Stuyvaert fait remarquer que la question est résolue dans Dirichlet, *Vorlesung n über Zahlentheorie herausgegeben von* R. Dedekind, Braunschweig, 1879-1881, § 25.

QUESTIONS PROPOSÉES.

*1122. Résoudre ou construire un triangle sphérique, connaissant *a*) les trois hauteurs; *b*) les trois médianes; *c*) les rayons de trois cercles tritangents.

On demande une solution ou au moins l'examen de ces problèmes.

*1124. Effectuer le produit

$$(1+2)(3+4+5)(6+7+8+9)....$$

composé de n facteurs. (de Rocquigny.)

*1125. Si $xyz = abc = 1$, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{xy(z-c)}{z+c} & -y & 1 \\ 1 & \dfrac{yz(x-a)}{x+a} & -z \\ -z & 1 & \dfrac{zx(y-b)}{y+b} \end{vmatrix} = 0.$$

est nul. (A. C.)

1196. On donne deux axes rectangulaires. Un cercle de rayon donné coupe OX en A et A', OY en B et B'. Ce cercle se déplace de manière que la corde AB conserve la même longueur. On demande :

1° Le lieu du point de rencontre des droites AB et A'B'.

2° Le lieu du point de rencontre des droites AB' et A'B.

3° Le lieu du centre de ce cercle. (E. ROMIEUX.)

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1197. Géométrie dirigée. *Les angles dans un plan orienté avec des droites dirigées ou non dirigées*, à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires, par G. FONTENÉ. Agrégé de l'Université, Professeur au collège Rollin. Paris, Nony et C^ie^, 1897 (82 p. in-8°), Prix : 2 francs.

« On ne saurait croire combien les questions de signes deviennent délicates dans la géométrie livrée à elle même (G. KOENIGS) » L'opuscule de M. Fontené sera un excellent guide pour ceux qui veulent approfondir les conventions relatives aux signes des segments, des angles, des aires, des volumes, etc. Des exemples, bien choisis, accompagnent la théorie, et des figures nombreuses servent à éclairer les notions fondamentales.

QUESTIONS D'EXAMENS.

800. Soient AA', BB' deux diamètres rectangulaires d'une circonférence de centre O. Mener par A une corde AD qui rencontre BB' en un point C tel que l'on ait : 1° CO = CD ; 2° DC = DA' (*J. de* VUIBERT).

1° Les angles DOA', ODA' sont égaux comme compléments d'angles égaux ; donc OA' = A'D = OD. 2° L'angle DOA' = DCA' = 45°.

Si la corde AD doit satisfaire à l'une des égalités CO = m.CD, DC = m.DA', on peut prendre pour inconnue l'angle DAA' = x ; on obtient les équations

$$\sin x = m \cos 2x, \quad 2\cos x - \frac{1}{\cos x} = 2m \sin x$$

ou

$$\sin x = m(1 - 2\sin^2 x), \quad \cos 2x = m \sin 2x.$$

801. Si un cercle concentrique avec le cercle inscrit (circonscrit) à un triangle ABC coupe les côtés BC, CA, AB aux points D et D', E et E', F et F', les triangles DEF, D'E'F' sont égaux (équivalents).

Cette proposition qui n'est pas nouvelle, nous a été communiquée par M. DE GUELDRE (Liége).

École polytechnique de Paris. Composition de Mathématiques (10 juin 1897).

On donne dans un système d'axes rectangulaires $Oxyz$: la droite AB qui a pour équation $x = a$, $y = z$; le point C, qui a pour coordonnées $x = 0$, $y = 0$, $z = a$. On considère l'hyperboloïde (H) engendré par la rotation de AB autour de Oz, puis la sphère (S) qui a pour centre C et qui est tangente à AB.

I. Trouver les équations des surfaces (H) et (S).

II. Déterminer leur courbe commune et calculer (*) le rapport de la plus grande à la plus petite des surfaces que cette courbe découpe sur la sphère (Il suffira de donner le résultat avec deux décimales).

III. Autour d'un point P de Oz dont la cote est $z = h$, pivote une décante qui perce l'hyperboloïde (H) en un point H et la sphère (S) en un point S. On demande : d'étudier le lieu de l'intersection M des diamètres OH et CS; de discuter les coefficients angulaires de ses directions asymptotiques, quand le point P l'axe décrit Oz.

Concours général des Lycées de France (1897).

Géométrie. Soit $oabc$ un tétraèdre T trirectangle de sommet o, dont les arêtes oa, ob, oc ont la même longueur l. Soit d le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre. On suppose que T se déplace par rapport à un trièdre trirectangle fixe $oxyz$ de manière que a, b, c, d décrivent respectivement les plans

$$Y + Z = 0, \quad Z + X = 0, \quad X + Y = 0, \quad X + Y + Z + \tfrac{1}{2}l = 0.$$

1° Les points symétriques de a, b, c, d par rapport aux arêtes oa, ob, oc du tétraèdre T décrivent également des plans;

2° Trouver l'équation de la surface S décrite par le sommet o de T. Cette surface est du 4e ordre; elle a un point triple et trois droites doubles;

3° Par chaque point α d'une droite double passent deux droites δ et δ' qui rencontrent la surface S en quatre points confondus. Chercher pour quelles positions du point α sur cette droite double les droites δ et δ' coïncident;

4° Montrer que tout plan tangent à la surface S coupe cette surface suivant deux coniques et que ces deux coniques se confondent pour quatre positions particulières du plan tangent.

Analyse. Soit $\varphi(x)$ une fonction de la variable réelle x, continue pour toute valeur de cette variable. On suppose que la valeur absolue de $\varphi'(x)$ est, pour toute valeur de x, moindre qu'un nombre k inférieur à 1.

1° Montrer que l'équation $x - \varphi(x) = 0$ a une et une seule racine réelle a.

2° On forme la suite

$$x_1 = \varphi(x_0), \quad x_2 = \varphi(x_1) \ldots, \quad x_n = \varphi(x_{n-1}).$$

x_0 étant une quantité réelle arbitrairement choisie, montrer que x_n tend vers a lorsque n devient infini.

(*) Les calculs seront faits sur la feuille.

SUR QUELQUES FORMULES

qui représentent par approximation l'arc dont on connait le sinus et le cosinus.

Par M. le Professeur E. LAMPE (Berlin).

(*Suite ;* voir *Mathesis*, 129-134).

II.

Déterminer $n-1$ *nombres* $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ *et deux nombres* b_0, b_1 *tels qu'on ait*

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots + a_{n-1} \sin (n-1)x + \sin nx = x(b_0 + b_1 \cos x),$$

avec une erreur qui ne porte que sur la plus haute puissance possible de x.

Développons tous les sinus et les cosinus en séries et égalons les coefficients des puissances de x qui ont les mêmes exposants ; ce procédé fournira les $n+1$ équations linéaires pour les $n+1$ coefficients inconnus :

$$(1)\quad \begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} + n = b_0 + b_1, \\ a_1 + 2^3a_2 + 3^3a_3 + \cdots + (n-1)^3a_{n-1} + n^3 = 3b_1, \\ a_1 + 2^5a_2 + 3^5a_3 + \cdots + (n-1)^5a_{n-1} + n^5 = 5b_1, \\ a_1 + 2^7a_2 + 3^7a_3 + \cdots + (n-1)^7a_{n-1} + n^7 = 7b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1 + 2^{2n+1}a_2 + 3^{2n+1}a_3 + \cdots + (n-1)^{2n+1}a_{n-1} + n^{2n+1} = (2n+1)b_1. \end{cases}$$

En retranchant chacune de ces équations, à l'exception de la première, de celle qui la suit, on en tire cet autre système :

$$(2)\quad \begin{cases} 3.2^3a_2 + 8.3^3a_3 + \cdots + (\overline{n-1}^2 - 1)(n-1)^3a_{n-1} + (n^2-1)n^3 = 2b_1, \\ 3.2^5a_2 + 8.3^5a_3 + \cdots + (\overline{n-1}^2 - 1)(n-1)^5a_{n-1} + (n^2-1)n^5 = 2b_1, \\ 3.2^7a_2 + 8.3^7a_3 + \cdots + (\overline{n-1}^2 - 1)(n-1)^5a_{n-1} + (n^2-1)n^5 = 2b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 3.2^{2n-1}a_2 + 8.3^{2n-1}a_3 + \cdots + (\overline{n-1}^2 - 1)(n-1)^{2n-1}a_{n-1} + (n^2-1)n^{2n-1} = 2b_1. \end{cases}$$

Le même procédé de soustraction, appliqué au système (2) fournit enfin :

$$(3)\quad \begin{cases} 3^2 2^3 a_2 + 8^2 3^5 a_3 + \cdots + (\overline{n-1}^2 - 1)^2 (n-1)^3 a_{n-1} + (n^2-1)n^3 = 0, \\ 3^2 2^5 a_2 + 8^2 3^5 a_3 + \cdots + (\overline{n-1}^2 - 1)(n-1)^5 a_{n-1} + (n^2-1)n^5 = 0, \\ 3^2 2^7 a_2 + 8^2 3^5 a_3 + \cdots + (\overline{n-1}^2 - 1)(n-1)^7 a_{n-1} + (n^2-1)n^7 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 3^2 2^{2n-3} a_2 + 8^2 3^{2n-3} a_3 + \cdots + (\overline{n-1}^2 - 1)(n-1)^{2n-3} a_{n-1} + (n^2-1)n^{2n-3} = 0. \end{cases}$$

En se servant de la même méthode de résolution que dans la question I, on voit aisément que, pour $k > 1$, l'on a

$$a_k = \frac{-n^2(n^2-1)^2}{k^2(k^2-1)} \cdot \frac{P'}{P''},$$

relation où l'on a posé :

$$P' = (n^2-\overline{n-1}^2)(n^2-\overline{n-2}^2)\cdots(n^2-\overline{k+1}^2)(n^2-\overline{k-1}^2)\cdots(n^2-3^2)(n^2-2^2$$
$$P'' = (k^2-\overline{n-1}^2)(k^2-\overline{n-2}^2)\cdot\cdot(k^2-\overline{k+1}^2)(k^2-\overline{k-1}^2)\cdot\cdot(k^2-3^2)(k^2-2^2,$$

On a donc aussi :

$$\begin{aligned} P' &= (2n-1)(2n-2)\cdots(n+k+1)(n+k-1)\cdots(n+3)(n+2) \\ &\quad \times 1 \cdot 2 \cdots(n-k-1)(n-k+1)\cdots(n-3)(n-2) \\ &= \frac{(2n-1)!}{(n-k)(n-1)n(n+1)(n+k)}, \end{aligned}$$

et semblablement :

$$\begin{aligned} P'' &= (k+n-1)(k+n-2)\cdots(2k+1)(2k-1)\cdots(k+3)(k+2) \\ &\quad \times (k-n+1)(k-n+2)\cdots(-1) \cdot 1 \cdot (k-3)(k-2) \\ &= (-1)^{n-k-1}\frac{(n-k-1)!\,(n+k-1)!}{(k-1)\,k\,(k+1)\cdot 2k}. \end{aligned}$$

Substituons ces valeurs de P′ et P″ dans l'expression pour a_k, il en résultera :

$$\begin{aligned} a_k &= (-1)^{n-k}\frac{2n^2(n^2-1)(2n-1)!}{(n-k)(n+k)(n-k+1)!\,(n-k-1)!\,k\,(k^2-1)} \\ &= (-1)^{n-k}\frac{n(n^2-1)(2n)!}{k(k^2-1)(n+k)!\,(n-k)!} \\ &= (-1)^{n-k}\cdot\frac{n(n^2-1)}{k(k^2-1)}\cdot\left(\frac{2n}{n-k}\right). \end{aligned}$$

Après avoir ainsi trouvé $a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}$, on tire b_1 d'une équation quelconque du système (2), a_1 d'une des n dernières équations de (1), enfin b_0 de la première de ces équations. Je ne m'arrêterai pas à simplifier les expressions générales qu'on obtient pour a_1, b_0, b_1, et je me hâte de donner les résultats pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$\frac{3\sin x}{2+\cos x} = x - \frac{1}{180}x^3\cdots,$$

$$\frac{28\sin x + \sin 2x}{6(3+2\cos x)} = x - \frac{1}{2100}x^7\cdots,$$

$$\frac{375\sin x + 24\sin 2x - \sin 3x}{60(4+3\cos x)} = x - \frac{1}{17\,640}x^9\cdots,$$

$$\frac{3276\sin x + 280\sin 2x - 20\sin 3x + \sin 4x}{420(5+4\cos x)} = x - \frac{1}{124\,740}x^{11}\cdots,$$

$$\frac{23\,520\sin x + 2400\sin 2x - 225\sin 3x + 20\sin 4x - \sin 5x}{2520(6+5\cos x)} = x - \frac{1}{672\,672}x^{13}\cdots.$$

En transformant de nouveau les sinus des multiples de x en produits de $\sin x$ et de puissances de $\cos x$, on parvient aux formules B.

B.

(1) $$\frac{3\sin x}{2+\cos x} = x - \frac{1}{180}x^5\cdots,$$

(2) $$\frac{\sin x(14+\cos x)}{3(3+2\cos x)} = x - \frac{1}{2100}x^7\cdots,$$

(3) $$\frac{\sin x(94+12\cos x - \cos^2 x)}{15(4+3\cos x)} = x - \frac{1}{17\,640}x^9\cdots,$$

(4) $$\frac{\sin x(824+139\cos x - 20\cos^2 x + 2\cos^3 x)}{105(5+4\cos x)} = x - \frac{1}{124\,740}x^{11}\cdots,$$

(5) $$\frac{\sin x(2968+590\cos x - 111\cos^2 x + 20\cos^3 x - 2\cos^4 x)}{315(6+5\cos x)} = x - \frac{1}{672\,672}x^{13}\cdots.$$

(6) $$\frac{150\,480\sin x + 17\,325\sin 2x - 1925\sin 3x + 231\sin 4x - 21\sin 5x + \sin 6x}{13\,860(7+6\cos x)}$$

$$= \frac{\sin x(38\,096+8433\cos x - 1862\cos^2 x + 454\cos^3 x - 84\cos^4 x + 8\cos^5 x)}{3465(7+6\cos x)} = x - \frac{1}{4\,144\,140}x^{15}\cdots.$$

En faisant $\sin x = 0{,}6$ et $\cos x = 0{,}8$, on obtiendra

$x = 0{,}64\,3504\,110\,852$, erreur : $0{,}000\,000\,000\,27$ ou $0'',000\,056\,5$.

Pour $\sin x' = 0{,}8$ et $\cos x = 0{,}6$, il viendra

$x' = 0{,}927\,295\,155$, erreur : $0{,}000\,000\,063$ ou $0'',013$.

Extension de la même méthode au cas de x^2. En posant :

$$b_1(1-\cos x)+b_2(1-\cos 2x)+\cdots+b_n(1-\cos nx)=x^2,$$

on trouvera par un calcul analogue à celui du numéro I :

$$b_k=(-1)^{k-1}\frac{4}{k^2}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)},$$

ou bien

$$\frac{4n}{n+1}\left\{\frac{1-\cos x}{1^2}-\frac{n-1}{n+2}\frac{1-\cos 2x}{2^2}+\frac{(n-1)(n-2)}{(n+2)(n+3)}\frac{1-\cos 3x}{3^2}-\cdots\right\}$$
$$=x^2+c.x^{2n+2}.$$

Et, si n tend vers l'infini,

$$\frac{1-\cos x}{1^2}-\frac{1-\cos x}{2^2}+\frac{1-\cos 3x}{3^2}-\cdots=\frac{x^2}{4}.$$

Pour $x=\frac{\pi}{2}$ cette série se change en celle-ci :

$$\frac{1}{1^2}-\frac{2}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{0}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{2}{6^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{0}{8^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{16}.$$

Faisons

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=S,$$

on aura

$$2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots\right)=\frac{1}{2}S;$$

par conséquent,

$$\frac{1}{2}S=\frac{\pi^2}{16},\quad S=\frac{\pi^2}{8}.$$

(*A suivre*).

SUR LE CENTRE DES TRANSVERSALES ANGULAIRES ÉGALES;

par M. Déprez, professeur à l'Athénée de Charleroi.

M. Georges Brocard a signalé (*Mathesis*, 1896, p. 217) une propriété remarquable des foyers F, F′ de l'ellipse ε circonscrite à un triangle ABC et ayant son centre au centre de gravité G : *Les droites* AF′, BF, CF *rencontrent* BC, CA, AB *en trois points* A′, B′, C′, *tels que les droites* AA′, BB′, CC′ *ont une même longueur l, racine de l'équation*

$$l^4-2S\operatorname{cotg}\omega\,.\,l^2+3S^2=0,$$

et les droites AF′, BF′, CF′ *jouissent d'une propriété analogue.*

Voici quelques remarques sur la même figure :

1. Portons sur les hauteurs AH, BH, CH les longueurs

$$A_1A = AA_2 = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad B_1B = BB_2 = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad C_1C = CC_2 = \frac{c}{\sqrt{3}};$$

les points A_1, B_1, C_1 sont sur une circonférence de centre G, et les points A_2, B_2 C_2 sur une seconde circonférence de centre G.

Car

$$GA_1 = GB_1 = GC_1 = \alpha + \beta, \quad GA_2 = GB_2 = GC_2 = \alpha - \beta,$$

α et β étant les demi-axes de l'ellipse ε.

2. Soient A_3 et A_4, B_3 et B_4, C_3 et C_4 les points où les bissectrices de l'angle A_1GA_2 rencontrent les hauteurs AH, BH, CH; on a

$$\frac{AA_3}{a} = \frac{BB_3}{b} = \frac{CC_3}{c} = \frac{\cot\omega - \sqrt{\cot^2\omega - 3}}{3},$$

$$\frac{AA_4}{a} = \frac{BB_4}{b} = \frac{CC_4}{c} = \frac{\cot\omega + \sqrt{\cot^2\omega - 3}}{3}.$$

3. Les axes de l'ellipse ε sont dirigés suivant les droites GA_3, GA_4: les foyers sont situés sur GA_3, et l'on a

$$GF = GF' = \sqrt{GA_1 \cdot GA_2}.$$

4. Lorsque le triangle ABC se déplace dans l'ellipse, de manière que G en reste le centre de gravité, les extrémités A', B', C', A'', B'', C'' des transversales angulaires égales décrivent une conchoïde de ε.

5. Soit x le côté du triangle équilatéral, projection ou contreprojection du triangle ABC. On a

$$x^2 = \frac{45}{3}(\cot\omega \mp \sqrt{\cot^2\omega - 3}), \quad l = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

6. On a

$$AF + BF + CF = 3\alpha, \quad \overline{AF}^2 + \overline{BF}^2 + \overline{CF}^2 = \frac{3}{2}(3\alpha^2 - \beta^2),$$

$$AF \cdot BF + BF \cdot CF + CF \cdot AF = \frac{3}{4}(3\alpha^2 + \beta^2), \quad \frac{OK}{R} = \frac{\overline{GF}^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

×NOTES DE GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE.

1. *Sur une application du théorème de Simson-Stewart.* 1° *En géométrie euclidienne.* Considérons un triangle ABC, où l'on a mené du sommet A une droite AD rencontrant le côté AB en D, D étant situé entre B et C. On a, d'après le théorème de Simson-Stewart,

$$\overline{AB}^2 . DC + \overline{AC}^2 . BD = \overline{AD}^2 . BC + DC . BD . BC. \qquad (1)$$

Soit maintenant PA une perpendiculaire commune aux droites AB, AC; je dis qu'elle sera aussi perpendiculaire à AD. En effet, joignons PB, PC, PD. D'après le théorème de Simson-Stewart, on a

$$\overline{PB}^2 . DC + \overline{PC}^2 . BD = \overline{PD}^2 . BC + DC . DB . BC. \qquad (2)$$

Retranchons la relation (1) de (2); il viendra

$$\overline{PA}^2 (DC + BD) = (\overline{PD}^2 - \overline{AD}^2) BC,$$

ou, en divisant par $BC = DC + BD$,

$$\overline{PA}^2 = \overline{PD}^2 - \overline{AD}^2,$$

ce qui prouve le théorème.

2° *Géométrie non euclidienne.* Cette démonstration *compliquée* peut s'étendre aisément à la géométrie non euclidienne de Riemann et de Lobatchefsky. Pour fixer les idées, ne considérons que la première qui est caractérisée par la relation

$$\cos m = \cos n \cos p + \sin n \sin p \cos (n,p) \qquad (3)$$

entre les côtés m,n,p d'un triangle et l'angle (n,p) compris entre deux d'entre eux.

De la formule (3), on déduit d'abord le théorème suivant(*) pour un triangle ABC, où l'on a mené du sommet A, une droite AD, D étant situé sur BC entre B et C :

$$\cos AD \sin BC = \cos AB \sin DC + \cos AC \sin BD. \qquad (4)$$

En effet, on a dans les triangles ABD, ADC,

$$\cos AB = \cos AD \cos BD + \sin AD \sin BD \cos ADB$$
$$\cos AC = \cos AD \cos DC - \sin AD \sin DC \cos ADB.$$

En éliminant cos ADB, entre ces égalités, on trouve la relation (4).

(*) C'est le théorème analogue à celui de Simson-Stewart en géométrie euclidienne plane.

Soit maintenant PA une perpendiculaire commune aux droites AB, AC; je dis qu'elle sera aussi perpendiculaire à AD, c'est-à-dire à toute droite passant par son pied dans le plan BAC. En effet, joignons PB. PC, PD. Le triangle PBC donnera une relation analogue à (4), savoir :

$$\cos PD \sin BC = \cos PB \sin DC + \cos PC \sin DB.$$

Retranchons de cette relation, la relation (4) multipliée par cos AP, en nous rappelant que dans les triangles rectangles PAB, PAC, on a

$$\cos PB = \cos AP \cos AB, \quad \cos PC = \cos AP \cos AC;$$

il viendra, après division par sin BC,

$$\cos PD = \cos AP \cos AD;$$

donc PA est perpendiculaire à AD.

2. ***Propriété de la somme de deux angles en géométrie non euclidienne*** (*).

Considérons un triangle riemannien ABC, divisé en deux parties par la droite AD, D étant situé entre B et C.

Posons, pour abréger les écritures,

$$\cos BC = a, \quad \sin BC = a', \quad \cos AD = m, \quad \sin AD = m',$$
$$\cos CA = b, \quad \sin CA = b', \quad \cos BD = n, \quad \sin BD = n',$$
$$\cos AB = c, \quad \sin AB = c', \quad \cos CD = p, \quad \sin CD = p'.$$

On a donc

$$a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2 = m^2 + m'^2 = n^2 + n'^2 = p^2 + p'^2 = 1$$
$$a = np - n'p', \quad a' = np' + n'p.$$

D'après le théorème de Simson-Stewart,

$$a'm = bn' + cp'$$

et d'après les définitions analytiques des angles des triangles, ou plutôt d'après les formules fondamentales de la trigonométrie riemannienne qui en sont une conséquence,

$$\cos A = \frac{a - bc}{b'c'}, \quad \cos BAD = \frac{n - cm}{c'm'}, \quad \cos DAC = \frac{p - bm}{b'm'},$$

$$\sin BAD = \sin D. \frac{n'}{c'}, \quad \sin DAC = \sin D. \frac{p'}{b'},$$

$$\sin BAD = \sin B \cdot \frac{n'}{m'} = \sin A \cdot \frac{b'}{a'} \frac{n'}{m'}, \quad \sin DAC = \sin C \cdot \frac{p'}{m'} = \sin A \cdot \frac{c'}{a'} \frac{p'}{m'}.$$

(*) Nous démontrons cette propriété pour répondre à une objection que l'on peut faire à la définition analytique des angles d'un triangle. Au fond, la démonstration est inutile, parce que la trigonométrie riemannienne plane est identique à la trigonométrie sphérique euclidienne.

De même,

$$\cos \mathrm{BDA} = \frac{c - mn}{m'n'} = -\cos \mathrm{ADC} = -\frac{b - mp}{m'p'}.$$

Cela posé, calculons les deux quantités suivantes :

$$\mathrm{X} = \cos \mathrm{BAD} \cos \mathrm{DAC} - \sin \mathrm{BAD} \sin \mathrm{DAC},$$
$$\mathrm{Y} = \sin \mathrm{BAD} \cos \mathrm{DAC} + \sin \mathrm{DAC} \cos \mathrm{BAD}.$$

On trouve successivement :

$$\mathrm{X} = \frac{n - cm}{c'm'} \cdot \frac{p - bm}{b'm'} - \frac{n'}{c'} \sin \mathrm{D} \cdot \frac{p'}{b'} \sin \mathrm{D}$$

$$= \frac{np + bcm^2 - m(bn + cp)}{b'c'm'^2} - \frac{n'p'}{b'c'} (1 + \cos \mathrm{BAD} \cos \mathrm{ADC})$$

$$= \frac{np + bcm^2 - m(bn + cp)}{b'c'm'^2} - \frac{n'p'}{b'c'} \left(1 + \frac{c - mn}{m'n'} \cdot \frac{b - mp}{m'p'}\right)$$

$$= \frac{np + bcm^2 - m(bn + cp) - m'^2 n'p' - bc - m^2np + m(bn + cp)}{b'c'm'^2}$$

$$= \frac{np(1 - m^2) - bc(1 - m^2) - m'^2 n'p'}{b'c'm'^2} = \frac{np - n'p' - bc}{b'c'}$$

$$= \frac{a - bc}{b'c'} = \cos \mathrm{A}.$$

$$\mathrm{Y} = \sin \mathrm{A} \frac{b'n'}{a'm'} \frac{p - bm}{b'm'} + \sin \mathrm{A} \frac{c'p'}{a'm'} \frac{n - cm}{c'm'}$$

$$= \frac{\sin \mathrm{A}}{a'm'^2} [n'p + p'n - m(bn' + cp')] = \frac{\sin \mathrm{A}}{a'm'^2} (a' - m.ma') = \sin \mathrm{A}.$$

On peut faire une démonstration analogue en géométrie lobatchefstienne. Les angles définis analytiquement jouissent donc de la même propriété que les angles définis géométriquement.

3. *Sur la somme des angles dans un triangle non euclidien.* Dans le tome XII de *The Collected Mathematical Papers* of CAYLEY (Cambridge, 1897) se trouve pp. 220-238, sous le n° 827, un travail intitulé : *On the non-Euclidian Geometry* (extrait des *Proc. Royal Soc.*, 1884, t. XXXVII, pp. 82-102), dans la première partie duquel le grand géomètre refait, sous une autre forme, le Mémoire de Lobatchefsky sur la *Géométrie imaginaire* (*Crelle*, 1837, XVII, 297-320), dans sa partie essentielle.

Dans les n^os^ 6 et 7 de cet écrit de Cayley on trouve, relativement à la somme des angles d'un triangle non euclidien, une démonstration

beaucoup plus simple que celle de Lobatchefsky laquelle s'appuie sur des formules assez compliquées (les formules (5) et (5′) de notre article sur la géométrie non euclidienne). Voici, en substance, la démonstration de Cayley.

Dans un triangle riemannien ABC, rectangle en A, on a, entre l'hypoténuse a et les angles adjacents, la relation

$$\operatorname{tang} B \operatorname{tang} C = \frac{1}{\cos a}.$$

Si l'un des angles B ou C a une tangente négative, cet angle surpasse un droit et $A+B+C$ surpasse deux droits. Dans le cas contraire, on a évidemment

$$\operatorname{tang} B \operatorname{tang} C > 1, \quad \operatorname{tang} B > \cot C = \operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}\pi - C);$$

par suite, B surpasse $\frac{1}{2}\pi - C$; $B+C$ surpasse un droit, et $A+B+C$ surpasse deux droits.

Dans un triangle rectangle lobatchefskien, où Ch a est toujours positif et > 1, on a

$$0 < \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C = \frac{1}{\operatorname{Ch} a} < 1, \quad \operatorname{tang} B < \operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}\pi - C)$$

$$B < \tfrac{1}{2}\pi - C, \quad A+B+C < \pi.$$

Un triangle quelconque, pouvant être décomposé en deux triangles rectangles, la somme de ses angles est aussi supérieure à deux droits, s'il est riemannien ; inférieure à deux droits, s'il est lobatchefskien.

(P. M.).

EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE D'UN NOMBRE ENTIER,

par M. Stuyvaert, professeur à l'Athénée de Gand.

Le mode de raisonnement proposé pour le cas général de la division des nombres entiers (voir *Mathesis* (2), VI, p. 21) peut être appliqué à la théorie de l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier.

Dans un exposé complet, il faut tôt ou tard donner la définition et le théorème relatifs à la *racine approchée*. Or il suffit, pour simplifier la théorie, de généraliser la définition et de faire passer le théorème en question avant le problème de l'extraction de la racine carrée. Voici, en abrégé, la marche à suivre :

1° On appelle *racine carrée d'un nombre* A *à moins de* $\frac{m}{n}$ *par défaut*,

le plus grand multiple de $\frac{m}{n}$ dont le carré est inférieur à A. Si $r \times \frac{m}{n}$ est ce nombre, $(r+1) \times \frac{m}{n}$ est la *racine carrée de* A *à moins de* $\frac{m}{n}$ *par excès*.

Il ne faut pas se dissimuler l'inconvénient de cette définition : ordinairement, elle est abandonnée dans la suite, au chapitre des approximations numériques; là, en effet, on regarde par exemple 1'3 comme la valeur approchée de $\sqrt{2}$ à moins de 0'2, bien que 1'3 ne soit pas multiple de 0'2. Nous passerons outre pour l'instant, nous contentant de signaler la difficulté : c'est surtout au moment où l'on traite des approximations numériques qu'il importe de la résoudre.

2° Théorème. La racine d'un nombre A à moins de $\frac{m}{n}$ par défaut est égale à $\frac{m}{n}$ fois la racine, à une unité près par défaut, de la partie entière de A $\frac{n^2}{m^2}$.

En effet, soient E la partie entière de A $\frac{n^2}{m^2}$, et r la racine de E à une unité près, par défaut, nous aurons :

$$E \leq A\frac{n^2}{m^2} < E+1, \quad r^2 \leq E \leq (r+1)^2 - 1.$$

De là nous déduisons, après addition et suppression du terme commun E :

$$r^2 \leq A\frac{n^2}{m^2} < (r+1)^2, \quad \text{puis} \quad \left(r \times \frac{m}{n}\right)^2 \leq A < \left[(r+1) \times \frac{m}{n}\right]^2.$$

Le signe d'égalité est d'ailleurs exclu si A n'est pas carré parfait, et le théorème est démontré.

3° Soit à présent à chercher le nombre des dizaines d de la racine de 4596.

D'après la définition donnée plus haut, $10d$ est la racine de 4596 à moins de 10 unités près, et, en vertu du théorème, d est donc la racine à une unité près de la partie entière de $\frac{4596}{100}$ ou de 45.

La suite de la théorie se fait à la manière habituelle.

NOTE MATHÉMATIQUE.

25. ***Une démonstration du théorème de Wilson.*** Considérons les n sommets d'un polygone régulier convexe, n étant un nombre premier, et numérotons ces sommets $1, 2, 3, \ldots n$. Si on les joint de 2 en 2, de 3 en 3, etc., on formera, outre le polygone régulier $123 \ldots n$, les $(n-2)$ polygones $1357 \ldots$, $147 \ldots$ etc. Les $(n-1)$ polygones réguliers formés sont deux à deux identiques d'ailleurs, puisque joindre les sommets de 3 en 3, par exemple, ou de $n-3$ en $n-3$, c'est la même chose. Le nombre de ces polygones réguliers distincts sera donc $\frac{1}{2}(n-1)$.

Si l'on joint d'une autre manière les n sommets, par exemple, dans l'ordre $13245 \ldots$, on formera un autre polygone; on peut faire tourner ce polygone de manière que ses sommets viennent se placer en $24356 \ldots$, puis en $35467 \ldots$ et enfin en $n2134 \ldots$. On aura ainsi formé n polygones égaux non réguliers. De tout polygone non régulier, on peut déduire de même $(n-1)$ autres polygones égaux placés autrement. Si l'on forme tous les polygones irréguliers possibles de cette manière, il y en aura donc un nombre multiple de n; mais évidemment, comme dans le cas des polygones réguliers, ils seront deux à deux identiques, deux permutations inverses des nombres $23 \ldots n$ ne donnant qu'un seul polygone.

Le nombre total des polygones réguliers et irréguliers, directs et inverses, est évidemment $1.2 \ldots (n-1)$, nombre de permutations des $(n-1)$ sommets $23 \ldots n$ que l'on peut successivement associer au sommet 1; le nombre total des polygones distincts est $\frac{1}{2} \cdot 1.2 \ldots (n-1)$; celui des polygones irréguliers distincts est

$$\frac{1}{2} \cdot 1.2 \ldots (n-1) - \frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{2}[1.2 \ldots (n-1) + 1 - n].$$

Ce nombre étant divisible par n, on a

$$1.2.3 \ldots (n-1) + 1 = \text{Multiple de } n.$$

(D'après CAYLEY, *Math.*, *Pap*, 1897, t. XII, n° 807, ou *Messenger of Mathematics*, 1883, XII, p. 41).

NOTE. Peut-on démontrer de même le théorème de Wilson généralisé, dans le cas de n composé?

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

*Question 333.

(Voir *Mathesis*, (1), IV, p. 119 et (2), I, p. 29).

On peut décomposer un polygone de

$$m = (p-2)n + 2$$

côtés en n polygones de p côtés de

$$\frac{(np-n)(np-n-1)\cdots(np-2n+2)}{1.2.3\cdots n}$$

manières différentes. (H. M. Taylor et R. C. Rowe).

Solution par M. Stuyvaert (Gand). Soit le polygone M décomposé d'une manière quelconque en n polygones $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ de p côtés.

Appelons *polygone latéral* un polygone partiel P_i limité par $p-1$ côtés et *une seule* diagonale de M; nous dirons que celle-ci *sous-tend* la ligne brisée P_i de $p-1$ côtés.

Quelle que soit la manière dont on décompose M, il y a au moins deux polygones latéraux, car si $P_1, P_2, \cdots$ avaient chacun au plus $p-2$ côtés de M, le nombre total des côtés de M ne pourrait dépasser $n(p-2)$, et il le dépasse de 2(*).

Tâchons de trouver, pour les modes de décomposition de M, une représentation simple, qui se prête à l'énumération.

Désignons, par $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_m$, tous les sommets successifs que l'on rencontre en faisant le tour du polygone M dans un *sens convenu*; par exemple celui des aiguilles d'une montre. Appelons *point de départ* d'un polygone latéral le sommet d'où il faut partir pour décrire, *dans le sens adopté*, *toute* la ligne brisée sous-tendue par la diagonale. Ainsi dans un octogone, le quadrilatère latéral $S_1S_7S_7S_8$ a pour point de départ S_7.

Formons à présent les combinaisons à répétition des m sommets $n-1$ à $n-1$. Une de ces combinaisons représente, sans ambiguïté,

---

(*) Supposons le polygone de m côtés divisé en n polygones de p côtés. Le nombre total des côtés de ces n polygones sera np, les côtés communs à deux de ces polygones étant comptés deux fois. Ce nombre total sera encore égal à m, nombre des côtés du polygone primitif, plus le double du nombre des côtés communs à deux des polygones de n côtés, lequel nombre est évidemment $n-1$. Donc

$$m + 2(n-1) = np, \text{ ou } m = (p-2)n + 2.$$

un certain mode de décomposition de M, grâce aux conventions qui vont suivre.

Soit $S_a S_b S_c \cdots S_g$ une de ces combinaisons ; quelques-uns des indices peuvent être égaux (ou même tous), et ceux qui sont inégaux sont rangé par ordre croissant. Parmi les intervalles entre sommets différents, comme de S_a à S_b, de S_b à S_c, etc., il y en a au moins un qui renferme $p-2$ sommets de M, ou plus, car sinon le nombre total des sommets de M ne pourrait dépasser

$$n-1+(n-1)(p-3) \text{ ou } (n-1)(p-2),$$

et il le dépasse. Soit donc S_b à S_c un intervalle pareil ; prenons S_b pour point de départ d'une ligne brisée de $p-1$ côtés et menons la diagonale qui la sous-tend ; s'il existe q intervalles semblables, chacun donne lieu à la même opération. Effaçons ensuite, 1° dans la combinaison donnée, les points de départ, 2° dans le polygone M, les lignes brisées correspondantes ; grâce à l'étendue des intervalles, on ne supprime par cette seconde opération aucun des sommets contenus dans la combinaison. Il reste alors une combinaison de $n-q-1$ lettres qui sont sommets d'un polygone à diviser en nq polygones partiels. On recommence l'opération qui a été faite sur M et sur la combinaison primitive, et l'on finit par épuiser toutes les lettres de celle-ci et par ne laisser de M qu'un seul polygone partiel P_i.

Il est plus aisé de concevoir ce procédé que de l'exposer brièvement ; en l'appliquant à quelques exemples, on en saisira promptement le mécanisme. Or il est bien certain que cette série d'opérations ne peut s'effectuer que d'une manière ; la combinaison représente donc, sans ambiguïté, un certain mode de décomposition de M, et détermine complètement le polygone partiel final P_i.

Il est à peine nécessaire de faire remarquer que dans une combinaison il faut aussi considérer l'intervalle de la dernière lettre à la première, pour fermer le cycle ; et que si l'on a, par exemple, dans un décagone, la combinaison $S_a S_a S_a$, deux intervalles sont nuls, mais le troisième comprend neuf sommets ; une seule diagonale peut donc être menée.

Suivons à présent une marche inverse : un mode de décomposition peut être représenté par plusieurs combinaisons des sommets, comme on le verra sans peine sur des exemples simples. Ainsi la décomposition, en

triangles, du quadrilatère $S_1S_2S_3S_4$ par la diagonale S_1S_3 est représentée indifféremment, suivant nos conventions, par S_3 ou par S_1. L'ambiguïté disparaît si l'on fixe d'avance le polygone partiel P_i (latéral ou non) qui doit rester le dernier; alors on commence par effacer, du polygone M, toutes les lignes brisées des polygones latéraux (sauf P_i s'il est latéral, et l'on sait qu'alors il y en a au moins un autre); on tient note des points de départ; on recommence avec le polygone dégradé, en évitant toujours d'effacer P_i, et l'on obtient à la fin une combinaison de $n-1$ sommets et une figure réduite au polygone P_i. Et si l'on avait assigné le dernier rang à un autre polygone partiel, on n'aurait pu trouver la même combinaison, puisque chaque combinaison détermine complètement le polygone final.

A présent, chacun des n polygones partiels P d'une décomposition pouvant être réservé pour le dernier, chaque mode de décomposition est représenté par n combinaisons différentes, tandis qu'une combinaison ne peut représenter qu'un mode de décomposition. Si donc $D_{m,n-1}$ est le nombre des combinaisons à répétition de m lettres $n-1$ à $n-1$, le nombre des modes de décomposition du polygone M est, conformément à l'énoncé,

$$\frac{1}{n} D_{m,n-1}$$

Remarque. Le nombre cherché étant désigné par X_n, on est tenté de résoudre la question au moyen d'une formule de réduction des X; on parvient, en effet, de plus d'une manière, à des formules pareilles; nous n'en avons pas rencontré d'où l'on pouvait tirer facilement X_n. Seulement, la Question 333 étant résolue par une autre méthode, par exemple, par celle qui vient d'être exposée, on peut, dans les formules de réduction, remplacer les X par leur valeur, et obtenir ainsi des identités nouvelles entre nombres combinatoires. Ces identités seraient peut-être fort difficiles à établir directement.

Note. La question 333 a été empruntée à un article de MM. H. M. Taylor et R. C. Rowe, publié dans les *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. XIII, n° 186. Elle repose sur l'intégration, par la théorie des fonctions génératrices de Laplace, de l'équation

$$X_n = SX_aX_bX_c\cdots, \quad \text{où} \quad a+b+c+\cdots = n-1,$$

le nombre des quantités $a,b,c,\cdots$ étant $p-1$, et zéro étant une valeur

admissible pour chacune d'elles; alors $X = 1$. M. l'abbé Gelin ramène la question à l'intégration d'une autre équation aux différences finies de la manière suivante :

Désignons par P_n^p le nombre de manières de décomposer un polygone convexe de n côtés en m polygones convexes de p côtés par les diagonales. On aura la condition $n = m(p-2)+2$, et $P_p^p = 1$.

Soit $A_1A_2A_3 \dots A_n$ un polygone convexe de n côtés. Une diagonale quelconque A_1A_k partage ce polygone en deux autres, dont l'un $A_1A_2A_3 \dots A_k$, de k côtés, est susceptible de P_k^p décompositions, et l'autre, $A_1A_kA_{k+1} \dots A_n$, de $n-k+2$ côtés, est susceptible de P_{n-k+2}^p décompositions. On suppose, bien entendu, $k = \lambda(p-2)+2$. Or, chacune des décompositions du polygone $A_1A_2A_3 \dots A_k$ peut être associée à chacune des décompositions du polygone $A_1A_k A_{k+1} \dots A_n$. Donc, la diagonale A_1A_k peut entrer dans $P_k^p P_{n-k-2}^p$ décompositions différentes. Faisant $\lambda = 1,2,3, \dots m-1$, on trouve que les diagonales

$$A_1A_p,\ A_1A_{2p-2},\ A_1A_{3p-4},\ \dots\ A_1A_{m-s},$$

menées d'un même sommet A_1, entrent respectivement dans

$$P_p^p P_{n-p+2}^p,\ P_{2p-2}^p P_{n-2p+4}^p,\ P_{3p-4}^p P_{n-3p+6}^p,\ \dots\ P_{n-p+2}^p P_p^p$$

décompositions.

Comme il y a n sommets, mais que chaque diagonale aboutit à deux sommets, et que, d'ailleurs, chaque décomposition renferme $m-1$ diagonales, on voit que l'on a, pour le nombre total de décompositions dont est susceptible le polygone $A_1A_2A_3 \dots A_n$,

$$(1) \qquad P_n^p = \frac{n}{2(m-1)} A$$

$$A = [P_p^p P_{n-p+2}^p + P_{2p-2}^p P_{n-2p+4}^p + P_{3p-4}^p P_{n-3p+6}^p + \dots + P_{n-p+2}^p P_p^p].$$

Cette formule permet de calculer, de proche en proche,

$$P_p^p,\ P_{2p-2}^p,\ P_{3p-4}^p,\ P_{4p-6}^p,\ P_{5p-8}^p, \qquad \text{etc.}$$

On trouve, par exemple, successivement,

$$P_7^7 = 1,\ P_{12}^7 = 6,\ P_{17}^7 = 51,\ P_{22}^7 = 506,\ P_{27}^7 = 5481,\ P_{32}^7 = 62832, \quad \text{etc.}$$

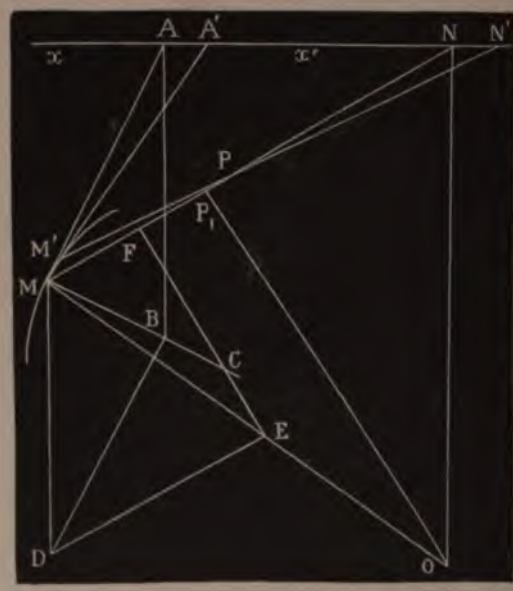
Question 932.

(Voir *Mathesis* (2) IV, p. 104).

La tangente MA *en un point quelconque* M *d'une courbe donnée rencontre une droite fixe en* A. *On porte sur cette droite fixe une longueur constante* AN. *Déterminer le point où la droite* MN *touche son enveloppe.*

(L. Meurice.)

Solution par M. Stuyvaert (Gand). L'ordre de succession des lettres qui désignent un segment de droite indiquera la direction de ce segment, et deux segments d'une même droite seront, ou non, de même signe, suivant qu'ils sont, ou non, de même sens. Les angles auront aussi un sens, et par suite un signe, déterminé par le sens et l'ordre de succession des demi-droites qui les forment.



Considérons deux positions infiniment voisines MA, M'A' de la tangente, et les positions correspondantes MN, M'N' de la droite dont on cherche l'enveloppe. Soit P le point de rencontre de MN et M'N'. Si P_1 est le point où MN touche son enveloppe, on a

$$\frac{MP_1}{P_1N} = \lim \frac{MP}{PN}.$$

Le théorème de Ménelaüs appliqué au triangle AMN donne

$$\frac{MP}{PN} \times \frac{NN'}{N'A} \times \frac{AM'}{M'M} = -1$$

$$\frac{MP}{PN} = -\frac{N'A}{NN'} \times \frac{M'M}{AM'} = -\frac{AN'}{NN'} \times \frac{MM'}{AM'}.$$

Mais on a les relations *générales* (quels que soient les signes) :

$$AN' = AN + NN'; \quad AM' = AM + MM', \quad NN' = AA'.$$

Donc l'égalité précédente peut s'écrire

$$\frac{MP}{PN} = -\frac{AN+AA'}{AA'} \times \frac{MM'}{AM+MM'} = -\frac{MM'}{AM+MM'} - \frac{AN.MM'}{AA'(AM+MM')}.$$

Appelons α l'angle (AM, AA'). Alors $(A'M', AA') = \alpha + d\alpha$, et par suite $(A'M', AM) = d\alpha$. On a, d'autre part, la relation *générale*

$$AM' \sin (AM', A'M') = AA' \sin (AA', A'M')$$

ou

$$AM' \sin (d\alpha) = AA' \sin (\alpha + d\alpha).$$

$$\frac{MP}{PN} = -\frac{MM'}{AM+MM'} - \frac{AN.MM' \sin (\alpha + d\alpha)}{(AM+MM')^2 \sin (d\alpha)}$$

$$\frac{MP}{PN} = -\frac{MM'}{AM+MM'} - \frac{AN.MM' \cos (d\alpha) \sin \alpha}{(AM+MM')^2 \sin (d\alpha)} - \frac{AN.MM' \cos \alpha}{(AM+MM')^2}.$$

En passant à la limite, le 1er et le 3e terme du 2e membre s'annulent, $\cos (d\alpha)$ tend vers 1, et $\frac{MM' \sin \alpha}{\sin (d\alpha)}$ tend vers $\frac{ds}{d\alpha} \sin \alpha$, qui est la projection du rayon de courbure CM sur la direction AA'. Donc

$$\frac{MP_1}{P_1N} = \lim \frac{MP}{PN} = \frac{AN.MC. \sin \alpha}{\overline{AM}^2}.$$

Lorsque MC sin α est de même signe que AN, ce rapport est positif et le point P_1 partage intérieurement MN ; sinon P_1 partage extérieurement MN dans le rapport précédent, qu'il est aisé de construire.

Comme on le voit, la discussion relative aux signes exige quelques précautions, de même que l'application de la méthode des limites : en supprimant plus tôt les infiniment petits d'ordre supérieur, on simplifie un peu les calculs, mais c'est au détriment de la rigueur.

Autre méthode. Voici une solution fondée sur d'autres principes et n'exigeant aucune discussion relative aux signes.

Imaginons que les points A et N se déplacent dans le sens xx' avec des vitesses évidemment égales, et qu'ils entraînent les droites AM et MN dont la première est assujettie à glisser en même temps sur la courbe, et la seconde à passer constamment par le point de contact.

En ne considérant d'abord que la droite AM, on trouve immédiatement le centre instantané de rotation au point de rencontre B des normales en M à la courbe et en A à xx'. Les vitesses des points A et M *de la droite* AM peuvent donc être représentées par les droites AB et MB normales à leur direction (la vitesse angulaire de la rotation est alors supposée égale à l'unité). Quant à la vitesse du *contact* M (*), elle peut être représentée par le rayon de courbure MC.

Cherchons les vitesses de deux points M, N *de la droite* MN. Celle de N est dirigée suivant xx'.

Le point M *de la droite* MN a une vitesse composée de la translation de N égale à celle de A et d'une rotation autour de N; la première est représentée par la droite MD égale et parallèle à AB, la seconde par une droite dirigée suivant MN; donc l'extrémité de la droite représentant la vitesse résultante est sur une parallèle DE menée par D à MN.

D'un autre côté, la vitesse du point M de MN est composée de la vitesse du contact, laquelle est représentée par MC, et d'une vitesse de glissement le long de MN, laquelle sera représentée par une perpendiculaire à MN. L'extrémité de la droite représentant la vitesse du point M est donc sur une perpendiculaire menée par C à MN.

Cette perpendiculaire rencontre DE en E. Donc ME représente la vitesse du point M et est normale à la trajectoire de ce point; ME prolongée rencontre en O la perpendiculaire NO sur xx'. O est le centre instantané de rotation de la droite MN.

On sait que l'on obtient le point où une droite touche son enveloppe en abaissant du centre instantané la perpendiculaire sur la droite; on trouve ainsi le point P_1.

Remarque. Les deux méthodes doivent fournir le même résultat, ce que l'on vérifie comme il suit : appelons β l'angle ANM, et F le point où CE coupe MN,

$$MF = MC \cos CMF = MC \sin AMN.$$

Or on a aussi

$$\sin AMN : \sin \beta = AN : AM.$$

(*) Nous appelons *vitesse du contact*, la vitesse d'un point de la courbe qui coïncide à chaque instant avec le point de contact.

Donc

$$MF = \frac{AN.MC.\sin\beta}{AM}.$$

FE est la projection de MD ou de $\frac{AM}{\sin\alpha}$, et l'angle de FE avec MD est β; par conséquent

$$FE = \frac{AM}{\sin\alpha}\cos\beta.$$

On en conclut successivement

$$\operatorname{tg} FMO = \frac{FE}{MF} = \frac{\overline{AM}^2\cos\beta}{AN.MC.\sin\beta\sin\alpha},$$

$$\frac{\operatorname{tg} FMO}{\operatorname{cotg}\beta} = \frac{\operatorname{tg} FMO}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)} = \frac{\operatorname{tg} FMO}{\operatorname{tg} MNO} = \frac{AM^2}{AN.MC.\sin\alpha}.$$

Mais on a évidemment

$$\frac{\operatorname{tg} FMO}{\operatorname{tg} MNO} = \frac{P_1N}{MP_1}.$$

Donc enfin,

$$\frac{P_1N}{MP_1} = \frac{AM^2}{AN.MC.\sin\alpha},$$

ce qui est conforme au premier résultat obtenu.

D'ailleurs, on voit bien que si $MC\sin\alpha$ est de même sens que AN, F sera entre M et N; donc aussi P_1.

---

*Question 1027.

(Voir *Mathesis*, (2) V, p. 176).

Construire un triangle ABC, *connaissant* AB, AC *et sachant que l'angle* $C = 2B$ *ou* $C = 3B$.

1° *a*) La perpendiculaire au milieu de AB rencontrant BC au point D, les triangles DAB, ACD sont isoscèles, d'où $AC = AD = DB$. On construira d'abord le triangle DAB avec les côtés *c*, *b*, *b*, etc.

(Colart, Droz Farny.)

b) La bissectrice de l'angle ACB coupe AB en un point E tel que les triangles ACE, ABC sont équiangles; on en déduit

$$\overline{AC}^2 = AE.AB.$$

De là la construction: La circonférence décrite sur AB comme diamètre rencontre la circonférence ayant pour centre A et pour rayon b, en un point qui se projette sur AB en E; la seconde de ces circonférences est rencontrée par la circonférence de centre E et de rayon EB au point C.

(MANDART, TIETE, SELIGMANN, MERLIN).

c) Menons par A une droite AK parallèle à la bissectrice CE de l'angle ACB et terminée en K à BC; on a BA = AK, CK = AC. On construira donc le triangle CAK avec les côtés b, b, c, etc. (CRISTESCO.)

d) De la relation sin B : sin C = $b : c$ on tire cos B = $\frac{c}{2b}$, ce qui conduit à la construction *a*).

(DÉPREZ, DEGUELDRE, B. JONESCO, DROZ FARNY, SELIGMANN, J. JONESCO, COUTURIER.)

e) Si l'on mène la bissectrice CE de l'angle ACB, on a

$$\overline{AC}^2 = AE.AB, \quad \frac{AC}{BC} = \frac{AE}{EB},$$

d'où l'on déduit

$$a = \frac{c^2 - b^2}{b}.$$

(DÉPREZ, FRANÇOIS, MERLIN.)

2° *a*) Construisons l'angle BCF = ABC; nous aurons FB = FC, AF = AC. On peut donc construire le triangle ACF avec les côtés b, b, $c - b$, etc.

(MANDART, MERLIN, CRISTESCO, SELIGMANN, DROZ FARNY, FRANÇOIS, TIETE.)

b) La relation sin B : sin C = $b : c$ donne

$$\cos B = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3b - c}{b}}, \quad \cos 2B = \frac{b - c}{2b}.$$

(COUTURIER, SELIGMANN, B. JONESCO, J. JONESCO, DÉPREZ, DROZ FARNY.)

REMARQUES. I. Dans l'hypothèse C = 3B, on a

$$a^2 = \frac{(b + c)(c - b)^2}{b}. \qquad \text{(DÉPREZ.)}$$

II. Pour que le problème soit possible, on doit avoir, dans le premier cas, $b < c < 2b$, et dans le second cas $b < c < 3b$. (MANDART).

Question 1037.

(Voir *Mathesis*, (2), t. V, p. 216).

On considère tous les trapèzes ayant l'une des bases fixe en grandeur et en position, dont les diagonales sont rectangulaires, et la hauteur constante. Le lieu du point de rencontre des côtés non parallèles est une conique dont le foyer est au milieu de la base fixe. (E. N. Barisien.)

Solution par MM. Retali et Buysens. Soient BC = $2d$ la base fixe, O son milieu, g une droite parallèle à BC à la distance h égale à la hauteur constante : le lieu de l'intersection α des diagonales est le cercle O^2, décrit sur la base BC comme diamètre, et le point A, intersection des côtés non parallèles, tombe sur la droite αO et est séparé harmoniquement de α par O et g. Le lieu du point A est donc la courbe correspondante au cercle O^2 dans l'homologie harmonique ayant O pour centre et g pour axe, c'est-à-dire une conique C^2 qui a en O un foyer, passe par les points B et C et par les deux points de rencontre de la droite g avec le cercle O^2. Comme les deux droites de fuite tombent sur la droite s équidistante de BC et g, C^2 est une ellipse, parabole ou hyperbole suivant que $d > h$, $d = h$ ou $d < h$.

Solution par MM. Colart et Déprez. Soient AB la base donnée; M le point de rencontre des côtés BC et AD; O, P, Q, R les milieux de AB, BC, CD et DA; E, F, G les projections de M sur DC, PR et AB; H la projection de Q sur AB.

La figure donne

$$\frac{MO}{OQ} = \frac{MG}{HQ}, \quad \frac{MF}{PR} = \frac{MG}{AB},$$

d'où, puisque OQ = PR à cause des triangles rectangles formés par les diagonales avec AB et CD,

$$\frac{MO}{MF} = \frac{AB}{HQ} = \text{const.}$$

Le point M décrit donc une conique dont O est un foyer et PR la directrice correspondante.

Remarque. Le point M décrit encore une conique, si, au lieu de donner les diagonales rectangulaires, on donne OQ : PR = constante.

Solution par MM. Cristesco, Droz Farny, J. Jonesco, Kerlhoff et Couturier. Soient ABCD le trapèze considéré, O le milieu de la base

fixe AB et (a, o), $(-a, o)$, (α, h), (α', h) les coordonnées des points A, B, C, D, les axes des coordonnées étant OA et la hauteur élevée en O sur AB.

Les équations des côtés non parallèles AC, BD, seront respectivement

$$y = \frac{h}{\alpha - a}(x - a), \quad y = \frac{h}{\alpha' + a}(x + a). \tag{1}$$

La condition de perpendicularité des diagonales AD, BC est

$$(\alpha + a)(\alpha' - a) + h^2 = 0. \tag{2}$$

Si l'on remplace dans (2) α et α' par leurs valeurs tirées de (1), on trouve que le lieu cherché est la conique ayant pour équation

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{h^2}(2y - h)^2.$$

On voit immédiatement que l'origine O est un foyer de la courbe, car la distance $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ d'un point quelconque (x, y) de la courbe au point O, s'exprime par une fonction rationnelle et linéaire des coordonnées x et y. La directrice a pour équation $y = \frac{h}{2}$, et la courbe est une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que

$$a < \frac{h}{2}, \quad a > \frac{h}{2}, \quad a = \frac{h}{2}.$$

M. Mandart a résolu la même question en adoptant des coordonnées polaires.

M. Merlin a donné deux solutions, l'une en coordonnées cartésiennes, l'autre en coordonnées polaires.

×Question 1028.

(Voir *Mathesis*, (2) V. p. 216).

Soient H *l'orthocentre d'un triangle* ABC *et* O *le centre du cercle circonscrit; les hauteurs* AH, BH, CH *rencontrent la circonférence* ABC *en* A_1, B_1, C_1; *la droite* HO, *rencontre* BC, CA, AB *en* A', B', C'; *enfin* A_2, B_2, C_2 *désignent les symétriques de* A, B, C *par rapport à* O.

1° *Les droites* A_2A', B_2B', C_2C' *concourent en un point* M *de la circonférence* ABC; 2° *les points* M, H *et le point de Tarry sont en ligne droite;* 3° *les droites* A_1A', B_1B', C_1C' *se coupent au point de Steiner.*

(E. Lemoine).

Solution par M. A. Droz Farny. Les symétriques par rapport aux côtés, d'une transversale Δ quelconque passant par H, se croisent en un point de la circonférence circonscrite, dont la droite de Simson est parallèle à Δ. Les droites $A'A_1$ etc. coupent donc la circonférence circonscrite en un point R dont la droite de Simson est parallèle à OH; R est donc le point de Steiner de ABC.

D'après la réciproque d'un théorème de M. Déprez (*Mathesis*, (2) V, p. 230) les droites A_2A' se croisent en un point M de la circonférence circonscrite. Tirons HM qui rencontre la circonférence en T; dans l'hexagone inscrit AA_1RTMA_2, AA_1 et MT se croisent en H, A_2M et RA_1 se croisent en A'; HA' étant la pascale de cet hexagone, RT doit passer par le point d'intersection O de AA_2 et HA'; R et T étant diamétralement opposés, T est le point de Tarry du triangle.

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1127.** Eliminer x entre les équations

$$\frac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1}=\frac{a_2x+b_2}{c_2x+d_2}=\frac{a_3x+b_3}{c_3x+d_3}. \qquad \text{(J. Neuberg.)}$$

1128. Trouver le lieu des points d'inflexion des courbes ayant pour équation

$$y=\cos\sqrt{a^2-x^2}$$

lorsque a varie. (Soons.)

1129. Par un point P situé dans le plan d'un triangle ABC, on mène trois droites α, β, γ faisant des angles égaux et de même sens avec les côtés BC, CA, AB; α rencontre AC en B_α et AB en C_α; β rencontre BC en A_β et AB en C_β; γ rencontre BC en A_γ et AC en B_γ. Soient α', β', γ' les points situés à l'infini sur les droites α, β, γ.

1° Les coniques $\beta'\gamma'AB_\gamma C_\beta$, $\alpha'\gamma'BC_\alpha A_\gamma$, $\alpha'\beta'CB_\alpha A_\beta$ et le cercle ABC sont circonscrits à un même triangle A'B'C'.

2° Lorsque P se déplace de manière que B'C' ait une longueur constante, le lieu de P est une hypotrochoïde, qui se réduit à une hypocycloïde de Steiner lorsque B'C' est nul, et à un cercle lorsque B'C' est égal au diamètre du cercle ABC. (A. Gob.)

×**1130.** Un angle de grandeur invariable pivote autour de son sommet A qui est fixe. D'un point fixe B, situé dans le même plan, on abaisse sur

les côtés de cet angle des perpendiculaires dont les pieds sont C et D. Ces perpendiculaires rencontrent les côtés de l'angle en deux autres points E et F :

1° Quel est le lieu géométrique des points C et D ?

2° Démontrer que la longueur de la droite CD est invariable et en déduire le lieu géométrique de son milieu I.

3° Quels sont les lieux géométriques des points E et F ?

4° Trouver les lieux des centres des cercles circonscrits aux triangles AEF, BEF.

5° Trouver le lieu du milieu de la droite EF.

6° Démontrer que la droite EF enveloppe une ellipse.

Les trois premières parties de cette question ont fait l'objet d'un concours en France; les autres ont déjà été traitées sous une forme un peu différente dans *Mathesis*.

QUESTIONS D'EXAMEN.

802. Calculer $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, sachant que

$$(1+m\cos x)(1-m\cos\alpha)=1-m^2.$$

803. On pose

$$\varphi_m=(x+y)^m-x^m-y^m.$$

Vérifier les égalités

$$\varphi_5=3xy(x+y),$$
$$\varphi_9=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2),$$
$$\varphi_7=7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2,$$
$$\varphi_{11}=11xy(x+y)(x^2+xy+y^2)[(x^2+xy+y^2)^3+x^2y^2(x+y^2)],$$
$$\varphi_{13}=13xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2[(x^2+xy+y^2)^3+2x^2y^2(x+y)^2].$$

Démontrer que φ_{6n+1} est divisible par $(x^2+xy+y^2)^2$.

804. Soient MN, PQ deux cordes d'une ellipse qui ont des directions symétriques par rapport à un axe de cette courbe. Trouver le lieu du centre de la circonférence passant par les points M, N, P, Q :

1° Lorsque les cordes MN, PQ, tournent autour de leur point d'intersection supposé fixe.

2° Lorsque ces droites tournent autour des points, supposés fixes, où elles rencontrent le grand axe.

3° Lorsqu'elles tournent chacune autour d'un de leurs points supposé fixe. (Soons.)

REMARQUES UTILES DANS LES CALCULS DE LIMITES;

par M. E. Cesàro, professeur à l'Université de Naples.

Soit $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ une série divergente à termes positifs. On a, d'après un théorème connu(*),

$$\lim u_n = \lim \frac{a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + \cdots + a_nu_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}, \tag{1}$$

lorsque n augmente indéfiniment, pourvu que le premier membre existe. Si u_n croît avec n, au-delà de toute limite, il en est de même de l'autre expression; mais leur différence peut ne plus tendre vers zéro. Comme on peut toujours poser

$$u_n - \frac{a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + \cdots + a_nu_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n} = \frac{a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \cdots + a_nv_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}, \tag{2}$$

pour en tirer

$$v_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}}{a_n}(u_n - u_{n-1}),$$

il est clair que, si v_n tend vers une limite finie, les deux membres de (2) doivent tendre, en vertu de (1), vers la même limite. On a donc

$$\left.\begin{aligned} &\lim\left(u_n - \frac{a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + \cdots + a_nu_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}\right) \\ &= \lim \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}}{a_n}(u_n - u_{n-1}), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

pourvu que le second membre existe. Cette proposition est souvent utile dans les calculs de limites.

Supposons, par exemple, que u_n soit asymptotique à $\log n$, c'est-à-dire que, pour n infini, son rapport à $\log n$ tende vers l'unité. On a

$$\lim n(u_n - u_{n-1}) = \lim \frac{u_n - u_{n-1}}{\log n - \log(n-1)} = \lim \frac{u_n}{\log n} = 1.$$

Donc, *si les nombres positifs a_n sont choisis de telle sorte que*

$$\lim \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}}{na_n} = k, \tag{4}$$

et que la série $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ soit divergente, on a

$$\lim\left(u_n - \frac{a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + \cdots + a_nu_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}\right) = k \tag{5}$$

(*) Cesàro, *Analisi algebrica*, p. 98.

pour tout nombre u_n asymptotique à log n. Il y a d'ailleurs un moyen général de satisfaire à la condition (4); car il suffit de prendre

$$a_n = \alpha_1 \alpha_2^{\frac{1}{2}} \alpha_3^{\frac{1}{3}} \cdots \alpha_n^{\frac{1}{n}},$$

où α_n est un nombre quelconque, dont le logarithme naturel tend vers $\frac{1}{k} - 1$, pour trouver

$$\lim \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}}{n a_n} - \lim \frac{a_{n-1}}{n a_n - (n-1)} = \lim \frac{1}{n\left(\alpha_n^{\frac{1}{n}} - 1\right) + 1} = k.$$

On est conduit aux applications les plus intéressantes de la formule (5) lorsqu'on prend $a_n = n^\alpha \log^\beta n$, où $\alpha > -1$. La série $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ est divergente, quel que soit β, et la condition (4) est vérifiée, k ayant la valeur $\frac{1}{\alpha + 1}$. Ainsi, par exemple, en prenant $a_n = 1, n, n^2, \ldots$, on voit que, *pour tout nombre u_n, asymptotique à log n, on a*

$$\lim \left(u_n - \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n) \right) = 1, \tag{6}$$

$$\lim \left(u_n - \frac{u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + n u_n}{\frac{1}{2} n (n+1)} \right) = \frac{1}{2}, \tag{7}$$

etc.; mais on peut prendre aussi

$$a_n = \log n, n \log n, n^2 \log n, \ldots, \frac{1}{\log n}, \frac{n}{\log n}, \frac{n^2}{\log n}, \ldots,$$

ou bien, si l'on veut, $a_n = u_n$, $a_n = \frac{1}{u_n}$, *etc.* On trouve, en particulier, pour cette dernière forme de a_n,

$$\lim \left(u_n - \frac{n}{\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \cdots + \frac{1}{u_n}} \right) = 1,$$

d'où l'on déduit la formule approchée

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \cdots + \frac{1}{u_n} = \frac{n}{u_n - 1}.$$

On peut faire des applications arithmétiques assez curieuses des formules (6) et (7) en partant de la formule(*) empirique de Pervou-

(*) Voyez notre note sur cette formule dans les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de Paris 1894, (t. CXIX, p. 848).

chine, qui donne la représentation asymptotique du $n^{ième}$ nombre premier p_n :

$$\frac{p_n}{n} = \log n + \log\log n - 1 + \cdots \tag{8}$$

Si l'on prend $u_n = \frac{p_n}{n}$, la formule (6) donne

$$\lim \frac{1}{n}\left(p_n - \left(p_1 + \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{3}p_3 + \cdots + \frac{1}{n}p_n\right)\right) = 1,$$

d'où l'on peut déduire, avec une certaine approximation,

$$p_1 + \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{3}p_3 + \cdots + \frac{1}{n}p_n = p_n - n;$$

de même, la formule (7) devient

$$\lim\left(\frac{p_n}{n} - \frac{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n}{1 + 2 + 3 + \cdots + n}\right) = \frac{1}{2}. \tag{9}$$

Celle-ci, également due à M. Pervouchine, a été démontrée(*) par M. Lakhtine; mais nous ne saurions pas dire si la démonstration de cet auteur coïncide avec la nôtre. On obtient une égalité plus générale en prenant

$$u_n = \frac{p_n{}^\alpha}{\alpha n^\alpha}, \quad \theta_n = n^\alpha.$$

On trouve ainsi les formules

$$\lim\left(\frac{p_n{}^2}{n^2} - \frac{p_1 + p_4 + p_9 + \cdots + p_n{}^2}{1 + 4 + 9 + \cdots + n^2}\right) = \frac{2}{3},$$

$$\lim\left(\frac{p_n{}^3}{n^3} - \frac{p_1 + p_8 + p_{27} + \cdots + p_n{}^3}{1 + 8 + 27 + \cdots + n^3}\right) = \frac{3}{4}, \ldots,$$

analogues à celles de M. Pervouchine.

Il serait utile, mais il n'est pas toujours permis de remplacer le dénominateur $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, dans la formule (3), par une expression asymptotique plus simple. Il est facile de voir que cela est possible dans la formule (7), parce que

$$\lim \frac{u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_n}{n^3} = \frac{1}{3}\lim \frac{u_n}{n} = 0 :$$

(*) Dans le *recueil publié* (en russe) *par la Société mathématique de Moscou* (t. XVI, p. 460).

c'est ce qu'on peut justifier avec plus de rigueur en appliquant la formule (5) au cas de $a_n = 2n - 1$, ce qui donne d'abord

$$\lim\left(u_n - \frac{1}{n^2}(u_1 + 3u_2 + 5u_3 + \cdots + (2n-1)u_n)\right) = \frac{1}{2};$$

puis, en retranchant aux deux membres

$$\lim\frac{u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n}{n^2} = \frac{1}{2}\lim\frac{u_n}{n} = 0,$$

on trouve, au lieu de (7),

$$\lim\left(u_n - \frac{2}{n^2}(u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_n)\right) = \frac{1}{2}. \qquad (10)$$

Après cette remarque, la formule (9) permet d'écrire, d'une manière approchée,

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = \frac{n^2}{2}\left(\frac{p_n}{n} - \frac{1}{2}\right). \qquad (11)$$

D'autre part, si l'on emploie la formule asymptotique

$$\log p_n = \frac{p_n}{n} + 1 + \frac{n}{p_n} + 2\frac{n^2}{p_n^2} + \cdots, \qquad (12)$$

qu'on déduit aisément de la formule fondamentale de Tchebychef, on trouve, par application de cette dernière formule, que le nombre des nombres premiers, inférieurs à p_n^2, est

$$\frac{n^2}{2}\left(\frac{p_n}{n} - \frac{1}{2} - \frac{n}{2p_n} + \cdots\right).$$

Il s'ensuit, d'après (11), qu'on peut affirmer, dans une première approximation, que *la somme de tous les nombres premiers, jusqu'à p, indique combien il y a de nombres premiers jusqu'à* p^2. Cette remarque est loin d'être nouvelle : elle a été faite, il y a près de quarante ans, par Pervouchine.

Tout ce que nous venons de dire dans l'hypothèse $u_n = \frac{p_n}{n}$ peut être répété, en vertu de (12), pour $u_n = \log p_n$, pour $u_n = p_n - p_{n-1}$, *etc.* Nous nous bornons à faire remarquer la formule

$$\lim\frac{1}{p_n}\sqrt[n]{p_1 p_2 p_3 \cdots p_n} = \frac{1}{e},$$

qu'on déduit aisément de l'égalité (6), et qu'on peut considérer comme un premier pas dans la détermination approchée du produit $p_1p_2\cdots p_n$. La dernière égalité se présente d'abord sous la forme

$$\lim\left(\log p_n - \frac{1}{n}\log p_1p_2p_3\cdots p_n\right) = 1,$$

d'où l'on déduit, au moyen de (12),

$$\lim\frac{1}{n}\left(p_n - \log p_1p_2p_3\cdots p_n\right) = 0.$$

Cette égalité renferme le théorème (*) de Halphen : *la somme des logarithmes de tous les nombres premiers, jusqu'à p, est asymptotique à p*; mais elle nous dit, en outre, que l'*excès de*

$$\frac{1}{p}\log(2.3.5.7.11\ldots p)$$

sur sa limite tend vers zéro plus rapidement que $\frac{1}{\log p}$.

Evidemment, pour d'autres formes asymptotiques de u_n, la formule (3) donne une infinité d'autres résultats. Lorsqu'on suppose u_n asymptotique à loglog n, on peut prendre

$$a_n = \frac{1}{n},\quad \frac{\log n}{n},\quad \frac{\log^2 n}{n},\quad \frac{\log^3 n}{n},\ldots;$$

car, tant que $\beta > -1$, la série ayant pour terme général $a_n = n^{-1}\log^\beta n$, est divergente, et le second membre de (3) a la valeur

$$\lim\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}}{na_n\log n} = \frac{1}{\beta+1}.$$

La série $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ est encore divergente pour $\beta = -1$; mais la formule (3) ne convient plus aux nombres u_n, asymptotiques à loglog n : elle devient applicable au cas de u_n asymptotique à logloglog n, le second membre ayant la valeur

$$\lim\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}}{na_n\log n.\log\log n} = 1.$$

Dans ce dernier cas, on peut même prendre, plus généralement,

$$a_n = \frac{(\log\log n)^\alpha}{n\log n}.$$

(*) Voyez, pour une démonstration rigoureuse, un article de M. Hadamard dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. XXIV, p. 211).

Le valeur de k est $\frac{1}{\alpha+1}$; mais la formule cesse d'être applicable pour $\alpha = -1$. On est alors conduit à prendre

$$a_n = \frac{(\log\log\log n)^\alpha}{n \log n . \log\log n},$$

en supposant $\alpha > -1$, et à considérer les nombres u_n asymptotiques à $\log\log\log\log n$; et ainsi de suite, à l'infini.

Signalons, pour finir, les résultats qu'on obtient dans le cas de $a_n = \frac{1}{n}$. Si l'on remarque d'abord que l'on a

$$\lim \frac{u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{3}u_3 + \cdots + \frac{1}{n}u_n}{\log^2 n} = \frac{1}{2}\lim \frac{u_n}{\log n} = 0,$$

on voit que, *pour tout nombre u_n asymptotique à log log n*,

$$\lim\left(u_n - \frac{u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{3}u_3 + \cdots + \frac{1}{n}u_n}{\log n}\right) = 1. \qquad (13)$$

En particulier, nous pouvons prendre

$$u_n = \frac{p_n}{n} - \log n, \quad \log\frac{p_n}{n}, \quad p_n - p_{n-1} - \log n, \cdots$$

Dans toutes ces applications il est utile de connaître l'égalité suivante

$$\lim n\left(\frac{\log 1 + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{3}\log 3 + \cdots + \frac{1}{n}\log n}{\log n} - \frac{1}{2}\log n\right) = \frac{1}{2},$$

qu'on démontre sans peine en appliquant un autre théorème connu(*) à l'expression

$$\log 1 + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{3}\log 3 + \cdots + \frac{1}{n}\log n - \frac{1}{2}\log^2 n,$$

divisée par le nombre $\frac{\log n}{n}$, qui tend vers zéro en décroissant toujours.

Cela étant, si l'on prend, par exemple, $u_n = \frac{p_n}{n} - \log n$, la formule (13) devient

$$\lim\left(\frac{1}{2}\log n + \log\log n - \frac{p_1 + \frac{1}{4}p_2 + \frac{1}{9}p_3 + \cdots + \frac{1}{n^2}p_n}{\log n}\right) = 2.$$

(*) Cesàro, *loc. cit.*, p. 99.

Il est bien entendu que ce résultat, ainsi que les précédents, relatifs aux nombres p_n, sont subordonnés à la question de l'existence des diverses limites obtenues.

SUR QUELQUES FORMULES

qui représentent par approximation l'arc dont on connaît le sinus et le cosinus,

par M. le Professeur E. Lampe (Berlin). — (*Suite*, voir *Mathesis*, 153-156).

III.

Étendre les problèmes de I et II à des cas plus compliqués.

Nous ne continuerons pas à traiter les problèmes dans toute leur généralité. Qu'il nous suffise de donner les résultats pour quelques cas qui semblent propres à mettre en lumière l'idée directrice, dans les recherches de ce genre.

C.

$$(1)\quad \frac{90\sin x}{57+34\cos x-\cos 2x}=\frac{45\sin x}{29+17\cos x-\cos^2 x}=x-\frac{1}{1512}x^7\cdots,$$

$$(2)\quad \frac{160\sin x+25\sin 2x}{6(18+16\cos x+\cos 2x)}=\frac{5\sin x(16+5\cos x)}{3(17+16\cos x+2\cos^2 x)}$$
$$=x-\frac{1}{44\,100}x^9\cdots,$$

$$(3)\quad \frac{425\sin x+101\sin 2x+\sin 3x}{30(10+10\cos x+\cos 2x)}=x-\frac{1}{582\,120}x^{11}\cdots$$
$$=\frac{\sin x(212+101\cos x+2\cos^2 x)}{15(9+10\cos x+2\cos^2 x)},$$

$$(4)\quad \frac{756\sin x}{468{,}8+300{,}6\cos x-14{,}4\cos 2x+\cos 3x}=x-\frac{23}{226\,800}x^9\cdots,$$

$$(5)\quad \frac{0{,}7(375\sin x+132\sin 2x+7\sin 3x)}{200+225\cos x+36\cos 2x+\cos 3x}=x-\frac{x^{13}}{110\,990\,88}\cdots,$$
$$=\frac{1{,}4(92+66\cos x+7\cos^2 x)\sin x}{82+111\cos x+36\cos^2 x+2\cos^3 x},$$

$$(6)\quad \frac{6076\sin x+2626{,}4\sin 2x+226{,}4\sin 3x+\sin 4x}{28(175+210\cos x+42\cos 2x+2\cos 3x)}$$
$$=\frac{2\sin x(731{,}2+656{,}1\cos x+113{,}2\cos^2 x+\cos^3 x)}{7(133+204\cos x+84\cos^2 x+8\cos^3 x)}$$
$$=x-\frac{1}{151\,594\,440}x^{15}\cdots$$

$$(7)\quad \frac{395\,136\sin x+208\,544\sin 2x+28\,544\sin 3x+761\sin 4x}{140\,(2450+3136\cos x+784\cos 2x+64\cos 3x+\cos 4x}$$
$$=\frac{\sin x\,(91\,648+103\,511\cos x+28\,544\cos^2 x+1522\cos^3 x)}{35\,(1667+2944\cos x+1560\cos^2 x+256\cos^3 x+8\cos^4 x}$$
$$=x-c.x^{17}\ldots$$

Pour $\sin x=1$, $\cos x=0$, on tire des deux dernières formules :

$$(6)\qquad x=1{,}570\,784=\tfrac{1}{2}\pi-0{,}000\,012=90^\circ-2'',5;$$

$$(7)\qquad x=1{,}570\,794\,4=\tfrac{1}{2}\pi-0{,}000\,002\,9=90^\circ-0'',6.$$

Posons de plus, d'abord $\sin x=0{,}6$ et $\cos x=0{,}8$, puis $\sin x'=0{,}8$ et $\cos x'=0{,}6$; les formules donneront :

$$(6)\quad \begin{cases} x=0{,}643\,501\,108\,783 & \text{(erreur } 1.10^{-11}=0'',000\,002\text{)},\\ x'=0{,}927\,295\,215\,3.\end{cases}$$

$$x+x'=1{,}570\,796\,324\,1=\tfrac{1}{2}\pi-22.10^{-10}=90^\circ-0'',000\,45.$$

$$(7)\quad \begin{cases} x=0{,}643\,501\,108\,793\,05 & \text{(erreur } 23.10^{-14}=0'',000\,000\,047\,4)\\ x'=0{,}927\,295\,217\,868\end{cases}$$
$$x+x'=1{,}570\,796\,326\,661=\tfrac{1}{2}\pi-134.10^{-12}$$
$$=90^\circ-0'',000\,027\,5.$$

La formule (7) donne encore pour $\sin x=\frac{1}{2}$, $\cos x=\frac{1}{2}\sqrt{3}$:

$$x=\frac{600\,847\,552-229\,694\,184\sqrt{3}}{140.279\,300\,1},\qquad \sqrt{3}=1{,}732\,050\,807\,568\,8;$$

donc

$$x=0{,}523\,598\,775\,587,\quad \tfrac{1}{6}\pi=0{,}523\,598\,775\,598.$$

Pour faire voir comment on a déduit ces formules, nous allons prouver (5). Posons

$$a_1\sin x+a_2\sin 2x+a_3\sin 3x=x\,(b_0+b_1\cos x+b_2\cos 2x+\cos 3x).$$

En substituant les séries aux fonctions trigonométriques et en égalant les coefficients des puissances de x à exposants égaux dans les deux membres de l'équation, on établit les équations qui suivent et dont le nombre est égal au nombre des coefficients inconnus :

$$\begin{gathered}
a_1+2a_2+3a_3=b_0+b_1+b_2+1,\\
a_1+8a_2+27a_3=3\,(b_1+4b_2+9),\\
a_1+32a_2+243a_3=5\,(b_1+16b_2+81),\\
a_1+128a_2+2187a_3=7\,(b_1+64b_2+729),\\
a_1+512a_2+19\,683a_3=9\,(b_1+256b_2+6561),\\
a_1+2048a_2+177\,147a_3=11\,(b_1+1024b_2+59\,049).
\end{gathered}$$

Pour résoudre ces équations linéaires, il suffit de retrancher chaque équation de celle qui la suit; il vient :

$$24a_2 + 216a_3 = 2b_1 + 68b_2 + 378,$$
$$96a_2 + 1944a_3 = 2b_1 + 368b_2 + 4698,$$
$$384a_2 + 17\,496a_3 = 2b_1 + 1856b_2 + 53\,946,$$
$$1536a_2 + 157\,464a_3 = 2b_1 + 8960b_2 + 590\,490.$$

La même méthode de soustraction, appliquée à ce système de quatre équations, donne :

$$72a_2 + 1728a_3 = 300b_2 + 4320,$$
$$288a_2 + 15\,552a_3 = 1488b_2 + 49\,248,$$
$$1152a_2 + 139\,968a_3 = 7104b_2 + 536\,544,$$

ou bien, après une division convenable,

$$6a_2 + 144a_3 = 25b_2 + 360,$$
$$6a_2 + 324a_3 = 31b_2 + 1026,$$
$$6a_2 + 729a_3 = 37b_2 + 2794{,}5.$$

Soustrayant encore, on obtient :

$$180a_3 = 6b_2 + 666, \quad 405a_3 = 6b_2 + 1768{,}5.$$

Donc, enfin,

$$225a_3 = 1102{,}5, \quad a_3 = 4{,}9.$$

Les autres coefficients se calculent successivement à l'aide des équations précédentes :

$$b_2 = 36, \quad a_2 = 92{,}4, \quad b_1 = 225, \quad a_1 = 262{,}5, \quad b_0 = 200,$$

et l'on est ainsi amené à établir la formule (5) de la suite C. Reste à déterminer le coefficient de la première puissance de x qui ne s'évanouit pas. Pour nous mettre en garde contre une erreur de calcul dans la solution des équations, nous développons séparément le dénominateur et le numérateur de (5) C en série, et nous aurons :

$$0{,}7\,(375 \sin x + 132 \sin 2x + 7 \sin 3x)$$
$$= 462x - 189x^3 + \frac{147}{4}x^5 - \frac{181}{40}x^7 + \frac{127}{160}x^9 - \frac{763}{28\,800}x^{11} + \frac{8\,569\,386}{13!}x^{13} - \ldots,$$
$$200 + 225 \cos x + 36 \cos 2x + \cos 3x$$
$$= 462 - 189x^2 + \frac{147}{4}x^4 - \frac{181}{40}x^6 + \frac{127}{160}x^8 - \frac{763}{28\,800}x^{10} + \frac{679\,122}{12!}x^{12} - \ldots$$

La division de la première somme par la seconde fournit enfin le quotient :

$$x - \frac{x^{15}}{11\,099\,088} \cdots$$

IV.

On peut encore chercher des formules qui contiennent la fonction tg$x$ *au lieu de* sin x, ce qui revient à faire $b_0 = 0$ dans les dénominateurs des fractions que nous avons considérées. Cependant les formules qui s'obtiennent de cette manière ne sont pas aussi propres à être employées dans des calculs numériques que les expressions comprises parmi les formules B et C, parce que les coefficients des plus petites puissances de x qui ne s'évanouissent pas, ne deviennent pas assez petits. On a, par exemple :

D.

(1) $$\tfrac{1}{3}\operatorname{tg} x + \tfrac{2}{3}\sin x = x + \tfrac{1}{20}x^5 \ldots,$$

(2) $$\tfrac{16}{15}\sin x - \tfrac{1}{5}\sin x \cos x + \tfrac{2}{15}\operatorname{tg} x = x + \tfrac{1}{105}x^7 + \cdots,$$

(3) $$\frac{3\operatorname{tg} x}{5 - 2\cos x} = x + \frac{29}{180}x^5 \ldots,$$

(4) $$\frac{(1 + 29\cos x)\operatorname{tg} x}{3(7 + 3\cos x)} = x + \frac{17}{8400}x^7 \ldots$$

V.

Exemples numériques. Pour avoir une idée de la grandeur relative de l'erreur qu'on commet en prenant le second membre des équations comme valeur de x, nous avons toujours calculé le premier terme de la série qu'il faudrait ajouter à x pour avoir une véritable équation. Mais il ne semble pas dépourvu d'intérêt de vérifier cette approximation préalable par des exemples numériques.

Pour éviter les irrationnelles, on peut choisir un triangle rectangle qui a ses côtés rationnels, par exemple le triangle pythagoricien avec les côtés 3, 4, 5. Faisons donc $\cos x = 0{,}8$, $\sin x = 0{,}6$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}$.

La série pour arc tg $\frac{1}{3}x$ fournit :

$$x = 2 \operatorname{arc\,tg} \tfrac{1}{3} = 0{,}643\,501\,108\,793\,284.$$

En se servant successivement des formules (1) ... (5) du tableau B, on trouve :

$x_1 = 0{,}642\,857$, erreur $0{,}000\,644$, soit $133''$,
$x_2 = 0{,}643\,478$, » $0{,}000\,022\,8$, » $4{,}''7$,
$x_3 = 0{,}643\,500$, » $0{,}000\,001\,109$, » $0{,}''23$,
$x_4 = 0{,}643\,501\,045$, » $0{,}000\,000\,064$, » $0{,}''013\,2$,
$x_5 = 0{,}643\,501\,104\,96$, » $0{,}000\,000\,004\,03$, » $0{,}''000\,8$.

La troisième formule de C donne :

$x_6 = 0{,}643\,501\,094$, erreur $0{,}000\,000\,015$, soit $0''003$

la cinquième de C :

$x_7 = 0{,}643\,501\,109\,29$, erreur $0{,}000\,000\,000\,5$, soit $0''0001$.

En mettant $\sin x = \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, on trouve à l'aide des mêmes formules (3) et (5) C ($\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562\,373$) :

$$\frac{\pi}{4} = 0{,}785\,398\,02 \text{ et } \frac{\pi}{4} = \frac{2927\sqrt{2} - 2048}{1864} = 0{,}785\,398\,157\,5,$$

tandis qu'on a effectivement

$$\frac{\pi}{4} = 0{,}785\,398\,163\,4.$$

L'erreur que comporte la formule approximative (5) C ne monte donc qu'à $0{,}''0012$.

L'influence qu'exerce la grandeur du coefficient du terme complémentaire dans le second membre des équations établies, peut être montrée par la formule (4) du tableau A. En substituant $\sin x = 0{,}6$, $\cos x = 0{,}8$, on trouve $x_8 = 0{,}643\,498\,7$ avec une erreur de $0{,}000\,002\,442\,1$, soit de $0{,}''5$, tandis que x_4 et x_6 qui ont été calculés au moyen de formules où le reste commence aussi avec un terme cx^{11}, sont affectés d'erreurs beaucoup moindres que $0{,}''5$.

VII. Appendice.

Les exemples que nous offrons au lecteur, ont été formés pour servir d'exercices dans la théorie des séries, en particulier sur la méthode des coefficients indéterminés. Nous demandons la permission d'ajouter à ces problèmes deux autres qui se sont présentés dans des questions d'une nature différente.

1. *Développer en série, par un procédé formel, une racine de l'équa-*

tion $y^n = xy + 1$, *à laquelle se réduit aisément l'équation trinome* $y^n = ay + b$.

Solution.

$$y = 1 + \frac{x}{n} - \frac{n-3}{2!}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{(n-4)(2n-4)}{3!}\left(\frac{x}{n}\right)^3 - \frac{(n-5)(2n-5)(3n-5)}{4!}\left(\frac{x}{n}\right)^4 + \frac{(n-6)(2n-6)(3n-6)(4n-6)}{5!}\left(\frac{x}{n}\right) - \cdots$$

Soit $n = 3$:

$$y = 1 + \frac{x}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^4 - \frac{4}{9}\left(\frac{x}{3}\right)^6 + \frac{5}{9}\left(\frac{x}{3}\right)^7 \cdots$$

2. *Retrancher, par une corde, la* $n^{ième}$ *partie de l'aire d'un cercle; déterminer l'angle au centre* $2x$ *correspondant à la corde.*

L'angle x se détermine par l'équation transcendante :

$$x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{n}\pi = 0.$$

Posant $\frac{\pi}{n} = \varphi^3$, faisons :

$$x = c_1\varphi + c_3\varphi^3 + c_5\varphi^5 + \cdots$$

On trouvera

$$c_1^3 = \frac{3}{2}, \quad c_3 = \frac{1}{10}, \quad c_5 = \frac{9}{350}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}, \quad c_7 = \frac{1}{175}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}, \ldots$$

Pour rendre le calcul numérique plus facile, on peut encore écrire :

$$\Psi = \varphi\sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{2n}},$$

alors la série pour x se mettra sous la forme

$$x = \Psi + \frac{1}{15}\Psi^3 + \frac{1}{87{,}5}\Psi^5 + \frac{1}{393{,}75}\Psi^7 + \cdots,$$

équation d'où l'on peut tirer une valeur approchée de x. Pour $n = 4$ on trouve, par exemple, $x = 1{,}15344 = 66°5'15'$. La méthode de Newton donne alors la correction 5'8'',6; il en résulte $x = 66°10'23'',6$. Dans Euler, *Introductio in analysin*, Vol. II, on lit: $x = 66°10'23'',57$.

SUR LES CERCLES RADICAUX ET ANTIRADICAUX(*),

par M. Juan J. Duran Loriga, Commandant d'artillerie à la Corogne.

1. Dans une première note (*Mathesis*, 1896, p. 105), nous avons appelé circonférence radicale de deux cercles donnés (O, R), (O', R')(**) le lieu des points dont les puissances par rapport aux cercles donnés sont égales et de signes contraires. Ce lieu est le cercle qui a pour centre le milieu ω du segment $OO' = d$ et pour rayon la quantité

$$\rho = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(R^2 + R'^2) - d^2}.$$

Les trois cercles O, O', ω ont le même axe radical (ou les deux mêmes points d'intersection, réels ou imaginaires). Lorsque les cercles donnés O, O' sont orthogonaux et se coupent en A et A', leur cercle radical passe par les quatre points A, A', O, O'.

2. Le cercle O' peut être appelé le *cercle antiradical* du cercle O par rapport au cercle ω. Soient U, U', u les premiers membres des équations des trois circonférences sous la forme $x^2 + y^2 + 2Ax + \cdots$; nous avons

$$u \equiv \tfrac{1}{2}(U + U'), \quad \text{d'où } U' \equiv 2u - U.$$

Le cercle antiradical est donc le lieu des points dont les puissances par rapport aux cercles donnés sont l'une double de l'autre. Le centre O' est le symétrique de O par rapport à ω, et

$$R' = \sqrt{2(\rho^2 + \delta^2) - R^2},$$

où δ représente la distance $O\omega$. La circonférence O' se réduit à un point lorsque $\rho^2 = \frac{1}{2}R^2 - \delta^2$.

3. Etant donnés une circonférence (O, R) et un point extérieur ω, pour trouver l'antiradical du cercle O par rapport à ω, menons de ω les tangentes ωT, ωT_1, et élevons en ω sur ωO les perpendiculaires $\omega U = \omega U_1 = \omega T$; la circonférence cherchée a pour centre le symétrique O' de O par rapport à ω et elle passe par les points U et U_1.

Inversement, si l'on donne un cercle O' et un point intérieur ω, on

---

(*) L'auteur a envoyé cette note simultanément au *Journal de mathématiques élémentaires* et à *Mathesis*. L'article ayant paru *in extenso* dans le premier Recueil, nous nous contentons de le résumer ici. (Rédaction).

(**) Cercle (O, R) signifie : cercle de centre O et de rayon R.

mène la corde UU_1 perpendiculaire en ω sur $O'\omega$; l'antiradicale de la circonférence O' par rapport au point ω coupe orthogonalement la circonférence $(\omega, \omega U)$.

Les rayons R, R' vérifient la relation

$$2(R^2 + R'^2) = \overline{OO'}^2, \quad \text{ou} \quad \overline{OO'}^2 = (R + R')^2 + (R' - R)^2.$$

On en déduit que la tangente commune extérieure $MM' = R + R'$, que la tangente commune intérieure $NN' = R' - R$. Supposons les points M, M', N situés d'un même côté de la ligne des centres OO', et désignons par $M_1M'_1$, $N_1N'_1$ les deux autres tangentes communes. Les tangentes MM' et NN' sont rectangulaires et se coupent sur TT_1; il en est de même de $M_1M'_1$ et $N_1N'_1$. Les tangentes MM' et $N_1N'_1$, $M_1M'_1$ et NN' sont rectangulaires et se coupent sur UU_1. Les points M, N_1, N', M'_1 sont sur une droite passant par le milieu P de la corde TT_1 et inclinée de 45° sur OO'; les points M_1, N, N'_1, M' sont sur une seconde droite passant par P et faisant avec OO' l'angle de 45°.

L'équation de la circonférence O' est

$$x^2 + y^2 - 4dx + 2d^2 + R^2 = 0,$$

les axes coordonnés étant $O\omega$ et une perpendiculaire en O; d désigne la distance $O\omega$. Si l'on fait varier ω sur la droite Ox, l'enveloppe de la circonférence O' est l'hyperbole équilatère représentée par l'équation

$$x^2 - y^2 = R^2.$$

Si le cercle O lui-même se réduit à un point, l'enveloppe du cercle O' se change en un système de deux droites.

4. Considérons de nouveau un cercle quelconque (O, R) et son cercle antiradical (O', R') par rapport à un point donné ω. Soient H, K les points où le second cercle coupe la ligne des centres OO'. Tous les cercles passant par H et K forment un faisceau φ, tel que les puissances de ω par rapport à l'un de ces cercles et au cercle O sont égales et de signes contraires; donc les cercles radicaux du cercle O combiné avec l'un des cercles du faisceau φ ont leurs centres sur la droite UU_1 et passant par ω.

5. Considérons deux cercles-points O et ω. Soient O' le symétrique de O par rapport à ω, et ωU, ωU_1 les perpendiculaires élevées en ω sur ωO et égales à ωO. Le cercle antiradical du point O par rapport au point ω a pour centre O' et pour rayon $O'U = O\omega\sqrt{2}$.

O et ω sont les points-limites d'un faisceau de cercles ayant pour axe

radical la perpendiculaire au milieu de la droite Oω; le cercle O′ fait partie de ce faisceau. De là résulte le théorème suivant :

Le polaire d'un point quelconque A *par rapport au cercle* O′ *passe par le point d'intersection* B *des perpendiculaires élevées en* O *et* ω *sur les droites* AO *et* Aω.

Si le point A appartient à la circonférence O′, B se trouve sur la tangente en A. Les points A et B satisfont à une transformation qui a été étudiée par MM. D'Ocagne et Neuberg (*Société Royale des Sciences de Liége*, 2e série, t. XVI).

6. Supposons maintenant le cercle (O′, R′) donné. Les points O et ω ont pour lieux géométriques deux circonférences de même centre O et de rayons $R'\sqrt{2}$ et $\frac{R'}{\sqrt{2}}$; nous dirons que les points sont *radicalement associés* au cercle O′. De même, les cercles, lieux de ces points, sont dits *radicalement associés* au cercle O′.

La proposition énoncée ci-dessus (5) donne la propriété suivante :

Si l'on joint à un point fixe A *deux points quelconques* O, ω *radicalement associés à un cercle* O′, *les perpendiculaires élevées en* O *sur* AO *et en* ω *sur* Aω *se coupent sur une droite fixe, qui est la polaire de* A *par rapport au cercle* O′.

7. La notion des cercles radicaux et antiradicaux, ainsi que nous l'avons déjà montré, trouve des applications intéressantes dans la géométrie du triangle. Nous allons développer un exemple.

Soit ABC un triangle fondamental, et appelons C_1, A_1, B_1 les cercles radicaux des points A, B, C respectivement par rapport aux points B, C, A. On sait que l'équation d'un cercle, en coordonnées barycentriques a la forme

$$(\alpha+\beta+\gamma)(u\alpha+v\beta+w\gamma)-(a^2\beta\gamma+b^2\gamma\alpha+c^2\alpha\beta)=0,$$

u, v, w désignant les puissances des sommets A, B, C par rapport à ce cercle. Comme $C_1B = BA$ et que le rayon du cercle C_1 a pour valeur $c\sqrt{2}$, l'équation du cercle C_1 est

$$(\alpha+\beta+\gamma)[2c^2\alpha-c^2\beta+(2a^2-b^2)\gamma]-(a^2\beta\gamma+b^2\gamma\alpha+c^2\alpha\beta)=0;$$

celles des cercles A_1, B_1 s'en déduisent par une permutation tournante.

Le centre radical de ces cercles a pour coordonnées a^2p_a, b^2p_b, c^2p_c, où $p_a = b^2+c^2-a^2, \ldots$; il coïncide donc avec le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC.

La puissance du point O par rapport au cercle A_1 est égale à

$$\overline{OA_1}^2 - 2a^2 = (R^2 + 2a^2) - 2a^2 = R^2;$$

donc le cercle circonscrit au triangle ABC coupe orthogonalement les cercles A_1, B_1, C_1. Ce résultat pouvait être prévu : en effet, le cercle A_1 fait partie d'un faisceau qui a pour points limites B et C; donc il est coupé orthogonalement par tous les cercles qui passent par ces points.

Les polaires du point O par rapport aux cercles A_1, B_1, C_1 passent respectivement par les pôles A', B', C' des côtés BC, CA, AB par rapport au cercle ABC; elles partagent ces côtés en segments qui sont entre eux comme 2 : 1. La polaire de A par rapport au centre A_1 passe par la seconde extrémité du diamètre OA du cercle ABC.

Les points B et C étant inverses par rapport au cercle A_1, les extrémités de toute corde menée par C, et les points B et A_1 appartiennent à une même circonférence.

La circonférence A_1 est le lieu des points M tels, que l'on ait

$$\overline{MB}^2 = 2\overline{MC}^2.$$

Les cercles radicaux du cercle ABC par rapport aux cercles A_1, B_1, C_1 ont pour diamètres les droites OA_1, OB_1, OC_1.

Les puissances de C par rapport au cercle de Neuberg N_e et au cercle A_1 sont égales et de signes contraires. On en conclut que le cercle radical de ces cercles passe par C; il a pour équation

$$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[2b^2-c^2)\alpha + 3a^2\beta] - (a^2\beta\gamma + b^2\gamma\alpha + c^2\alpha\beta) = 0,$$

et son rayon résulte de la formule

$$\rho = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(R^2+R'^2) - d^2},$$

où l'on fait

$$R = a\sqrt{2}, \quad R' = \frac{a}{2}\sqrt{\cot^2\omega - 3}, \quad d = \frac{a}{2}\sqrt{9+\cot^2\omega},$$

ce qui donne l'expression très simple

$$\rho = \tfrac{1}{4}a \operatorname{cosec}\omega.$$

Les axes radicaux des cercles de Neuberg et des cercles A_1, B_1, C_1 passent par les sommets du premier triangle de Brocard et partagent respectivement BC, CA, AB dans le rapport 2 : 1.

Les polaires du point de Tarry par rapport aux cercles A_1, B_1, C_1 concourent au point de Steiner.

Rappelons ici la relation bien connue :

$$\overline{A_1B_1}^2 + \overline{B_1C_1}^2 + \overline{C_1A_1}^2 = 7(a^2 + b^2 + c^2).$$

Si $c^2 = 2b^2$, le cercle A_1 devient le cercle d'Apollonius.

On obtient un second groupe de cercles remarquables en prenant les cercles radicaux A_2, B_2, C_2 des points C, A, B respectivement par rapport aux points B, C, A. Les cercles N_e, A_1 et A_2 ont pour centre radical le sommet (a^2, c^2, b^2) du premier triangle de Brocard.

NOTES MATHÉMATIQUES.

×**26.** *Sur quatre cercles tangents deux à deux* M. Mathot nous communique le théorème suivant:

Lorsque quatre cercles A,B,C,D, *se touchent deux à deux, les droites qui joignent le point de contact de deux de ces cercles au point de contact des deux autres concourent en un même point.*

Notre correspondant démontre cette proposition au moyen d'une inversion ayant pour pôle l'un des points de contact.

Plus généralement, *étant donnés quatre cercles quelconques* A,B,C,D, *les droites qui joignent le centre de similitude interne de deux de ces cercles à celui des deux autres concourent en un même point.*

Cette propriété résulte des diverses constructions qu'on peut donner du centre de gravité des quatre centres chargés de masses inversement proportionnelles aux rayons correspondants. (J. N.).

27. *Equation focale des coniques.* Voici un procédé bien simple, quoique peut-être *inédit*, pour déduire la directrice des deux foyers.

Soient (α, β), (α', β') les coordonnées des deux foyers d'une ellipse de grand axe $2a$. L'équation de l'ellipse est donc

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} + \sqrt{(x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2} = 2a.$$

En faisant disparaître le second radical, on met cette équation sous la forme

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \frac{1}{16a^2}[2(\alpha-\alpha')x + 2(\beta-\beta^2)y + \alpha'^2 + \beta'^2 - \alpha^2 - \beta^2 - 4a^2]^2,$$

ce qui est bien l'équation focale

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (mx + ny + h)^2. \qquad \text{(E. N. Barisien).}$$

×**28**. *Construction du pentagone régulier, d'après* SCHROETER. Soient AB, CD deux diamètres à angle droit dans une circonférence de centre O; $Cc = 4AO$ une parallèle à AB, $Dd = BO$ une parallèle à BA; *cd* une droite rencontrant la circonférence en E et F; CE, CF des droites coupant AB en *e* et *f*. Par ceux-ci, menons les cordes 3*e*4, 2*f*5 perpendiculaires à AB. La figure A2345 est un pentagone régulier (CAYLEY, *Math., Pap.*, 1897, t. XII, n° 809, ou *Mess. of Math.*, 1883, XII, 177).

×**29**. *Tangentes communes à deux cercles* R *et* R'. Appelons *d* la distance des centres. Prenons une droite quelconque *l* du plan; menons d'abord, à la droite *l*, une circonférence tangente en un point quelconque et de rayon R; ensuite menons à *l* une circonférence tangente de rayon R', et telle que la distance des centres soit *d*. Cela se fait en menant, de part et d'autre de *l*, une parallèle, à la distance R', et en coupant ces droites par une circonférence concentrique à la première et de rayon *d*.

Ce problème inverse étant résolu et donnant en général deux solutions, on peut prendre chacune des figures obtenues et la faire coïncider, de deux manières, avec la figure donnée. En pratique, il suffit de former, dans la figure donnée, un angle égal à celui qui est compris, dans l'autre figure, entre la ligne des centres et le rayon mené à un point de contact.

On peut prendre une position spéciale de la droite *l*, de manière à simplifier les constructions; notamment si on choisit *l* tangente à la circonférence donnée R et parallèle ou perpendiculaire à la ligne des centres, on arrive à deux constructions assez élégantes, dont l'une au moins est connue. (M. STUYVAERT).

×**30**. *Sur Wolfgang et Jean Bolyai.* 1° On vient de trouver une *Theoria parallelorum* envoyée en 1804 par W. Bolyai (1775-1856) à Gauss (1777-1855), son condisciple et son ami.

2° Le célèbre opuscule de Jean Bolyai (1802-1860), fils du précédent, sur la géométrie non euclidienne, publié sous le titre : *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens : a veritate aut falsitate axiomatis XI Euclidei* (*a priori haud unquam decidenda*) *independentem*; *adjecta, ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica*, à la suite du tome premier de l'ouvrage de son père(*) est une traduction d'un écrit hongrois

(*) *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris introducendi.* (Maros-Vasarhely, t. I, 1832; t. II, 1833). L'Académie

datant de 1823, et communiqué en manuscrit, à J. W. von Eckwehr, en 1825.

3° On va enfin faire paraître les lettres de Gauss à W. Bolyai (D'après diverses communications de M. HALSTED)(*). (P. M.)

31. *Propriété focale des coniques à centre.* Si deux triangles directement semblables ont un sommet homologue commun, le second point d'intersection de leurs cercles circonscrits est le point d'intersection des droites qui joignent deux à deux les autres sommets homologues.

Cette propriété résulte de la solution du problème : Trouver le point double de deux polygones directement semblables (CASEY, *Géométrie récente*, voir *Mathesis* (1) IX, p. 13). Ou bien, c'est la réciproque du théorème connu : Les sécantes menées par un des points de rencontre de deux circonférences sont vues, du second point d'intersection, sous un angle constant; cette réciproque se démontre par réduction à l'absurde.

Enfin, la propriété peut encore s'énoncer sous la forme suivante : Si les droites MF, MF' sont isogonales relativement à l'angle AMB, et si l'on a

$$MA \cdot MB = MF \cdot MF',$$

les circonférences MAF, MBF' passent par le point de rencontre C de AF' et BF.

Or ces conditions sont réalisées si F, F' sont les foyers d'une conique, MA et MB deux tangentes à la courbe, A le point de contact de l'une, et B le point où l'autre rencontre la tangente parallèle à la première (Voir *Mathesis* (2) VI, p. 129; nous n'avions pas remarqué que la propriété démontrée à cet endroit est un cas particulier de la *Question* 1107 posée par M. E. P. Rouse, résolue (2) VI, p. 260). (M. STUYVAERT).

---

hongroise en publie actuellement une nouvelle édition. C'est un cours original de mathématiques comprenant l'arithmétique, l'algèbre, l'analyse infinitésimale, la géométrie, la trigonométrie, les sections coniques, la perspective, la gnomonique et la chronologie.

(*) *Postscriptum.* Ces lettres et la *Theoria parallelorum* de W. Bolyai viennent de paraître dans les *Mathematische Annalen*, t. 49, pp. 149-206.

SOLUTION DES QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 1017.

(Voir *Mathesis*, (2) V, p. 104).

Démontrer que les nombres 16,1156,111556, etc. que l'on obtient en intercalant le nombre 15 dans le terme précédent de la suite, sont des carrés parfaits. (MONTANARI).

On peut trouver d'autres théorèmes analogues. Par exemple, les nombres suivants sont carrés parfaits :

49, 4489, 444889, 44448889, etc.
729, 71289, 7112889, 711128889, etc.

Solution par M. VAN DEUREN. 1° Considérons un nombre composé de n chiffres 1, suivis de $(n-1)$ chiffres 5 et d'un chiffre 6.

Si nous appelons A le nombre formé de n chiffres égaux à 1, le nombre proposé est

$$A.10^n + 5A + 1 = A(9A+1) + 5A + 1 = 9A^2 + 6A + 1 = (3A+1)^2.$$

2° $(6A+1)^2$ nous conduit successivement à

$$36A^2 + 12A + 1 = 4A(9A+1) + 8A + 1 = 4A.10^n + 8A + 1$$

ce qui démontre que $\overline{4444}^{n}.\overline{8889}^{n}$ est carré parfait.

3° $$7\,\overline{111\cdots1}^{n}\,2\,\overline{888\cdots8}^{n}\,9$$

peut se décomposer en

$$7.10^{2n+2} + A.10^{n+2} + 2.10^{n+1} + 80A + 9$$
$$= 700(9A+1)^2 + 100A(9A+1) + 20(9A+1) + 80A + 9$$
$$= 57600A^2 + 12960A + 729 = (240A+27)^2,$$

carré parfait.

Solution par MM. DROZ FARNY, COLART, J. JONESCO *et* HACKEN.

1° $$\overline{11\cdots1}^{n}\,\overline{55\cdots56}^{n-1} = \frac{10^n-1}{9}\cdot 10^n + 5\frac{10^n-1}{9} + 1$$
$$= \frac{10^{2n}+4.10^n+4}{9} = \left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2.$$

2° $$\overline{44\cdots4}^{n}\,\overline{88\cdots89}^{n-1} = 4\frac{10^n-1}{9}.10^n + 8\frac{10^n-1}{9} + 1$$
$$= \frac{4.10^{2n}+4.10^n+1}{9} = \left(\frac{2.10^n+1}{3}\right)^2,$$

3° $$7\,\overbrace{11\cdots1}^{n}\,2\,\overbrace{88\cdots8}^{n}\,9$$

$$=7.10^{2n+2}+\frac{10^n-1}{9}\,10^{n+2}+2.10^{n+1}+8\frac{10^n-1}{9}.10+9$$

$$=\frac{64.10^{2n+2}-10^{n+2}+26.10^{n+1}+1}{9}=\left(\frac{8.10^{n+1}+1}{3}\right)^2.$$

Solution par M. MANDART. 1° Les nombres des deux premières suites sont de la forme $\overline{aa\overbrace{\ldots}^{n}a\,\overbrace{bb\ldots}^{n-1}bc}$, ou

$$a\frac{10^n-1}{9}\cdot10^n+b\frac{10^n-1}{9}+c-b$$

$$=\frac{a.10^{2n}+(b-a).10^n+(9c-10b)}{9}.$$

Ils sont carrés parfaits lorsque a et $9c-10b$ sont carrés parfaits, et que l'on a

$$(b-a)^2=4a(9c-10b) \quad \text{ou} \quad b=-19a+6\sqrt{a(10a+c)}$$

En prenant $a=1, 4, 9$ et cherchant ensuite les valeurs de c pour lesquelles $10a+c=10+c$, $40+c$ ou $90+c$ est carré parfait, on voit que les seules solutions sont

$$a=1,\ c=6,\ b=5, \text{ et } a=4,\ c=9,\ b=8.$$

2° Les nombres de la troisième suite sont de la forme

$$7\,\overbrace{aa\ldots a}^{n}\,2\,\overbrace{bb\ldots b}^{n}\,9=\frac{(63+a).10^{2n+2}+(b-10a+18).10^{n+1}+81-10b}{9}$$

On aura un carré parfait si les nombres $63+a$, $81-10b$ sont des carrés parfaits, ce qui exige $a=1$, $b=8$, et ensuite

$$(b-10a+18)^2=4(63+a)(81-10b),$$

ce qui a lieu.

M. HACKEN indique encore la démonstration suivante. Supposons, par exemple, qu'on ait vérifié l'égalité

$$7\,\overbrace{11\ldots1}^{n-1}\,2\,\overbrace{88\ldots8}^{n-1}\,9=(2\,\overbrace{66\ldots6}^{n-1}\,7)^2.$$

On en déduit

$$7\,\overbrace{11\ldots1}^{n-1}\,2\,\overbrace{88\ldots8}^{n-1}\,900=(2\,\overbrace{66\ldots6}^{n-1}\,70)^2=(2\,\overbrace{66\ldots6}^{n}\,7+3)^2$$

$$=(2\,\overbrace{66\ldots6}^{n}\,7)^2+6.2\,\overbrace{66\ldots6}^{n}\,7+9=(2\,\overbrace{66\ldots6}^{n}\,7)^2+16\,\overbrace{00\ldots0}^{n}\,2+9,$$

$$7\,\overbrace{11\ldots1}^{n-1}\,2\,\overbrace{88\ldots8}^{n-1}\,900-16\,\overbrace{00\ldots0}^{n-1}\,11=(2\,\overbrace{66\ldots6}^{n}\,7)^2;$$

le premier membre de cette égalité ayant la forme $7\,\overbrace{11\ldots1}^{n}\,2\,\overbrace{88\ldots8}^{n}\,9$, le théorème est démontré.

Question 1022.

(Voir *Mathesis*, (2) V, p. 128).

On donne une surface quelconque S, *un point* O *et un ellipsoïde* ε. M *étant un point quelconque de* S, *on construit un ellipsoïde* E *homothétique à* ε, *passant par* O *et ayant son centre au milieu de la droite* OM. *Démontrer que le point de contact* N *de l'ellipsoïde* E *avec son enveloppe est situé dans le plan tangent* T *mené en* M *à* S *et que la droite* ON *est parallèle au diamètre conjugué avec le plan* T *dans l'ellipsoïde* E.

(Desaint.)

Solution par M. Mandart. Prenons pour plans coordonnés des plans parallèles aux plans principaux de ε et menés par O.

Soient $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface S, (α, β, γ) un point M de cette surface; a, b, c les demi-axes de l'ellipsoïde ε. L'équation de l'ellipsoïde E est

$$\frac{\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y-\frac{\beta}{2}\right)^2}{b^2}+\frac{\left(z-\frac{\gamma}{2}\right)^2}{c^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right),$$

ou

$$\frac{(x-\alpha)x}{a^2}+\frac{(y-\beta)y}{b^2}+\frac{(z-\gamma)z}{c^2}=0, \tag{1}$$

α, β, γ satisfaisant à la relation

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 0. \tag{2}$$

Différentions les équations (1) et (2) par rapport aux variables α, β, γ; on obtient les suivantes :

$$\frac{x}{a^2}d\alpha+\frac{y}{b^2}d\beta+\frac{z}{c^2}d\gamma=0, \tag{3}$$

$$\frac{dF}{d\alpha}d\alpha+\frac{dF}{d\beta}d\beta+\frac{dF}{d\gamma}d\gamma=0. \tag{4}$$

Le point de contact N de l'ellipsoïde avec son enveloppe étant indépendant de $d\alpha, d\beta, d\gamma$, les équations (3) et (4) doivent se réduire à une seule; donc

$$\frac{\frac{x}{a^2}}{\frac{dF}{d\alpha}}=\frac{\frac{y}{b^2}}{\frac{dF}{d\beta}}=\frac{\frac{z}{c^2}}{\frac{dF}{d\gamma}};$$

ces équations représentent la droite ON. Si nous les combinons avec celle de l'ellipsoïde ε, nous trouvons en remplaçant $\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}$ par des quantités proportionnelles :

$$(x-\alpha)\frac{dF}{d\alpha}+(y-\beta)\frac{dF}{d\beta}+(z-\gamma)\frac{dF}{d\gamma}=0 \qquad (5)$$

équation d'un plan tangent en M à la surface S; on voit donc qu'il contient le point N.

D'un autre côté, si nous cherchons l'équation du plan diamétral conjugué à la droite ON, nous avons

$$\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{dF}{d\alpha}+\left(y-\frac{\beta}{2}\right)\frac{dF}{d\beta}+\left(z-\frac{\gamma}{2}\right)\frac{dF}{d\gamma}=0,$$

plan évidemment parallèle au plan tangent en M à la surface M, représenté par l'équation (5).

Autre solution par M. Tzitzéica et par M. J. Jonesco.

Question 1025.

(Voir *Mathesis* (2), V, p. 152).

La tangente en un point M *quelconque d'une cissoïde droite rencontre la courbe en un autre point* P. *Le lieu du milieu* Q *de* MP *est une courbe fermée dont l'aire est les* $\frac{3}{8}$ *de l'aire du cercle ayant pour diamètre la distance du sommet de la cissoïde à son asymptote.* (E. N. Barisien.)

Solution par M. Mandart. Si l'on combine les équations

$$y^2(a-x)=x^3, \quad x=ty,$$

on trouve les *équations paramétriques* de la cissoïde

$$y=\frac{a}{t(1+t^2)}, \quad x=\frac{a}{1+t^2}.$$

Substituons les valeurs de x et y dans $ux+vy+w=0$, équation d'une droite ; nous aurons

$$aut+av+wt(1+t^2)=0,$$

de sorte que les paramètres t, t_1, t_2 de trois points de la cissoïde situés sur une même droite vérifient l'équation

$$t+t_1+t_2=0.$$

Si cette droite est tangente au point M, nous aurons $t_1 = t$, $t_2 = -2t$; donc le *tangentiel* P de M a pour coordonnées

$$y = \frac{-a}{2t(1+4t^2)}, \quad x = \frac{a}{1+4t^2},$$

et le milieu Q de MP,

$$y = \frac{a}{4t}\left(\frac{2}{1+t^2} - \frac{1}{1+4t^2}\right), \quad x = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{1+4t^2}\right).$$

La courbe (Q) est symétrique par rapport à l'axe Ox; elle passe par O et par le point A où l'asymptote rencontre Ox. Appelons S l'aire comprise entre la droite OA et la partie *supérieure* de la courbe (Q). Les points de cette partie sont définis par les dernières formules où l'on fait varier t de ∞ à 0. On a

$$dS = ydx = -\frac{a^2}{4}\left(\frac{2}{1+t^2} - \frac{1}{1+4t^2}\right)\left(\frac{1}{(1+t^2)^2} + \frac{4}{(1+4t^2)^2}\right)dt;$$

par suite,

$$\frac{4S}{a^2} = \int_0^\infty \frac{2dt}{(1+t^2)^3} + \int_0^\infty \frac{8dt}{(1+t^2)(1+4t^2)^2} - \int_0^\infty \frac{dt}{(1+4t^2)(1+t^2)^2} - \int_0^\infty \frac{4dt}{(1+4t^2)^3}.$$

La première et la dernière intégrale sont égales, comme on peut le voir soit en remplaçant dans la première t par $2t$, soit en observant que les deux intégrales représentent les aires comprises entre OA, l'asymptote et respectivement les courbes engendrées par les points M et P. En réunissant les deux autres intégrales on trouve

$$\frac{4S}{a^2} = \int_0^\infty \frac{7+4t^2}{(1+t^2)^2(t+4t^2)^2}\,dt.$$

Si l'on considère t^2 comme la variable, on peut décomposer la fraction sous le signe ainsi :

$$\frac{A}{1+t^2} + \frac{B}{(1+t^2)^2} + \frac{C}{1+4t^2} + \frac{D}{(1+4t^2)^2};$$

un calcul facile donne

$$A = \frac{4}{3}, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = -\frac{16}{3}, \quad D = \frac{32}{3}.$$

$\frac{4S}{a^2}$ dépend ainsi de quatre intégrales, dont les deux dernières se ramènent aux deux premières par le changement de t en $\frac{1}{2}t$; on obtient

$$\frac{4S}{a^2} = -\frac{4}{3}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} + \frac{17}{3}\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^2},$$

d'où finalement

$$\frac{4S}{a^2} = \frac{3}{4}\pi, \quad 2S = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

Note. Désignons par Δ la branche de la cissoïde située au-dessus de l'axe OA, par Δ' l'autre branche, par δ l'asymptote, par Σ et Σ' les deux parties de la courbe (Q) séparées par l'axe OA.

Faisons parcourir au point M la branche Δ; P et Q décriront respectivement Δ' et Σ. Menons par un point fixe I une droite Ip constamment égale et parallèle à MP et soit q le milieu de Ip. D'après un théorème de Steiner, les droites MP et Ip engendrent des aires égales; il en est de même des aires engendrées par MQ et Iq. On en conclut que l'aire comprise entre Δ, Σ et δ vaut le quart de celle qui est limitée par Δ, Δ' et δ, ou la moitié de celle qui limitée par Δ, OA et δ; par suite, l'aire comprise entre Σ et Σ' est égale à l'aire comprise entre Δ, OA et δ.

Bien que cette dernière soit connue, nous allons indiquer un moyen facile de l'obtenir. Menons par O une droite quelconque qui rencontre δ et Δ en T et M, et la circonférence de diamètre OA en N; en posant OM $= \rho$, ON $= r$, OT $= r'$, angle MOA $= \omega$, on a

$$\tfrac{1}{2}\int \rho^2 d\omega = \tfrac{1}{2}\int (r'-r)^2 d\omega = \tfrac{1}{2}\int r'^2 d\omega + \tfrac{1}{2}\int r^2 d\omega - \int a^2 d\omega,$$

d'où

$$\tfrac{1}{2}\int r'^2 d\omega - \tfrac{1}{2}\int \rho^2 d\omega = \int a^2 d\omega - \tfrac{1}{2}\int r'^2 d\omega.$$

Si l'on intègre entre $\omega = 0$ et $\omega =$ MOA, le premier membre de cette égalité représente l'aire comprise entre OA, AT et l'arc OM de Δ; le second représente l'excès du quadruple du secteur circulaire AO'N (O' désignant le centre du cercle ONA) sur l'aire comprise entre les droites OA, ON et l'arc de cercle AN. Lorsque OM devient parellèle à δ, nous voyons que l'aire comprise entre Δ, OA et δ est égale à trois fois le demi-cercle ONA. (J. N.)

Questions 1026 et 1028.

(Voir *Mathesis*, (2) V, p. 152).

1026. *Par un point* P *dans le plan d'une conique on mène une corde quelconque* AB, *et sur celle-ci comme diamètre, on construit une circonférence* (AB) *qui coupe l'ellipse en deux nouveaux points* C, D.

1° *La droite* CD *passe par un point fixe* Q.

2° *Le point d'intersection des droites* AB, CD *se meut sur l'hyperbole d'Apollonius relative à* P.

3° *La polaire de* P *par rapport au cercle* AB *enveloppe une parabole.*

4° *Le centre des moyennes distances des points* A, B, C, D *décrit une conique.*

5° *Le cercle* AB *enveloppe une quartique.* (Déprez).

1028. *Par un point* P *donné dans le plan d'une conique on mène deux cordes orthogonales* AB, A'B'(*).

1° *L'axe radical des cercles* (AB) *et* (A'B') *décrits sur* AB *et* A'B' *comme diamètres passe par un point fixe.*

2° *Le pied de l'axe radical décrit une circonférence.* (Déprez).

Solution par M. A. Gob. Prenons pour axes coordonnés des parallèles menées par P aux axes de la conique donnée. L'équation de cette courbe sera :

$$Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Désignons par α l'angle que forme la droite AB avec l'axe des x. Les rayons vecteurs $PA = \rho_1$ $PB = \rho_2$ seront les racines de l'équation :

$$\rho^2(A \sin^2\alpha + C \cos^2\alpha) + \rho(D \sin \alpha + E \cos \alpha) + F = 0.$$

On en déduit l'équation du cercle (AB) :

$$\left(x - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}\cos\alpha\right)^2 + \left(y - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}\sin\alpha\right)^2 = \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{2}\right)^2,$$

ou

$$(x^2 + y^2)(A \sin^2\alpha + C \cos^2\alpha) + (x \cos\alpha + y \sin\alpha)(D \sin\alpha + E \cos\alpha) + F = 0. \quad (1)$$

La forme de cette équation montre que le cercle (AB) coupe orthogo-

(*) Nous avons légèrement modifié les notations, afin de pouvoir réunir les deux questions.

nalement un cercle fixe (**). En effet, la puissance d'un point quelconque R (x, y) par rapport à ce cercle est :

$$p = x^2 + y^2 + \frac{(x\cos\alpha + y\sin\alpha)(D\sin\alpha + E\cos\alpha) + F(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{A\sin^2\alpha + C\cos^2\alpha}.$$

Ecrivons cette égalité ainsi :

$$\sin^2\alpha\,[A(x^2+y^2-p) + Dy + F] + \cos^2\alpha\,[C(x^2+y^2-p) + Ex + F] + \sin\alpha\cos\alpha\,(Dx + Ey) = 0.$$

Pour qu'elle soit vérifiée quel que soit α, nous devons avoir :

$$A(x^2+y^2-p) + Dy + F = 0, \quad C(x^2+y^2-p) + Ex + F = 0, \quad Dx + Ey = 0, \tag{2}$$

équations qui contiennent trois inconnues x, y, p. Si l'on élimine $(x^2 + y^2 - p)$, on obtient

$$CDy - AEx = F(A - C). \tag{3}$$

Le point d'intersection R des droites représentées par les équations (2) et (3) est donc de puissance constante par rapport aux cercles (AB). De là, les conséquences suivantes :

1° L'axe radical de deux quelconques des cercles (AB) passe par R; ce qui généralise la 1re partie de la question 1028.

2° L'enveloppe du cercle (AB) est une anallagmatique. Le lieu du milieu de la corde AB, c'est-à-dire la courbe déférente étant une conique (c), l'anallagmatique est du 4e degré.

3° Soient α et α' les milieux des cordes perpendiculaires AB et A'B'. Ces points appartiennent à la conique (c), de même que le point P. Dans cette conique, les cordes Pα, Pα' étant rectangulaires, la droite $\alpha\alpha'$ passe par un point fixe S de la normale au point P. Le pied de l'axe radical des cercles (AB) et (A'B') décrit donc la circonférence ayant pour diamètre RS.

4° Le conjugué harmonique de P par rapport à AB décrit la polaire Δ de P par rapport à la conique donnée. Donc la polaire de P par rapport au cercle (AB) a pour enveloppe une parabole dont Δ est la tangente au sommet et P le foyer.

On pourrait aussi déduire, des équations précédentes, les autres parties

---

(**) On a le théorème général suivant: *Si l'équation d'un cercle est une fonction du second degré d'un paramètre variable, ce cercle coupe orthogonalement un cercle fixe.*

de la question 1026, mais la méthode géométrique suivante paraît plus simple.

Désignons par β le milieu de la corde CD et par O le centre de la conique. Soient φ et φ' les angles que forment les directions conjuguées Ox et AB avec l'axe focal. Si l'on remarque que $\alpha\beta$ est perpendiculaire sur CD et que les droites $O\alpha$ et $O\beta$ sont symétriques par rapport aux axes, on trouve facilement :

$$O\beta\alpha = \varphi' - \varphi - 90°, \quad O\alpha\beta = 270° - (\varphi' + \varphi),$$

donc :

$$\frac{O\alpha}{O\beta} = \frac{\sin O\gamma\alpha}{\sin O\alpha\gamma} = \frac{\cos(\varphi' - \varphi)}{\cos(\varphi' + \varphi)} = \frac{1 + \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\varphi'}{1 - \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\varphi'}.$$

En désignant par $2a$ et $2b$ les axes de la conique donnée, on aura donc suivant que cette conique est une ellipse ou une hyperbole :

$$\frac{O\alpha}{O\beta} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \quad \text{ou} \quad \frac{O\alpha}{O\beta} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}. \tag{4}$$

On a donc le théorème suivant : *Si deux cordes* AB *et* CD *d'une conique sont telles que le cercle décrit sur* AB *comme diamètre passe par* C *et* D, *ces deux cordes se correspondent dans deux figures inversement semblables dont les droites doubles sont les axes de la conique*; *le rapport de similitude est* $\frac{c^2}{a^2 \pm b^2}$.

Il résulte de là que si AB passe par un point fixe P, CD passera par un point fixe Q. Les rayons OP et OQ sont symétriques par rapport aux axes de la courbe et leur rapport est égal à $\frac{c^2}{a^2 \pm b^2}$. Les droites AB et CD formant avec chacun des axes de la courbe des angles égaux et de sens contraires, leur point d'intersection T décrit une hyperbole équilatère. Cette courbe est l'hyperbole d'Apollonius relative au point P. En effet, lorsque T se trouve sur la conique donnée, un des points C, D coïncide avec un des points A, B et le cercle (AB) est tangent à la conique et par suite AB est normale à cette conique.

Pour trouver le lieu du centre des moyennes distances γ des points A, B, C, D, prenons pour axes coordonnés les axes de symétrie de la conique et désignons par x et y, x' et y' les coordonnées des points α et β; nous aurons en vertu de la relation (4) :

$$\frac{x}{x'} = -\frac{y}{y'} = \frac{c^2}{a^2 \pm b^2}.$$

En observant que γ est au milieu de $\alpha\beta$, on trouve pour les coordonnées X, Y de ce point :

$$X = \frac{x + x'}{2} = \frac{a^2 x}{c^2}, \quad Y = \frac{y + y'}{2} = \mp \frac{b^2 y}{c^2}.$$

Les coordonnées X et Y s'expriment donc homographiquement en fonction des coordonnées x, y du point α. Or, α décrit une conique, donc γ décrit aussi une conique dont il serait aisé d'obtenir l'équation.

Remarques. 1. Si la conique donnée était une parabole, une partie de la démonstration précédente devrait être modifiée. Ainsi, on aurait le théorème suivant, dont la démonstration est des plus simples :

Si deux cordes AB *et* CD *d'une parabole sont telles que le cercle décrit sur* AB *comme diamètre passe par* C *et* D, *ces deux cordes coupent l'axe de la parabole en des points* U *et* V *tels que l'on a* $UV = 2p$, *p étant le paramètre de la parabole.*

Donc les cordes AB et CD se correspondent dans deux figures symétriquement égales.

2. Si, dans l'équation (1), on change α en $90^\circ + \alpha$, on obtient pour l'équation du cercle (A'B') :

$$(x^2 + y^2)(A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha) + (y\cos\alpha - x\sin\alpha)(D\cos\alpha - E\sin\alpha) + F = 0. \qquad (7)$$

Ajoutons membre à membre les équations (1) et (7); il vient

$$(A + C)(x^2 + y^2) + Dy + Ex + 2F = 0.$$

Donc le lieu géométrique des points d'intersection des cercles (AB) et (A'B') est une circonférence.

3. La solution précédente comporte de nombreuses conséquences. Nous citerons les suivantes :

a) L'enveloppe d'une corde AB d'une conique, telle que la circonférence décrite sur cette corde comme diamètre touche la conique en un autre point C est une conique homothétique à la première.

b) Dans l'hyperbole équilatère, CD passe par le centre quel que soit AB (théorème connu) et le point R est au milieu de la corde de contact des tangentes issues de P.

Les parties 1° et 2° de la question 1026 se rencontrent dans les N. A. M., 1861, p. 66.

D'autres solutions analytiques élégantes des deux questions 1026 et 1028 nous

ont été adressées par MM. Barisien, J. Jonesco, B. Jonesco, Mandart, Droz Farny; des solutions synthétiques remarquables, qui contiennent également la propriété des cordes AB et CD de se correspondre dans deux figures inversement semblables, nous ont été remises par M. Buysens (Gand). Nous regrettons que le défaut d'espace nous empêche de reproduire ces intéressants développements.

Voici quelques nouvelles remarques sur la même figure.

1° Soient AB, A'B' deux cordes rectangulaires menées par le point fixe P. On sait que leurs milieux M, M' appartiennent à une conique passant par P et homothétique à la conique donnée. Ils se correspondent dans une involution; donc la droite MM' passe par un point fixe (point de Frégier) et son milieu décrit une conique.

(Buysens.)

M. Barisien a démontré la même proposition par le calcul.

2° Lorsque le point fixe P est au foyer d'une conique à centre ou d'une parabole, le cercle (AB) enveloppe respectivement deux cercles fixes ou la directrice (Théorème connu, rappelé par M. Barisien).

3° Lorsque le point P parcourt la conique donnée, le point Q se meut sur une seconde conique, la droite PQ est normale à une conique fixe, et la conique lieu du centre des moyennes distances des points A, B, C, D reste tangente à une conique fixe. (Barisien.)

4° Le point P restant fixe, l'axe radical des deux cercles ayant pour diamètres les cordes AB et CD de la conique donnée, passe par un point fixe; l'enveloppe de l'axe radical du premier cercle et du cercle principal de la conique donnée est une parabole. (Barisien.)

5° Si par un point fixe P dans le plan d'une conique Σ, on mène deux cordes AB, CD qui se correspondent dans une involution, la ligne des centres des cercles (AB) et (CD) passe par un point fixe, et le pied de l'axe radical décrit une circonférence.

Question 1032.

(Voir *Mathesis*, (2) V, p. 215).

Soient A', B', C', D' *les projections d'un point* M *sur les côtés a, b, c, d d'un quadrilatère donné.*

1° Si la somme $m\,\overline{A'B'}^2 + n\,.\,\overline{C'D'}^2$ *est constante, le lieu de* M *est une circonférence ou une droite. 2° Si le produit* A'B'.C'D' *est constant, le lieu de* M *est un ovale de Cassini. 3° Si la somme* $m\,A'B' \pm n\,C'D'$ *est constante, le point* M *décrit un ovale de Descartes qui peut dégénérer en une conique.* (Deprez.)

Solution par MM. Gob, Colart, Droz-Farny. Soient B, C, D, A

les points d'intersection des droites a et b, b et c, c et d, d et a. Dans les quadrilatères inscriptibles MA'BB', MC'DD' on a :

$$A'B' = MB \sin B, \quad C'D' = MD \sin D.$$

Donc les égalités :

$$m.\overline{A'B'}^2 + n.\overline{C'D'}^2 = k, \quad A'B'.C'D' = k, \quad m.A'B' \pm n.C'D' = k$$

entraînent les suivantes :

$$m \sin^2 B.\overline{MB}^2 + n \sin^2 D.\overline{MD}^2 = k, \quad MB.MD = k$$
$$m \sin B.MB \pm n \sin D.MD = k$$

ce qui démontre la proposition.

M. Mandart a donné une solution analytique de la même question. M. Colart fait observer que le point M décrit encore une circonférence ou une droite lorsqu'on a

$$m.\overline{A'B'}^2 + n.\overline{B'C'}^2 + p.\overline{C'D'}^2 + q.\overline{D'A'}^2 = K.$$

Question 1034.

(Voir *Mathesis*, (2) V, pag. 216).

Calculer le côté d'un triangle équilatéral, connaissant les distances d'un point de son plan à ses sommets. Problème analogue pour un tétraèdre régulier. (T. H. De Land.)

Solution par M. Retali. Soient ABC le triangle équilatéral, x son côté, O un point de son plan, et posons $OA = p$, $OB = q$, $OC = r$. La relation connue entre les distances de quatre points d'un plan(*) donne

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & p^2 & q^2 & r^2 \\ 1 & p^2 & 0 & x^2 & x^2 \\ 1 & q^2 & x^2 & 0 & x^2 \\ 1 & r^2 & x^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien, en développant et divisant par x^2,

$$x^4 - x^2(p^2 + q^2 + r^2) + (p^4 + q^4 + r^4 - p^2q^2 - q^2r^2 - r^2p^2) = 0,$$

$$2x^2 = p^2 + q^2 + r^2 \pm \sqrt{3\,(2p^2q^2 + 2q^2r^2 + 2r^2p^2 - p^4 - q^4 - r^4)}. \quad (1)$$

(*) Voir Kuler, *Acta Petropolitana*. 6, I, p. 8 ou bien Salmon-Fiedler, *Algebra der Linearen Transf.*, p. 32 (zweite Aufl.); Baltzer-Hoüel, *Déterminants*, etc.

De même, en appelant p, q, r, s les distances d'un point de l'espace aux sommets d'un tétraèdre régulier ayant le côté x, nous avons :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & p^2 & q^2 & r^2 & s^2 \\ 1 & p^2 & 0 & x^2 & x^2 & x^2 \\ 1 & q^2 & x^2 & 0 & x^2 & x^2 \\ 1 & r^2 & x^2 & x^2 & 0 & x^2 \\ 1 & s^2 & x^2 & x^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad (2)$$

ou bien

$$\begin{vmatrix} p^2+p^2 & q^2+p^2-x^2 & r^2+p^2-x^2 & s^2+p^2-x^2 \\ p^2+q^2-x^2 & q^2+q^2 & r^2+q^2-x^2 & s^2+q^2-x^2 \\ p^2+r^2-x^2 & q^2+r^2-x^2 & r^2+r^2 & s^2+r^2-x^2 \\ p^2+s^2-x^2 & q^2+s^2-x^2 & r^2+s^2-x^2 & s^2+s^2 \end{vmatrix} = 0;$$

et, en développant et ordonnant,

$$3x^4 - 2(\Sigma p^2)\cdot x^2 + (3\Sigma p^4 - 2\Sigma p^2 q^2) = 0,$$

$$3x^2 = \Sigma p^2 \pm \sqrt{8(\Sigma p^2 q^2 - \Sigma p^4)}$$

Note. Solution analogue par M. J. Jonesco.

Si l'on divise les quatre dernières lignes du déterminant (2) par x^2 et qu'on multiple ensuite les deux premières colonnes par x^2, on trouve

$$\begin{vmatrix} 0 & x^2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x^2 & 0 & p^2 & q^2 & r^2 & s^2 \\ 1 & p^2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & q^2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & r^2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & s^2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Le premier déterminant peut se transformer de la même manière.

D'après l'égalité (1), la valeur de x^2 n'est réelle que lorsque p, q, r sont les longueurs des côtés d'un triangle. Soient S la surface de ce triangle et ω l'angle de Brocard; on peut écrire

$$x^2 = 2S(\cot\omega \pm \sqrt{3}) = 2S(\cot\omega \pm \cot 30^\circ).$$

Pour résoudre le problème proposé, on peut construire un triangle

équilatéral quelconque A'B'C' et chercher dans son plan un point O' dont les distances aux sommets A', B', C' soient proportionnelles aux longueurs données p, p, r. On obtient deux points O', O'' qui sont réciproques par rapport au cercle A'B'C'; il est facile d'en déduire la valeur de x. Ces points sont confondus en un seul appartenant à la circonférence A'B'C', lorsque l'une des longueurs p, q, r est égale à la somme des deux autres.

Remarquons aussi que la construction de x revient à ce problème classique : Placer sur trois circonférences concentriques, de rayons p, q, r, les sommets d'un triangle équilatéral.

Le tétraèdre régulier donne lieu à des observations analogues.

M. Dépez nous signale la relation qui existe entre le côté d'un triangle sphérique et les distances de ses sommets à un point quelconque de la sphère (*). Si x, p, q, r représentent les cosinus de ces arcs de grand cercle, on a

$$2x^2 - (1 + 2\Sigma pq - \Sigma q^2)\,x + \Sigma p^2 - 1 = 0.$$

Dans le triangle trirectangle,

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1;$$

ce qui est la formule bien connue en géométrie analytique:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad \text{(J. N.)}$$

×Question 1039.

(Voir *Mathesis*, (2) V, p. 240).

Construire un pseudocarré ABCD, *connaissant un côté* AB *et les angles adjacents* DAB, DBA. (J. Neuberg.)

Construisons la ligne brisée XBAY renfermant le côté donné AB et les deux angles donnés YAB = DAB, XBA = CBA.

1° Soit c un point quelconque de BX; prenons sur la perpendiculaire

---

(*) C'est la relation de Schering caractéristique pour la géométrie riemannienne plane :

$$\begin{vmatrix} \cos(11) & \cos(12) & \cos(13) & \cos(14) \\ \cos(21) & \cos(22) & \cos(23) & \cos(24) \\ \cos(31) & \cos(32) & \cos(33) & \cos(34) \\ \cos(41) & \cos(42) & \cos(43) & \cos(44) \end{vmatrix} = 0$$

où (12) désigne la distance des points 1 et 2.

abaissée de B sur Ac une longueur $Bd = Ac$. Nous aurons ainsi un pseudocarré ABcd, dont le sommet d parcourt une droite déterminée lorsque c se déplace sur BX. Si l'on mène la droite Bd' perpendiculaire et égale à AB, le lieu de d est la perpendiculaire abaissée de d' sur BX; il rencontre AY au point cherché D. (Droz-Farny).

2° On sait que les carrés construits intérieurement sur les côtés opposés AD, BC ont le même centre O; ce point s'obtient immédiatement au moyen des angles $YAO = XBO = 45°$. Les perpendiculaires élevées en O sur OA et OB, ou mieux les cercles (O, OA), (O,OB) rencontrent AY, BX aux points cherchés D, C. (E. Colart, Degueldre.)

3° On sait que les milieux M, N, P, Q des côtés AB, BC, CD, DA sont les sommets d'un carré. Prenons sur BX un point quelconque n et construisons le carré $Mnpq$. Lorsque n parcourt BX, il est facile de voir que les points p et q décrivent des droites. Le lieu de q est la perpendiculaire abaissée sur BX de l'extrémité de la perpendiculaire élevée en M sur AB et égale à MB; il rencontre AY au point Q, etc. (Gob).

4° Les carrés construits intérieurement sur les côtés opposés AB, CD ont le même centre I. Ce point étant connu, si l'on construit une suite de triangles isoscèles cId, rectangles en I et ayant un sommet c sur BX, le sommet d décrit une droite perpendiculaire à BX; cette droite passera par le sommet D du pseudocarré. (Van Deuren).

5° On sait que le centre I des carrés construits intérieurement sur AB et DC est le milieu de la droite qui joint les centres ω, ω' des carrés construits extérieurement sur AD, BC. Or, on peut construire le point I et tracer les droites indéfinies $A\omega$, $B\omega'$ qui font avec AY, BX des angles de 45°; par conséquent, la question revient à mener par I une droite dont le segment compris entre les droites $A\omega$, $B\omega'$ ait son milieu en I, etc. (Francq.)

6° Projetons B et C en B′ et C′ sur AD. Il est facile de voir que les triangles ACC′, BDB′ dont les côtés sont deux à deux perpendiculaires et qui ont $AC = BD$, sont égaux; par conséquent, $AC' = BB'$. Il est facile de déduire de là une solution du problème proposée.

(J. Jonesco).

7° Construisons le carré ABEF dirigé vers CD. Les triangles ABC, EDB qui ont deux couples de côtés égaux et perpendiculaires, sont égaux, et les troisièmes côtés ED, BC sont perpendiculaires. D'où l'on déduit une solution de la question 1039. (Déprez).

Les solutions 1° et 7° ne diffèrent pas essentiellement.

M. Mandart donne une variante de la solution 3° en égalant les valeurs de MN et de MQ calculées dans les triangles NMB, QMA en fonction des angles $NMB = \theta$, $QMA = \frac{\pi}{2} - \theta$.

Voici une solution trigonométrique due à M. Tiete : Si K est l'intersection des droites AD et BC et que x désigne l'angle BAC, les triangles KAC, KDB donnent

$$\frac{AC}{AK} = \frac{\sin K}{\sin(B+x)}, \qquad \frac{BD}{BK} = \frac{\sin K}{\cos(A-x)},$$

d'où

$$AK\cos(A-x) = BK\sin(B+x),$$

équation de laquelle l'on tire $\operatorname{tg} x$.

×Question 1083.

(Voir *Mathesis*, (2), tome VI, p. 215).

Pour que le système

$$x+y+z=0, \tag{1}$$

$$ax^2+by^2+cz^2=0, \tag{2}$$

$$ax^4+by^4+cz^4=0, \tag{3}$$

admette une solution autre que $x=y=z=0$, *on doit avoir*

$$(a+b)(b+c)(c+a)[(a+b)(b+c)(c+a)-8abc]=0.$$

(J. Neuberg.)

Solution par M. Colart (Huy). 1° Pour des valeurs de x, y, z différentes de zéro, on peut multiplier (2) par z^2, puis retrancher (3). On aura

$$ax^2(z^2-x^2)+by^2(z^2-y^2)=0,$$

ou, en éliminant z au moyen de (1),

$$(a+b)x^2y^2+2xy(ax^2+by^2)=0,$$

d'où

$$(a+b)xy=2cz^2.$$

On obtiendrait de même

$$(a+c)xz=2by^2,$$

$$(b+c)yz=2ax^2.$$

En multipliant ces trois relations, on trouve

$$(a+b)(b+c)(c+a)-8abc=0.$$

2° Si $z=0$, les équations proposées deviennent

$$y=-x, \quad (a+b)x^2=0, \quad (a+b)x^4=0,$$

et admettent des valeurs de x et y différentes de zéro pour $a+b=0$.

De même, si $a+c=0$ le système admet des valeurs non nulles de

x et z, jointes à $y = 0$, et, si $b + c = 0$, le système admet des valeurs non nulles de y et z avec $x = 0$.

Solution par M. Déprez. Remplaçons dans l'équation (2) x par $-(y+z)$, dans l'équation (3) x^2 par sa valeur tirée de la seconde; nous aurons

$$(a+b)\,y^2 + 2ayz + (a+c)\,z^2 = 0, \qquad (4)$$

$$b\,(a+b)\,y^4 + 2bcy^2z^2 + c\,(a+c)\,z^4 = 0. \qquad (5)$$

Elevons l'équation (4) au carré après avoir transposé le terme en yz; il vient

$$(a+b)^2\,y^4 + 2\,[(a+c)\,(a+b) - 2a^2]\,y^2z^2 + (a+c)^2\,z^4 = 0 \qquad (6)$$

Pour que deux équations du second degré

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0, \quad A'\lambda^2 + B'\lambda + C' = 0$$

soient compatibles, on doit avoir

$$(AC' - A'C)^2 - (AB' - A'B)\,(BC' - B'C) = 0.$$

En appliquant cette condition aux équations (5) et (6), on obtient l'égalité proposée.

Solution par M. Delahaye. Multiplions l'équation (2) par $x^2 + y^2$:

$$ax^4 + by^4 + (a+b)\,x^2y^2 + cz^2\,(x^2 + y^2) = 0;$$

remplaçons $ax^4 + by^4$ par $-cz^4$ et $x^2 + y^2$ par $z^2 - 2xy$:

$$-cz^4 + (a+b)\,x^2y^2 + cz^2\,(z^2 - 2xy) = 0, \quad \text{ou} \quad (a+b)\,xy = 2cz^2.$$

(Le reste comme dans la première solution).

Le système a été ramené à la forme

$$xyz = \frac{2cz^3}{a+b} = \frac{2ax^3}{b+c} = \frac{2by^3}{c+a},$$

de sorte que s'il est compatible, la solution est

$$x : y : z = \sqrt[3]{\frac{b+c}{a}} : \sqrt[3]{\frac{c+a}{b}} : \sqrt[3]{\frac{a+b}{c}}.$$

Ceci se rapporte au cas ou l'on a

$$(a+b)\,(b+c)\,(c+a) = 8abc. \qquad \text{(J. N.)}$$

Question 1110.

(Voir *Mathesis* (2), VII, p. 52).

On donne une involution sur une droite u et un point P *extérieur à u. Si d'un point quelconque* A *de u on abaisse une perpendiculaire* AA″ *sur la*

droite PA′ *qui joint* P *au conjugué* A′ *de* A, AA″ *enveloppe une parabole, dont le foyer forme avec les points doubles de l'involution et le point* P *un quadrilatère harmonique.* (Droz-Farny.)

Solution par M. V. Retali. Les rayons AA″, PA′ marquent sur la droite de l'infini deux ponctuelles (A_0) et (A_1) projectives (en involution); mais (A) est perspective à (A′), et (A′) est perspective à (A_1), donc (A) et (A_0) sont projectives. L'enveloppe de la droite $[AA_0]$ est une parabole P^2 touchant u au point B′ conjugué dans l'involution à la projection orthogonale de P sur u. P^2 est tangente aux deux rayons orthogonaux issus de P et séparés harmoniquement par les points doubles E, F de l'involution, et tangente aussi à la perpendiculaire menée à u par le point central O : la droite PO est donc la directrice de la parabole. Si, sur le cercle C^2 mené par P, E, F, π est le point opposé à P, et si C est l'intersection ultérieure avec la directrice PO ; le triangle πEF est circonscrit à P^2 et la parallèle à u menée par Q coupe ultérieurement le cercle au foyer φ. Celà posé, l'angle $POF = EOQ = FO\varphi$, $\overline{OF}^2 = -OP.OQ = -OP.O\varphi$; donc les points P et φ sont conjugués harmoniques par rapport à EF, sur le cercle C^2.

Autrement. La perpendiculaire à u au point (central) O va couper la droite $P\varphi$ au pôle de u par rapport au cercle; donc, etc.

Autre solution par M. Déprez.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1131. Une droite fixe a est tangente en A à un cylindre de révolution dont l'axe est vertical; soit a' la génératrice du cylindre passant par le point diamètralement opposé à A.

Une droite mobile b s'appuie sur a et sur a' et est constamment horizontale; elle engendre un paraboloïde, qui rencontre le cylindre suivant une certaine courbe gauche. Trouver le lieu décrit par la tangente à cette courbe sur le plan horizontal mené par A. (Stuyvaert.)

1132. Par un point fixe I du grand axe d'une ellipse donnée, on mène une corde arbitraire AB dont le pôle est en P. Montrer que :

1° Le lieu de l'orthocentre du triangle PAB est une ellipse.

2° L'enveloppe de ces ellipses lorsque I se déplace sur le grand axe de l'ellipse donnée se compose de deux ellipses.

3° Trouver le lieu du centre de gravité et du centre du cercle circonscrit du triangle ABP. (E. N. Barisien).

1133. Un triangle ABC de forme invariable se déplace de façon que ses côtés restent tangents à une hypocycloïde à trois rebroussements. L'orthocentre et le centre du cercle circonscrit décrivent un même cercle. La droite d'Euler enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements. Le centre de gravité décrit une hypocycloïde à trois rebroussements, à laquelle la droite d'Euler est normale. Un point quelconque, invariablement lié au triangle ABC (c'est-à-dire dont les coordonnées normales par rapport à ce triangle ne varient pas) décrit une hypotrochoïde.

(A. Gob).

×**1134.** Résoudre le système d'équations

$$\sin x = a \sin (y + z), \sin y = b \sin (z + x), \sin z = c \sin (x + y).$$

(J. Neuberg).

1135. En un point M d'une parabole, on trace la tangente et la normale, et, par le foyer F de la courbe, on mène une perpendiculaire à FM, qui rencontre la tangente et la normale respectivement aux points A et B. Trouver :

1° Le lieu du point C, milieu de AB.

2° Le lieu de l'orthocentre du triangle CMA.

3° Le lieu du point D symétrique de A par rapport à M.

(G. Andrien).

×**1136.** Les circonférences décrites sur les diagonales AC, BD d'un quadrilatère ABCD se coupent en deux points ω, ω'. Démontrer que les projections de l'un de ces points sur les côtés et les diagonales sont situées sur une même circonférence. (A. C.).

On demande une démonstration élémentaire de cette propriété. Les points ω, ω' sont appelés les *points cycliques* du quadrilatère complet dont les côtés sont AB, BC, CD, DA ; la dénomination de *points de Monge* aurait été préférable, ces points appartenant à tous les cercles de Monge des coniques inscrites au quadrilatère complet. (J. N.).

1137. On donne une ellipse de centre O ; soient F l'un des foyers, D le pied de la directrice correspondante, M un point de la circonférence décrite sur OD comme diamètre, B et C les points de rencontre de l'ellipse avec la perpendiculaire élevée en M sur FM. 1° On a la relation

$$\frac{1}{BF} + \frac{1}{CF} = \frac{2}{a}.$$

2° Le pôle de BC par rapport à l'ellipse décrit une parabole passant par les extrémités du petit axe de l'ellipse et ayant pour sommet le point F. (DÉPREZ.)

×1138. Soient O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, et I le centre du cercle inscrit, qui touche BC, CA, AB en A', B', C'. La parallèle à la droite OI menée par A' rencontrant la circonférence I en α, démontrer que la perpendiculaire abaissée de α sur la droite B'C' rencontre la circonférence I au point de contact F de cette circonférence avec la circonférence des neuf points de ABC. (DROZ-FARNY).

QUESTIONS D'EXAMENS.

805. On sait que le lieu du centre ω d'une circonférence qui touche une droite donnée u et une circonférence donnée (O, R) est une parabole P.

Trouver le lieu du sommet de P lorsque u passe par un point fixe A.

Une circonférence de centre ω et passant par O est tangente à une parallèle v menée à u, à la distance R. Le lieu de ω est donc la parabole qui a pour foyer O et pour directrice v.

Faisons tourner u autour de A, et soient B, C les projections de O sur u, v. Le lieu de B est la circonférence décrite sur AO comme diamètre; comme BC = R, le lieu de C est un limaçon de Pascal. Le sommet D de P étant le milieu de OC décrit également un limaçon. La directrice v enveloppe la circonférence (A, R). (SOONS.)

806. Si a et b sont deux grandeurs algébriques, trouver la condition nécessaire et suffisante pour que

$$\frac{a^3-b^3}{a-b} > \frac{a^3+b^3}{a+b}.$$

On doit avoir $ab > 0$.

807. Que devient l'expression

$$\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d} - \frac{ab}{a+b} - \frac{cd}{c+d},$$

si l'on suppose $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$?

Réponse : 0.

808. Deux sphères O et O', de rayons constants, se meuvent de manière à être constamment tangentes entre elles et à toucher la pre-

mière deux plans fixes P et Q, la seconde deux plans fixes P′ et Q′. Démontrer que le point de contact M des deux sphères décrit une ellipse. (MATHOT).

Le centre O décrit une droite d, le centre O′ une droite d' ; la distance OO′ est constante, et M est un point fixe de la droite OO′, etc.

808. Un prisme droit de hauteur h a pour bases les triangles équilatéraux ABC et A′B′C′ dont le côté est a. Sur les arêtes AA′ et BB′ on prend les longueurs $AI = \frac{1}{3}h$, $BK = \frac{2}{3}h$, et l'on mène le plan IKC.

1° Trouver le rapport suivant lequel ce plan coupe le prisme; 2° Démontrer que le triangle IKC est isoscèle et chercher sa surface; 3° déterminer h de manière que la surface de ce triangle soit les $\frac{5}{8}$ de la surface ABC.

810. Résoudre un triangle ABC, connaissant la somme $b + c = 2s$, la hauteur $AH = h$ et la médiane $AM = m$.

1° On a les équations

$$b + c = 2s, \quad b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}, \quad b^2 - c^2 = 2an,$$

n désignant la longueur $HM = \sqrt{m^2 - h^2}$. La première et la troisième de ces équations donnent

$$b = s + \frac{an}{2s}, \quad c = s - \frac{an}{2s};$$

ces valeurs étant substituées dans la seconde équation, on trouve

$$a = 2s\sqrt{\frac{s^2 - m^2}{s^2 - n^2}}.$$

2° On peut calculer les angles B et C au moyen des équations

$$\frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = \frac{2s}{h}, \quad \operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} C = \frac{2n}{h},$$

que l'on peut transformer en

$$\frac{\sin B + \sin C}{\sin B \sin C} = \frac{2s}{h}, \quad \frac{\sin (C - B)}{\sin B \sin C} = \frac{2n}{h}.$$

On en déduit par division et en transformant la dernière :

$$\sin \frac{1}{2}(C + B) = \frac{s}{n} \sin \frac{1}{2}(C - B),$$

$$\sin \frac{1}{2}(C - B) \cos \frac{1}{2}(C - B) = \frac{n}{h}\left[(\sin^2 \frac{1}{2}(C + B) - \sin^2 \frac{1}{2}(C - B)\right].$$

En éliminant $\sin \frac{1}{2}(C + B)$ on trouve

$$\operatorname{tg} \frac{C - B}{2} = \frac{hn}{s^2 - n^2}.$$

Rectification. Page 150, question 1125, avant dernière ligne, au lieu de $-s$, lire $-x$.

QUESTIONS D'ARITHMOLOGIE,

par M. DE RCCQUIGNY.

1. Mettre la différence des puissances cinquièmes de deux nombres entiers consécutifs de même parité sous la forme d'une somme de 3, 4, 5 ou 6 carrés.

$$\begin{aligned}\frac{(a+r)^5-(a-r)^5}{r} &= (3a^2+r^2)^2+(a^2-r^2)^2+(4ar)^2\\ &= (a+r)^4+(a-r)^4+4a^2(a+r)^2+4a^2(a-r)^2\\ &= (2a^2+3ar)^2+(2a^2-3ar)^2+(a^2+r^2)^2+a^4+r^4\\ &= (2a^2+3ar)^2+(2a^2-3ar)^2+(a^2-r^2)^2+4a^2r^2+a^4+r^4;\end{aligned}$$

on fait $r=1$.

2. Tout nombre entier est la somme algébrique de deux carrés et de deux cubes.

En effet,

$$n=(2n+1)^3-n^3+n^3-(n+1)^3.$$

3. On a

$$\frac{n(n\mp1)}{2}+\frac{(7n\pm1)(7n\pm2)}{2}=(5n\pm1)^2.$$

Peut-on trouver la formule générale des triangulaires qu'il faut ajouter à un triangulaire donné pour obtenir un carré?

4. Posons $t_n=\frac{1}{2}n(n+1)$; on a

$$(t_{a^2+a-1}+t_{a^2-a-1})(t_{b^2+b-1}+t_{b^2-b-1})=t_{a^2b^2+ab-1}+t_{a^2b^2-ab-1},$$

$$(t_{7a+1}+t_{a-1})(t_{7b+1}+t_{b-1})=t_{7c+1}+t_{c-1}\quad(c=5ab+a+b).$$

5. Si la différence des rangs de deux triangulaires est supérieure à 2, la différence de ces triangulaires est un nombre composé.

6. Mettre la somme

$$1+a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+c^2d^2+b^2d^2+a^2b^2c^2d^2$$

sous la forme d'une somme de quatre carrés.

7. On a l'identité

$$(a^2\pm ab+b^2)^2=\tfrac{1}{2}[a^4+(a\pm b)^4+b^4].$$

Si l'on choisit a et b de manière que $a^2\pm ab+b^2$ soit un carré, on a une solution de l'équation indéterminée

$$x^4+y^4+z^4=2u^4.$$

Par exemple,

$$3^4+8^4+5^4=2.7^4,\quad 7^4+15^4+8^4=2.13^4,\ldots.$$

8. Vérifier :

$$a^4+(a+b)^4=2(a^2+ab)^2+(2ab+b^2)^2=2(a^2+ab+b^2)^2-b^4.$$

On voit que la somme de deux bicarrés peut indifféremment prendre la forme $2x^2+y^2$ ou $2z^2-u^2$.

9. La somme des inverses des n premiers triangulaires est égale à

$$\frac{2}{1+\frac{1}{n}},$$

10. Le carré de la somme ou de la différence de deux entiers est une somme de trois carrés :

$$(m^2\pm n^2)^2=(m\pm n)^2[(m^2\mp mn)^2+(n^2\mp mn)^2+m^2n^2].$$

11. Chacun des déterminants

$$\begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}$$

est la somme de trois carrés.

Cette proposition est un corollaire de la précédente.

12. Le double du carré de la somme ou de la différence de deux puissances cinquièmes est une somme de quatre carrés :

$$(m^5\pm n^5)^2=(m\pm n)^2\,\frac{m^4+(m^2\mp mn)^2+(n^2\mp mn)^2+n^4}{2}.$$

13. On a :

$$(a-b)(a-c)+(b-a)(b-c)+(c-a)(c-b)$$
$$=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2}$$
$$=\frac{(a-b)(a-b+1)}{2}+\frac{(b-c)(b-c+1)}{2}+\frac{(c-a)(c-a+1)}{2}.$$

Donc l'expression $\Sigma a^2-\Sigma ab$ est une somme de trois triangulaires. De même

$$a^2+b^2+c^2+ab+ac-bc=\tfrac{1}{2}(a+b)(a+b\mp 1)$$
$$+\tfrac{1}{2}(a+c)(a+c\pm 1)+\tfrac{1}{2}(b-c)(b-c\pm 1).$$

14. n^3 est la somme des n termes d'une progression arithmétique commençant par $2n-1$ et ayant pour raison $2n-2$.

15. Si $x \pm y = z$, on a :

$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)^2 = \frac{x^4+y^4+z^4}{2}.$$

Si $x^2 \pm y^2 = z^2$, on a :

$$\left(\frac{x^4+y^4+z^4}{2}\right)^2 = \frac{x^8+y^8+z^8}{2}.$$

L'équation

$$\left(\frac{x^{2n}+y^{2n}+z^{2n}}{2}\right)^2 = \frac{x^{4n}+y^{4n}+z^{4n}}{2}$$

n'est possible que pour $n=1$ ou $n=2$; car elle se ramène à :

$$x^n \pm y^n \pm z^n = 0.$$

16. Les quatre premières puissances d'un nombre entier quelconque forment une somme de trois triangulaires :

$$n+n^2+n^3+n^4 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2(n^2-1)}{2} + \frac{(n^2+n)(n^2+n+1)}{2}.$$

17. Les six premières puissances d'un nombre entier quelconque forment une somme de trois triangulaires :

$$\frac{n^2(n^2-1)}{2} + \frac{(n^3-n)(n^3-n-1)}{2} + \frac{(n^3+n^2+n)(n^3+n^2+n+1)}{2}.$$

18. La sixième puissance d'un nombre entier (1 excepté) est à la fois une somme de deux et de trois triangulaires :

$$n^6 = \tfrac{1}{2}n^3(n^3+1) + \tfrac{1}{2}n^3(n^3-1)$$
$$= \tfrac{1}{2}(n^3-n)(n^3-n+1) + \tfrac{1}{2}(n^3-n)(n^3+n-1) + \tfrac{1}{2}\cdot 2n^2(2n^2-1).$$

On peut dire encore que n^6 est la somme d'un carré et d'un triangulaire.

19. On a :

$$n^3+n^4+n^5+n^6 =$$
$$\frac{n^2(n^2-1)}{2} + \frac{n^3(n^3+1)}{2} + \frac{(n^3+n^2)(n^3+n^2+1)}{2}.$$

20. On a :

$$2(a^2+b^2+c^2) =$$
$$\tfrac{1}{2}(a+b+c)(a+b+c\pm 1)+\tfrac{1}{2}(a+b-c)(a+b-c\mp 1)$$
$$+\tfrac{1}{2}(a-b-c)(a-b-c\pm 1)+\tfrac{1}{2}(a-b+c)(a-b+c\mp 1).$$

21. La somme (ou la différence) d'une fraction irréductible et de son inverse est une fraction irréductible.

22. La somme des produits deux à deux des $2n-1$ termes consécutifs d'une progression arithmétique quelconque

$$a-(n-1)r,\quad \cdots,\quad a,\quad \cdots,\quad a+(n-1)r$$

est égale à

$$\frac{(2n-1)(2n-2)}{2}a^2-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}r^2.$$

23. Neuf carrés entiers consécutifs forment une somme de deux triangulaires :

$$(n-4)^2+(n-3)^2+\cdots+(n+4)^2$$
$$=\frac{(3n+5)(3n+6)}{2}+\frac{(3n-5)(3n-6)}{2}.$$

Il en est de même de neuf carrés pairs consécutifs et de quatre carrés impairs consécutifs :

$$(2n-8)^2+\cdots+(2n)^2+\cdots+(2n+8)^2=$$
$$\frac{(6n+15)(6n+16)}{2}+\frac{(6n-15)(6n-16)}{2};$$

$$(2n-3)^2+(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2=$$
$$\frac{(4n+4)(4n+5)}{2}+\frac{(4n-4)(4n-5)}{2}.$$

24. Si **N** est premier avec 3, N^2 est la somme de trois triangulaires et N^2+1 la somme de trois carrés :

$$(3n\pm 1)^2=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(4n\pm 1)(4n\pm 2)}{2},$$

$$(3n\pm 1)^2+1=(n\pm 1)^2+(2n^2)+(2n\pm 1)^2.$$

25. La pile à base carrée de côté n est le quart de la pile triangulaire de côté $2n$; elle est aussi égale à la somme des piles triangulaires de côtés n et $n-1$.

26. Les n premiers triangulaires sont renfermés dans une urne. On en tire deux, au hasard, et l'on demande la probabilité que leur somme soit divisible par 3.

Suivant que n a la forme $3a$, $3a+1$, $3a+2$, la probabilité est

$$\frac{2(2a-1)}{3(3a-1)}, \quad \frac{2(2a-1)}{3(3a+1)}, \quad \frac{2a(2a+1)}{(3a+1)(3a+2)}.$$

27. On a

$$1\cdot 3+3\cdot 6+6\cdot 10+\cdots+4t_nt_{n+1}=$$
$$\tfrac{1}{10}n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3);$$
$$1\cdot 3+6\cdot 10+15\cdot 21+\cdots+4t_{2n-1}t_{2n}=$$
$$\tfrac{1}{10}n(n+1)(2n-1)(2n+1)(2n+3).$$

28. Au total formé par les n premiers carrés, on ajoute la somme des $n-1$ premiers triangulaires et celle des $n-1$ nombres entiers qui suivent le $(n-1)^e$ triangulaire; démontrer que le résultat est un cube.

29. Soient S_α la somme des produits des termes superposés dans les deux suites

$$\begin{cases} 1^2, & 2^2, & 3^2, & \cdots, & (n-2)^2, & (n-1)^2, \\ n-1, & n-2, & n-3, & \cdots, & 2, & 1 \end{cases}$$

et S_β la somme analogue pour les suites

$$\begin{cases} 1, & 3, & 6, & \cdots, & \dfrac{(n-1)n}{2}, & \dfrac{n(n+1)}{2}, \\ n, & n-1, & n-2, & \cdots, & 2, & 1 \end{cases}.$$

Démontrer que $S_\alpha + S_\beta$ est un nombre triangulaire.

30. Si a, b, c, d sont quatre termes consécutifs d'une progression arithmétique, de raison r, on a

$$a^2+d^2-b^2-c^2=4r^2.$$

SUR LES CORDES DE COURBURE CONCOURANTES DANS LES CONIQUES (*),

par M. Cl. Servais, professeur à l'Université de Gand.

1. Soit M un point quelconque d'une conique (Σ) de centre O; par un point fixe P, on mène une droite parallèle au symétrique par rapport à un axe, du diamètre conjugué de OM. Cette parallèle rencontre le diamètre OM en un point M'. Si le point M se meut sur la conique, les droites OM et PM' engendrent deux faisceaux projectifs, et le point M' décrit une conique (π) passant par les points O, P, et par les projections de P sur les axes, et dont les asymptotes sont parallèles aux diamètres conjugués égaux OG et OH de la conique (Σ). Cette conique (π) rencontre (Σ) en quatre points A, B, C, D; les cordes de courbure à la conique (Σ) en ces points passent par le point P. Donc : *si une conique* (π) *passe par le centre d'une conique* (Σ), *et a ses asymptotes parallèles aux diamètres conjugués égaux de* (Σ), *les cordes de courbure à celle-ci, menées par les points où la conique* (π) *la rencontre, concourent en un même point de* (π).

2. Les coniques du faisceau ayant pour base les points A, B, C, D déterminent sur la droite de l'infini une involution. Les points à l'infini des coniques (Σ) et (π) sont séparés harmoniquement par les points à l'infini des axes de (Σ). Ces points sont donc les points doubles de l'involution, et les droites AB, CD sont également inclinées sur les axes. Donc : *si les cordes de courbure aux points* A, B, C, D *sont concourantes, les quatre points* A, B, C, D *sont sur une même circonférence.*

Si le point P est sur la conique (Σ), les points P et D coïncident; les droites AP et BC sont également inclinées sur les axes; mais la droite AP et la tangente au point A jouissent de la même propriété, la droite BC est donc parallèle à la tangente au point A. De même AC et AB sont respectivement parallèles aux tangentes aux points B et C. Donc : *sur toute conique il existe trois points dont les cercles osculateurs passent par un point donné de la courbe; ces points appartiennent à un cercle qui passe*

(*) Nous avons traité la même question par le calcul; voir *Revue de l'Instruction publique en Belgique*, 1866 et N. C. M., 1878, p. 399. Voir aussi N. A. M., 1873, p. 30, 1884, p. 273. (J. N.)

par le point donné et forment un triangle dont les médianes se coupent au centre de la conique (*). (STEINER).

3. Les coniques circonscrites au quadrilatère ABCD déterminent sur OG une involution dont le point O est le point central, car OG est parallèle à une asymptote de (π). La conique (Σ) détermine le couple GG' ayant pour milieu O; donc si E et E_1, sont les points où les droites AB et CD coupent OG, on aura

$$OE \cdot OE_1 = -\overline{OG}^2.$$

Cette égalité montre que le symétrique E_2 de E_1 par rapport à O est conjugué au point E par rapport à la conique (Σ); donc si K est le pôle de AB, KE_2 est la polaire de E et est parallèle à OH. De là résulte la construction suivante de la droite CD, connaissant les points A et B: *On mène par le symétrique par rapport au centre* O, *du pôle de la corde* AB, *des parallèles à* OG *et* OH, *rencontrant respectivement* OH *et* OG *en deux points appartenant à la corde* CD.

CONSÉQUENCES. I. Si la corde AB tourne autour d'un point fixe, la corde CD enveloppe une parabole tangente aux diamètres conjugués égaux de la conique (Σ).

II. Si les points A et B coïncident, P devient le point caractéristique de la corde de courbure au point A; le symétrique par rapport au centre du pôle de AB est le point A' diamétralement opposé à A sur la conique. La construction de CD permet de déterminer aisément son enveloppe. Si A décrit la conique. Du point O comme centre, avec OG pour rayon, on décrit un cercle; la droite qui joint les projections d'un point du cercle sur deux diamètres perpendiculaires enveloppe une hypocycloïde à quatre points de rebroussements. L'enveloppe de CD se déduit de cette courbe, en faisant tourner les ordonnées de celle-ci, d'un angle constant autour de leurs pieds.

III. Pour déterminer la position du point caractéristique P de la corde de courbure au point A, on observe que les coniques (π) et (Σ) étant tangentes au point A, sont homologiques; le point A et la corde CD sont respectivement le centre et l'axe d'homologie.

Si R est le point d'intersection des droites CD et AO le rapport d'ho-

---

(*) SALMON. *Sections coniques*, p. 387. *Journal de Crelle*, t. XXXII, p. 300.

mologie est (AROA'); sa valeur est égale à $-\frac{1}{2}$. Du parallélisme des droites AP et CD on déduit donc l'égalité

$$\frac{AP}{AA_1} = -\frac{1}{2},$$

A_1 étant l'extrémité de la corde de courbure ; par suite :

Le point caractéristique de la corde de courbure au point A, *est le symétique par rapport à* A *du milieu de cette corde* (BB, 1889, (3), XIX p. 519).

On peut aussi remarquer que le point caractéristique P est l'intersection de la droite AP avec la conique (π), déterminée par les points A,O les points à l'infini sur OG et OH et la tangente en A. En appliquant le théorème de Pascal on obtient diverses constructions parmi lesquelles la suivante : *Par le point où la corde de courbure rencontre* OG, *on mène une parallèle à la tangente au point* A, *coupant le diamètre* OA *en un point* U. *Par ce point on mène une parallèle à* OH; *cette parallèle passe par le point caractéristique de la corde de courbure au point* A.

4. Si, le point P décrit la corde de courbure au point A, le triangle BCD reste circonscrit à une parabole fixe. Cette parabole est l'enveloppe des droites qui joignent les projections sur OG et OH des différents points de la tangente au point A'. Les projetantes sont respectivement parallèles à OH et OG. Déterminons le foyer F de cette parabole. Nous désignons par G_1 et H_1 les points diamétralement opposés à G et H sur la conique Σ. Les cordes de courbure aux points G, G_1, A sont concourantes, ainsi que celles aux points H, H_1, A. Les cercles circonscrits aux triangles GG_1A et HH_1A se coupent donc au foyer de la parabole. Mais le point O appartient à l'axe radical AF de ces cercles, le point F cherché est donc situé sur OA et on a

$$OA \cdot OF = -\overline{OG}^2 = -\frac{a^2+b^2}{2}.$$

La puissance du centre de la conique (Σ), *par rapport aux cercles rencontrant la conique en quatre points, tels que les cordes de courbure soient concourantes, est constante et égale à* $-\frac{a^2+b^2}{2}$.

Cette propriété se déduit immédiatement de l'équation du cercle circonscrit au quadrilatère ABCD :

$$x^2+y^2-xx_0-yy_0 = \frac{a^2+b^2}{2}\left(1-\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}\right)$$

x_0y_0 étant les coordonnées du point P. Ecrite sous cette forme, l'équation montre que

L'axe radical du cercle passant par les points A, B, C, D *et du cercle décrit sur* OP *comme diamètre, est la polaire du point* P *par rapport à la conique* (Σ).

Gand, octobre 1894.

UNE NOUVELLE DÉMONSTRATION DU POSTULATUM D'EUCLIDE (*).

Nous proposons à nos lecteurs de trouver le *postulat nouveau* qui est la base de la démonstration suivante du postulatum d'Euclide.

I. Legendre a prouvé, d'une manière simple (**), que la somme des angles d'un triangle est égale ou inférieure à deux droits, et, par suite, que la somme des angles d'un quadrilatère est égale ou inférieure à quatre droits. (Voir *Mathesis*, 1896, supplément sur la *Métagéométrie*, p. 16).

II. Considérons deux droites AX, BY, perpendiculaires à une même troisième AB. Prenons sur AX n longueurs égales

$$AA_1,\quad A_1A_2,\quad A_2A_3,\quad \ldots,\quad A_{n-1}A_n,$$

et élevons aux points A_1, A_2, A_3, ... A_n, les perpendiculaires

$$A_1C_1,\quad A_2C_2,\quad A_3A_3,\quad \ldots,\quad A_nC_n,$$

toutes égales à AC, C étant un point quelconque pris sur AB, entre A et B (***). Menons les droites

$$CC_1,\quad C_1C_2,\quad C_2C_3,\quad \ldots,\quad C_{n-1}C_n,$$

de manière à former n quadrilatères égaux, savoir :

$$AA_1C_1C,\quad A_1A_2C_2C_1,\quad \ldots,\quad A_{n-1}A_nC_nC_{n-1}.$$

Des points C_1, C_2, ..., C_n abaissons sur BY les perpendiculaires

$$C_1B_1,\quad C_2B_2,\quad \ldots,\quad C_nB_n.$$

(*) Nous en empruntons le principe à la note intitulée : *Démonstration du postulatum d'Euclide*, par J. M. Joubin, inspecteur primaire honoraire (Mortain, imprimerie A. Leroy. Une page).

(**) On suppose, bien entendu, qu'une droite est *toujours* déterminée par deux points, pour éviter la géométrie remannienne.

(***) On peut prouver aisément que les points C_1, C_2, ..., C_n sont situés entre les droites AX, BY.

Nous formerons ainsi n autres quadrilatères, savoir :

$$BB_1C_1C, \quad B_1B_2C_2C_1, \quad \ldots, \quad B_{n-1}B_nC_nC_{n-1}.$$

Soient U la somme des angles de l'un quelconque des n quadrilatères égaux à AA_1C_1C; Q la somme des angles de l'ensemble des n autres quadrilatères. La somme de tous les angles des $2n$ quadrilatères sera égale à

$$nU + Q.$$

On peut estimer cette somme d'une autre manière : la somme des angles en A, C, B est égale à ... 4 droits,

en A_1, C_1, B_1 » » 8 » ,

en A_2, C_2, B_2 » » 8 » ,

. . . . . .

en A_{n-1}, C_{n-1}, B_{n-1} » » 8 » ,

en A_n, C_n, B_n » » 2 droits + V,

en appelant V la somme des angles $A_nC_nC_{n-1}$, $B_nC_nC_{n-1}$ en C_n. La somme de tous les angles est donc

$$(8n - 2) \text{ droits} + V.$$

En égalant les deux valeurs de cette somme, il vient

$$nU + Q = (8n - 2) \text{ droits} + V.$$

Par suite,

$$nU + 2 \text{ droits} = 8n \text{ droits} - Q + V.$$

Mais d'après le théorème de Legendre, Q est égal ou inférieur à $4n$ droits; donc si l'on remplace dans le second membre Q par $4n$ droits, quantité égale ou supérieure, il viendra

$$nU + 2 \text{ droits} \leqslant 4n \text{ droits} + V > 4n \text{ droits},$$

On déduit de là, en divisant par n

$$U + \frac{2}{n} \text{ droits} > 4 \text{ droits}.$$

En prenant n assez grand, on peut rendre la fraction $\frac{2}{n}$, aussi petite que l'on veut; donc U, somme des angles du quadrilatère AA_1C_1C, ne peut subir la moindre augmentation sans dépasser 4 droits, ce qui exige que U = 4 droits.

III. Legendre a prouvé que, de U = 4 droits, on déduit que la somme des angles de tout triangle est égale à deux droits, puis le postulatum d'Euclide (*Mathesis*, 1896, supplément sur la *Métagéométrie*, p. 21).

(P. M.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

22. *Cercle orthoptique mutuel de deux coniques homofocales.* On doit à Chasles ce théorème :

Étant données deux coniques homofocales Σ et Σ', le lieu d'un point M par lequel passent une tangente MT à Σ et une tangente MT' à Σ', ces tangentes étant rectangulaires, est un cercle concentrique à ces coniques.

La démonstration analytique est très facile. Soient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1$$

les équations des deux coniques. Les droites MT et MT' peuvent être représentées par :

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha},$$
$$x\sin\alpha-y\cos\alpha=\sqrt{(a^2+\lambda)\sin^2\alpha+(b^2+\lambda)\cos^2\alpha}.$$

Le point M vérifie ces deux égalités pour une valeur convenable de α. Or, si l'on fait la somme des carrés, on trouve

$$x^2+y^2=a^2+b^2+\lambda.$$

On en conclut que le lieu de M est une circonférence. Les points communs à Σ et Σ' (qu'on suppose être une ellipse et une hyperbole) en font évidemment partie.

Voici une démonstration géométrique du même théorème ; nous l'empruntons à un article de M. Bally (J. M. S., 1897, p. 97). Soient O le centre de Σ et Σ', A et B les projections du foyer F sur MT et MT'. La figure FAMB étant un rectangle, on a

$$\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=\overline{OF}^2+\overline{OM}^2.$$

Mais on sait que les distances OA et OB sont constantes ($OA=a$, $OB=\sqrt{a^2+\lambda}$) ; il en résulte que OM également est constant.

×**23.** *Sur les combinaisons.* Soit $N=a.b.c...$ un produit de n facteurs premiers différents. Le nombre N a pour diviseurs :

L'unité ;

Les nombres $a, b, c, \ldots$

Les produits de $a, b, c, \ldots$ pris deux à deux de toutes les manières ; ces produits sont en nombre $C_{n,2}$;

Les $C_{n,3}$ produits de $a, b, c, \ldots$ pris trois à trois ;

En général les $C_{n,i}$ produits de $a, b, c, \ldots$ pris i à i (i variant de 0 à n).

Mais les diviseurs de N sont, d'après un théorème connu, en nombre

$$(1+1)(1+1)(1+1)\cdots = 2^n.$$

Donc on a établi, sans passer par la formule du binôme, la relation

$$C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,n} = 2^n.$$

(M. STUYVAERT.)

×**34.** *Solution de la question d'arithmétique posée au concours général de* 1897 *en seconde scientifique*, par un ABONNÉ. THÉORÈME. *Si b est un nombre premier, et si la fraction irréductible $\frac{a}{b}$ convertie en fraction décimale donne lieu à une fraction périodique dont la période se compose de mn chiffres, démontrez que la somme de n restes pris de m en m, est un multiple de b.*

Le dénominateur b étant un nombre premier, la fraction périodique sera simple.

Désignons par $r_1, r_2, r_3, \ldots$ les restes successifs, et par $q_1, q_2, q_3, \ldots$ les quotients correspondants. On aura la suite d'égalités

$$10a = bq_1 + r_1, \quad 10^{n+1}a = bq_{n+1} + r_{n+1}, \quad 10^{2n+1}a = bq_{2n+1} + r_{2n+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$10^{(m-1)n+1}a = bq_{(m-1)n+1} + r_{(m-1)n+1}.$$

Le reste r_{mn+1} serait égal à r_1 ; par suite, le reste r_{mn} est nécessairement égal à a.

Additionnons toutes ces égalités membre à membre et désignons par la notation Mb un multiple quelconque de b ; nous aurons

$$10.a[1 + 10^n + 10^{2n} + \cdots + 10^{(m-1)n}] = Mb + (r_1 + r_{n+1} + r_{2n+1} + \cdots),$$

ou

$$10.a\left[\frac{10^{mn}-1}{10^n-1}\right] = Mb + [r_1 + r_{n+1} + r_{2n+1} + \cdots + r_{(m-1)n+1}]$$

Faisons disparaître le dénominateur et multiplions les deux membres par a ; il viendra, en désignant par S la somme des restes considérés,

$$10.a(10^{mn}.a - a) = Mb(10^n.a - a) + (10^n.a - a)\,S\ldots\ldots \quad (1)$$

Or, le mn^e reste étant nécessairement égal à a puisque la période n'a que mn chiffres, on a

$$10^{mn}.a = bq_{mn} + a$$

donc, le facteur $10^{mn} \cdot a - a$ est divisible par b. De plus, le facteur $10^n \cdot a - a$ ne peut pas être divisible par b, car s'il en était ainsi, le n^e reste serait a et la période ne comprendrait que n chiffres au lieu de mn comme l'exige l'hypothèse.

Si nous reprenons l'égalité (1), nous voyons que le premier membre est divisible par b et qu'il en est de même du premier terme du second membre; donc le second terme, $(10^n a - a)$ S, devra également être divisible par b. Mais b est premier avec $(10^n a - a)$, donc b devra diviser la somme S des restes.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 979.

(Voir *Mathesis* (2), IV, p. 240).

Etant donnée une courbe fermée plane C, *on porte sur chaque tangente à cette courbe à partir du point de contact* M *une longueur constante* $MN = a$. *Le lieu du point* N *est une certaine courbe fermée* C_1. *Démontrer que si l'on fait varier a, le centre de gravité de l'aire limitée par la courbe* C_1 *décrit une semi-droite.* (R. Bricard.)

Solution par M. Gob. Ce théorème résulte immédiatement du suivant :

Le centre de gravité de l'aire comprise entre les courbes C *et* C_1 *est un point fixe.* Nous allons démontrer ce dernier théorème.

Soit M'N' une tangente infiniment voisine de MN. Portons sur cette tangente une longueur $M'N' = a$, et soit T le point de rencontre des tangentes MN, M'N'. L'aire élémentaire TNN' a pour expression :

$$\tfrac{1}{2}(a - TM)(a + TM')\sin d\alpha,$$

α désignant l'angle de la tangente MN avec l'axe des x. Cette aire est donc égale, abstraction faite des infiniment petits d'ordre supérieur, à $\frac{1}{2} a^2 d\alpha$. On en conclut que l'aire U comprise entre les courbes C et C_1 est égale à πa^2.

Le centre de gravité de l'aire élémentaire TNN' est à une distance infiniment petite du point K qui divise MN dans le rapport 2 : 1. Soient x,y les coordonnées du point M, x_1,y_1 celles de K et x_2,y_2 celles du centre de gravité G de l'aire U, on aura :

$$\pi a^2 x_2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x_1 a^2 d\alpha, \quad \pi a^2 y_2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} y_1 a^2 d\alpha.$$

Or

$$x_1 = x + \frac{2a}{3}\cos\alpha, \quad y_1 = y + \frac{2a}{3}\sin\alpha;$$

donc :

$$\pi x_2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x\,d\alpha + \frac{a}{3}\int_0^{2\pi}\cos\alpha\,d\alpha, \quad \pi y_2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} y\,d\alpha + \frac{a}{3}\int_0^{2\pi}\sin\alpha\,d\alpha.$$

Les deux dernières intégrales de chaque second membre sont nulles, donc x_2 et y_2 ne dépendent pas de a. Le théorème est donc démontré.

On remarquera que G est le centre de gravité du périmètre de la courbe C, la densité en chaque point étant proportionnelle à la courbure.

Question 1036.

(Voir *Mathesis* (2), V, p. 216).

Résoudre un triangle, connaissant le rayon du cercle circonscrit, sa surface et celle du triangle formé par les centres des trois cercles ex-inscrits. Le problème dépend d'une équation du 3e degré. Trouver la condition de réalité des racines. (E. N. Barisien).

Solution par M. Retali. Soient r le rayon du cercle circonscrit, s la surface du triangle, s' celle de l'autre triangle. Nous avons d'après des relations bien connues :

$$abc = 4rs, \tag{1}$$

$$(a+b+c) = \frac{s'}{r} = 2p, \tag{2}$$

$$\frac{s^2}{p} = p^3 - p^2(a+b+c) + p(ab+bc+ca) - abc,$$

dont la troisième donne, eu égard aux deux autres,

$$ab + bc + ca = \frac{16r^4s^2 + 32r^4ss' + s'^4}{4r^2s'^2}. \tag{3}$$

Les côtés du triangle sont donc les racines de l'équation cubique

$$4r^2s'^2 . x^3 - 4rs'^3 . x^2 + (16r^4s^2 + 32r^4ss' + s'^4)\,x - 16r^2ss'^2 = 0.$$

Appelant e, f, g, h les coefficients; la condition de réalité des trois racines est

$$(fg - 9eh)^2 - 4(f^2 - 3eg)(h^2 - 3fh) > 0.$$

Solution analogue par MM. Mandart et Droz Farny.

Une discussion plus complète de l'équation en x offrirait quelque intérêt.

×Question 1062.

(Voir *Mathesis*, (2) VI, p. 80).

Le quotient de $(2m-1)!$ *par* $m!$ $(m-1)!$ *est toujours un nombre pair, excepté quand* m *est une puissance de* 2. (WOLSTENHOLME).

Solution par MM. BRIEN, COLART *et* SOONS. Le quotient considéré représente $C_{2m-1,\,m}$. Le produit des facteurs pairs de $(2m-1)!$ étant égal à $1.2.3.\ldots(m-1).2^{m-1}$, on peut écrire

$$C_{2m-1,\,m} = \frac{1.3.5.\ldots(2m-1).2^{m-1}}{1.2.3.\ldots m.}. \qquad (1)$$

Si θ^μ est la plus haute puissance d'un nombre premier θ qui divise la factorielle $m!$, on a

$$\mu = E\left(\frac{m}{\theta}\right) + E\left(\frac{m}{\theta^2}\right) + E\left(\frac{m}{\theta^3}\right) + \cdots,$$

$E(x)$ désignant le plus grand nombre entier contenu dans x.

Cela posé, soit d'abord $m = 2^k$; pour $\theta = 2$, on aura

$$\mu = 2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 2 + 1 = 2^k - 1 = m - 1;$$

donc $C_{2m-1,m}$ est impair.

Soit ensuite $2^k < m < 2^{k+1}$; nous pouvons décomposer m en une somme de puissances de 2 (sans exclure 2^0) et écrire

$$m = 2^k + 2^{k'} + 2^{k''} + \cdots;$$

en calculant $\frac{m}{2}, \frac{m}{2^2}, \frac{m}{2^3}, \cdots$ et en ne prenant que les parties entières des quotients, nous voyons que

$$\mu \leq (2^k - 1) + (2^{k'} - 1) + (2^{k''} - 1) + \cdots < m - 1;$$

donc la plus haute puissance qui divise le dénominateur du quotient (1) est inférieure à 2^{m-1}.

×Question 1080.

(Voir *Mathésis*, (2) VI, p. 215).

Décomposer en quatre facteurs rationnels le déterminant

$$H = \begin{vmatrix} 2 & c+\frac{1}{c} & b+\frac{1}{b} \\ c+\frac{1}{c} & 2 & a+\frac{1}{a} \\ b+\frac{1}{b} & a+\frac{1}{a} & 2 \end{vmatrix}.$$

(J. Neuberg.)

Solution par M. Hacken. Retranchons, de la deuxième et de la troisième ligne, la première multipliée respectivement par $\frac{1}{2}\left(c+\frac{1}{c}\right)$ et par $\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)$; le déterminant ainsi obtenu s'abaisse au second ordre et son développement se présente sous la forme d'une différence de deux carrés.

Les doubles des deux facteurs de cette différence sont :

$$\left(c-\frac{1}{c}\right)\left(b-\frac{1}{b}\right)+2\left(a+\frac{1}{a}\right) \pm \left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right);$$

la première quantité se ramène à

$$2\left(a+\frac{1}{a}-\frac{b}{c}-\frac{c}{b}\right)=2\frac{(ac-b)(ab-c)}{abc};$$

la seconde, à

$$2\left(bc+\frac{1}{bc}-a-\frac{1}{a}\right)=2\frac{(bc-a)(abc-1)}{abc}.$$

On en conclut

$$H=\frac{2(ac-b)(ab-c)(bc-a)(abc-1)}{a^2b^2c^2}.$$

Note. Voici *l'origine* de la question 1080. Pour qu'une équation homogène du second degré en x, y, z représente un système de deux droites, il faut et il suffit que son discriminant H soit nul. D'autre part, on peut chercher les couples de points A_1 et A_2, B_1 et B_2, C_1 et C_2 où la conique rencontre les côtés du triangle de référence et exprimer que

trois de ces points sont en ligne droite, ce qui donne quatre conditions possibles; car on peut considérer les groupements $A_1B_1C_1$, $A_2B_1C_1$, $A_1B_2C_1$, $A_1B_1C_2$; les autres ternes $A_2B_2C_2$, $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$, $A_2B_2C_1$ correspondent alors à une seconde droite. Ces quatre conditions doivent rentrer dans l'égalité $H = 0$; donc H est un produit de quatre facteurs (rationnels ou irrationnels).

En choisissant convenablement les paramètres de référence de nos coordonnées, nous pouvons mettre l'équation de la conique sous la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + \left(a + \frac{1}{a}\right)yz + \left(b + \frac{1}{b}\right)zx + \left(c + \frac{1}{c}\right)xy = 0.$$

Les couples de points A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 seront donnés par les équations

$$(y + az)\left(y + \frac{z}{a}\right) = 0, \quad (z + bx)\left(z + \frac{x}{b}\right) = 0, \quad (x + cy)\left(x + \frac{y}{c}\right) = 0.$$

Pour que les droites représentées par

$$y + az = 0, \quad z + bx = 0, \quad x + cy = 0$$

rencontrent les côtés du triangle de référence en trois points collinéaires, on doit avoir $abc - 1 = 0$. Si l'on remplace l'une d'elles par son associée, la condition de collinéarité devient

$$\frac{bc}{a} - 1 = 0, \quad \frac{ca}{b} - 1 = 0, \quad \frac{ab}{c} - 1 = 0;$$

donc H admet les facteurs

$$abc - 1, \quad bc - a, \quad ca - b, \quad ab - c.$$

On peut rapprocher de la question 1080 la suivante (*Mathesis*, 1893, p. 173) : Démontrer que $x - 2$ divise le déterminant.

$$H' = \begin{vmatrix} x & \frac{l}{m} + \frac{m}{l} & \frac{l}{n} + \frac{n}{l} \\ \frac{l}{m} + \frac{m}{l} & x & \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \\ \frac{l}{n} + \frac{n}{l} & \frac{m}{n} + \frac{n}{m} & x \end{vmatrix}.$$

En effet, prenons pour a, b, c les fractions $\frac{l}{m}, \frac{m}{n}, \frac{n}{l}$, pour x le nombre 2; alors $H' = H$, $abc - 1 = 0$, d'où $H' = 0$. (J. N.)

Question 1104.

(Voir *Mathesis*, (2) VII, pag. 31).

On considère un cercle de diamètre fixe AB *et un point* C *variable sur la circonférence.*

1° *Le lieu des centres des cercles tritangents au triangle* ABC *se compose de deux cercles* (théorème connu).

2° *Le lieu du centre des symédianes du triangle* ABC *est une ellipse.*

(E. N. Barisien.)

Solution par M. Retali. 1° Si ABC est un triangle inscrit dans un cercle, les sommets A et B étant fixes et C variable, le lieu des centres des cercles tritangents se compose évidemment des deux circonférences menées par A et B, et ayant pour centres les extrémités du diamètre perpendiculaire à AB.

2° ABC est inscrit dans une conique k^2; soient A', B', C' les pôles de BC, CA, AB par rapport à k^2. Si A et B sont fixes, et si C parcourt k^2, la tangente B'C' marque sur les tangentes fixes A'B', A'C' deux ponctuelles projectives ; les rayons homologues CC', BB' des faisceaux projectifs C (C'...), B (B'...) se coupent en un point α qui décrit une conique bitangente à k^2 en B et C.

Autrement. Soit H le point où AA' coupe BC ; les deux points A' et α (intersection des rayons AA', BB', CC') sont conjugués harmoniques par rapport à A, H et par suite

$$(A'HA\alpha) = \frac{A'A}{HA} : \frac{A'\alpha}{H\alpha} = \frac{1}{2};$$

les points A, α sont correspondants dans l'homologie ayant A' pour centre, BC pour axe et $\frac{1}{2}$ par coefficient d'homologie. Si BC est un diamètre de k^2, l'homologie devient une affinité (avec l'axe BC et le module $\frac{1}{2}$). Si k^2 est un cercle, α devient le point de Lemoine; enfin si k^2 est un cercle et AB un diamètre, nous avons le théorème de M. Barisien.

Note. Ont résolu la même question : MM. Maes, Déprez, Droz Farny.

La première partie résulte immédiatement de ce que l'angle des deux bissectrices issues de A et B est une fonction de l'angle C; la seconde, de ce que le point de Lemoine d'un triangle rectangle est au milieu de la hauteur.

M. Dépres accompagne sa solution des remarques suivantes (AB est une corde fixe quelconque d'un cercle) :

1° Les pieds des symédianes issues de A et de B décrivent des ellipses ;

2° Les pieds des bissectrices de l'angle A décrivent une strophoïde ayant B pour sommet et A pour point double ; l'asymptote est la droite AD faisant avec AB l'angle $BAD = \pi - BCA$.

3° Les points de Brocard du triangle ABC décrivent des podaires de coniques ;

4° Le cercle de Brocard enveloppe une podaire de conique ;

5° L'axe radical de ce cercle et du cercle donné enveloppe une ellipse.

---

*Question 1166.

(Voir *Mathesis* (2), VII, p. 22).

On porte sur la bissectrice de l'angle A *d'un triangle* ABC, *une longueur* AD *moyenne proportionnelle entre* AB *et* AC. *Lorsque* A *se meut sur une circonférence passant par* B *et* C, D *décrit aussi une circonférence passant par* B *et* C. (L. Collette).

Solution par MM. Droz Farny, Soons, Déprez, François et Degueldre. Prolongeons DA au delà de A d'une longueur AD′ = AD ; les deux points D et D′ décrivent le même lieu. Comme

$$\textit{angle}\ BAD = DAC = \frac{A}{2}, \quad AB : AD = AD : AC,$$

les deux triangles ABD et ABC sont semblables. Donc

$$\textit{angle}\ D'AB = ABD + ADB = ADB + ADC = D,$$

d'où

$$D = 180 - \frac{A}{2}.$$

D décrit donc une circonférence passant par B et C ; elle passe aussi par D′, car, de la même manière, on trouve

$$\textit{angle}\ BD'C = \frac{A}{2}, \quad \text{donc } D + D' = 180^{\circ}.$$

Suivant que A se meut sur l'un ou l'autre des arcs BC, le lieu se com-

pose évidemment de deux circonférences ayant respectivement le milieu d'un des arcs BC comme centre.

Autre solution par MM. V. Mars et V. Cristesco.

Quel est le lieu décrit par les points D, D', lorsque la longueur $\sqrt{AB.\,AC}$ est portée sur la bissectrice extérieure de l'angle BAC? (E N. Barisien.)

×Question 1124.

(Voir *Mathesis*, (2), t. VII, p. 150).

Effectuer le produit :

$$(1+2)(3+4+5)(6+7+8+9)\cdots$$

composé de n facteurs. (de Rocquigny.)

Solution par MM. A. Boutin, C. Bergmans *et* Audibert. Le premier terme du n^{e} facteur est $\frac{n(n+1)}{2}$; la somme des $n+1$ nombres entiers consécutifs qui constituent ce facteur est alors :

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{2},$$

et le produit des facteurs analogues où n reçoit toutes les valeurs entières de 1 à n est :

$$\frac{n!\,(n+1)!\,(n+2)!}{2^{n+1}}$$

qu'on peut encore écrire

$$\frac{(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)^3\,(n+1)^2\,(n+2)}{2^{n+1}}.$$

Question 1128.

(Voir *Mathesis*, (2) VII, p. 175).

Trouver le lieu des points d'inflexion des courbes ayant pour équation

(1) $$y = \cos\sqrt{a^2 - x^2}$$

lorsque a varie. (Soons.)

Solution par M. E. N. Barisien. En annulant $\frac{d^2y}{dx^2}$, ce qui caractérise les points d'inflexion, on a l'équation

(2) $$a^2 \sin\sqrt{a^2-x^2} - x^2\sqrt{a^2-x^2}\cos\sqrt{a^2-x^2} = 0.$$

L'équation du lieu des points d'inflexion s'obtient en éliminant a entre (1) et (2). De (1), on tire

$$a^2 = x^2 + \text{arc cos } y .$$

Substituons cette valeur de a^2 dans (2); il vient pour l'équation du lieu :

$$x^2\sqrt{1-y^2} = (x^2y - \sqrt{1-y^2})\,\text{arc cos } y. \tag{3}$$

Pour construire facilement cette courbe trancendante, on peut poser $y = \cos\varphi$, ce qui donne

$$x^2 = \frac{\varphi \sin\varphi}{\varphi\cos\varphi - \sin\varphi}.$$

On a ainsi les valeurs de x et y en fonction du paramètre variable φ :

$$x = \sqrt{\frac{\varphi\sin\varphi}{\varphi\cos\varphi - \sin\varphi}}, \quad y = \cos\varphi.$$

La courbe (1) présente deux points d'arrêt ayant pour coordonnées : $x = \pm a$, $y = 1$; les tangentes en ces points passent par l'origine.

QUESTIONS PROPOSÉES(*).

×**1139.** Soient A, B,.... les mineurs du déterminant

$$D \equiv \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Démontrer que

$$\frac{1}{D}\begin{vmatrix} A^2 & B^2 & C^2 \\ A'^2 & B'^2 & C'^2 \\ A''^2 & B''^2 & C''^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a'^2 & b'^2 & c'^2 \\ a''^2 & b''^2 & c''^2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ b'c' & c'a' & a'b' \\ b''c'' & c''a'' & a''b'' \end{vmatrix}$$

(A. C.)

1140. Étant donnée la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est

$$r = a(1 + k\sin\tfrac{1}{2}\theta) :$$

déterminer k de façon que l'arc de cette courbe puisse s'intégrer par les fonctions élémentaires. Calculer dans ce cas l'aire et le périmètre de la courbe. (E. N. Barisien).

(*) *Rectification.* P. 214, question 1136, ligne 3, lire *sur deux côtés opposés* au lieu de *sur les côtés*.

×**1141.** Dans un triangle ABC l'angle A est constant, et les pieds B′, C′ des hauteurs BB′, CC′ sont fixes. Démontrer que : 1° le côté BC est constant et pivote autour d'un point fixe; 2° le cercle des neuf points du triangle ABC est fixe; 3° le centre du cercle circonscrit et le centre de gravité décrivent des circonférences. (V. Cristesco.)

1142. On donne deux droites rectangulaires OAX, OBY, et un point P, par lequel on mène une sécante PAB. Trouver le lieu des foyers de l'ellipse tangente en A et B aux deux droites fixes et admettant ces mêmes points pour sommets. (H. Brocard.

PUBLICATIONS RÉCENTES(*).

15. *Les femmes dans la science.* Notes recueillies par A. Rebière. Deuxième édition très augmentée et ornée de portraits et d'autographes. — Paris, Nony (IX-356 p. in-8°). Prix : 5 fr.

La première édition de cet ouvrage, qui comprenait 87 pages, reproduisait une conférence donnée par l'auteur, en 1894, au cercle Saint-Simon; elle traçait, à grands traits et sans détails techniques, des notices sur Hypatie, la marquise du Châtelet, Maria Agnesi, Sophie Germain, Mary Somerville, M^me^ Kovalewski. Aujourd'hui, le groupe d'élite a été encadré dans un tableau assez complet des autres savantes : l'armée est en marche avec son état-major. Nous rencontrons, dans la seconde édition, toutes les femmes qui, par des moyens divers, ont exercé une heureuse influence sur le progrès des sciences; les savantes professionnelles, les simples curieuses, les collaboratrices des savants, les professeurs, les vulgarisatrices, les protectrices des sciences.

Le livre est terminé par deux notes intéressantes, intitulées : *Si la femme est capable de science*, et *Menus propos sur les femmes et les sciences.*

L'ouvrage de M. Rebière est d'une lecture attrayante et instructive. Il est orné de quelques autographes et de deux douzaines de portraits, ce qui en augmente l'intérêt. L'impression est fort soignée et fait honneur à la librairie Nony.

16. *Traité d'Algèbre élémentaire* à l'usage des élèves de Mathématiques élémentaires, des aspirants au baccalauréat de l'enseignement classique (2^e^ série) ou moderne (2^e^ et 3^e^ séries) et des candidats aux écoles du gouvernement par N. Cor et J. Riemann, anciens élèves de l'école normale, agrégés des sciences mathématiques, etc., Paris, Nony, 1898 (460 p. in-8°). Prix : 6 fr.

Table des matières: I. Nombres algébriques. Polynomes. — II. Principes généraux relatifs aux équations considérées isolément ou aux équations simultanées. Déterminants. Résolution d'une système quelconque du premier degré. — III. Équation du second degré. Équations et systèmes réductibles au second degré. Problè-

---

(*) *Rectification.* P. 151, Publication récente. Lire 14 au lieu de 1127.

mes. — IV. Progressions. Définitions et théorèmes concernant les limites et la continuité. Étude de quelques fonctions simples. — V. Fonction exponentielle. Fonction logarithmique. Nombre *e*. Fonctions circulaires. — VI. Des dérivées. Applications. Appendices.

Les auteurs se sont inspirés des leçons du savant directeur de l'École normale, M. J. Tannery. Ils ont cherché à exposer les principes avec toute la rigueur possible tout en conservant aux démonstrations une certaine simplicité. Nous recommandons volontiers la lecture de cet ouvrage aux professeurs et aux élèves des établissements belges : l'enseignement de l'algèbre subit une évolution qu'il est bon de suivre dans les meilleurs livres qui se publient en France, et celui que nous annonçons ici à nos lecteurs est certes l'un des plus remarquables de cette espèce.

17. *Applications de l'Algèbre élémentaire à la Géométrie*, à l'usage des Elèves de la classe de Première-sciences de l'Enseignement moderne par LAISANT, répétiteur à l'École Polytchnique et PERRIN, professeur à l'École Say. (360 p. in-12° cartonné). Paris, Delagrave, 1897.

La première partie de cet ouvrage (256 pages) peut être considérée comme un complément des *Premiers principes d'Algèbre* des mêmes auteurs; la seconde partie contient 770 énoncés de problèmes à résoudre.

Nous recommandons volontiers à nos lecteurs ce livre qui est écrit avec une simplicité et une clarté remarquables.

18. Teoria sucinta de las functiones hiperbólicas par P. MANSION, version española par D. LUIS G. GASCO, catedrático numerario de la Universitad de Valencia. Valencia, P. Aguilar, 1896 (Brochure de 44 p. in-8°).

Cette traduction contient de plus que l'original publié en 1884 dans *Mathesis*, puis en une brochure à part, un aperçu de la trigonométrie lobatchefskienne.

19. *In Memoriam N. I. Lobatschevskii.* Collection des mémoires présentés à la Société Physico-mathématique de Kasan pour la fête de l'inauguration du monument de Lobatchefsky (1/13 septembre 1896), par MM. Hermite, Halsted, Gerardville, Laisant, Lemoine, Neuberg, d'Ocagne. Kazan, typolithographie de l'Université impériale, 1897 (156 p. in-8°).

1. *Hermite.* Sur quelques développements en série dans la théorie des fonctions elliptiques (1-21). 2. *Halsted.* Darwinism and non-euclidean Geometry (22-25). 3. *Gerardville.* Théorie du vol des oiseaux (26-59). 4. *Laisant.* Sur la courbure des courbes planes (60-63). 5. *E. Lemoine.* Sur deux nouvelles décompositions des nombres entiers (64-69). 6. *J. Neuberg.* Sur un problème de Jacobi (70-92). 7. *d'Ocagne.* Sur la représentation par des droites et par des cercles des équations du second degré à trois variables (93-96). 8. *E. Lemoine.* La géométrographie (97-133). 9. *E. Lemoine.* Transformation continue dans le triangle et le tétraèdre (133-156).

20. *Cours développé d'algèbre élémentaire*, précédé d'un aperçu historique sur les origines des mathématiques élémentaires et suivi d'un recueil d'exercices et de problèmes par B. Lefèbvre, S. J. Tome I. Calcul algébrique. Namur, Wesmael, 1897. (XLIX-220 p. in-8°).

QUESTIONS D'EXAMEN.

811. Résoudre le système

$$\sin^2 x - \sin^2 (y - z) = a,$$
$$\sin^2 y - \sin^2 (z - x) = b,$$
$$\sin^2 z - \sin^2 (x - y) = c.$$

Chercher $\sin (x + y + z)$.

On trouve facilement $\sin (x - y + z)$, $\sin (x + y - z)$, $\sin (y + z - x)$.

812. Trouver la somme

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \cdots + \frac{1}{(a+n-1b)(a+nb)}.$$

On observe que

$$\frac{1}{a(a+b)} = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}\right), \quad \text{etc.}$$

813. Un cercle de rayon constant pivote autour du sommet S d'une parabole et la rencontre en trois autres points A, B, C. Les normales en A, B, C à la parabole se rencontrent en un point P dont le lieu est une ellipse. (E. N. Barisien.)

On sait que si d'un point P (α, β), on abaisse trois normales PA, PB, PC à la parabole $y^2 - 2px = 0$, le cercle ABC a pour équation

$$x^2 + y^2 - x(\alpha + p) - \frac{\beta}{2} y = 0$$

dont les coordonnées du centre sont

$$X = \frac{\alpha + p}{2}, \quad Y = \frac{\beta}{4}.$$

Le rayon du cercle étant constant, R, on a

$$X^2 + Y^2 = R^2.$$

Par suite, le lieu demandé est l'ellipse

$$(\alpha + p)^2 + \frac{\beta^2}{4} = 4R^2.$$

On voit aussi que le cercle ABC a pour enveloppe le cercle

$$x^2 + y^2 = 4R^2.$$

814. On considère une série de paraboles ayant même sommet et même axe. Par un point fixe I de l'axe on mène une corde qui rencontre l'une des paraboles en P et Q. Montrer que la moyenne harmonique des distances de P et Q à l'axe est constante pour toutes les paraboles rencontrées par la même corde. (E.-N. Barisien.)

A démontrer par un calcul direct ou à déduire de ce que I a la même polaire par rapport à toutes les paraboles.

THÉORÈMES SUR LE TRIANGLE,

par M. Francesco Ferrati (Chiesi).

1. Soient A′ et A″, B′ et B″, C′ et C″ trois couples de points pris respectivement sur les côtés (indéfinis) BC, CA, AB d'un triangle fondamental, tels qu'on ait

$$mm'\,pp'\,qq' = +1, \qquad (a)$$

où

$$m = \frac{BA'}{A'C}, \quad p = \frac{CB'}{B'A}, \quad q = \frac{AC'}{C'B},$$

$$m' = \frac{BA''}{A''C}, \quad p' = \frac{CB''}{B''A}, \quad q' = \frac{AC''}{C''B}.$$

On sait (théorème de Carnot et son corrélatif) que les points A′, A″, B′, B″, C′, C″ appartiennent à une même conique, et que les six droites AA′, AA″, BB′, BB″, CC′, CC″ (nous les désignerons par a', a'', b', b'', c', c'') sont tangentes à une même conique.

Les six points donnent lieu à quatre hexagones simples dont aucun côté n'appartient au triangle fondamental ; nous les représenterons par H_1, H_2, H_3, H_4 et leurs pascales par s_1, s_2, s_3, s_4 :

$$H_1 \equiv A'B''C'A''B'C'', \cdots s_1 ; \quad H_2 \equiv A'B'C'A''B''C'' \cdots s_2 ;$$
$$H_3 \equiv A''B'C'A'B''C'', \cdots s_3 ; \quad H_4 \equiv A'B'C''A''B''C' \cdots s_4 .$$

De même, les six droites a, a', $\cdots$ donnent lieu à quatre hexagones (sélatères) simples dont aucun sommet n'appartient au triangle fondamental ; nous les représenterons par h_1, h_2, h_3, h_4 et leurs points de Brianchon par S_1, S_2, S_3, S_4 :

$$h_1 \equiv a'b''c'a''b'c'' \cdots S_1 ; \quad h_2 \equiv a'b'c'a''b''c'' \cdots S_2 ;$$
$$h_3 \equiv a''b'c'a'b''c'' \cdots S_3 ; \quad h_4 \equiv a'b'c''a''b''c' \cdots S_4 .$$

Soient α, β, γ les coordonnées barycentriques de S_1, et u, v, w les coordonnées tangentielles de s_1 ; on trouve aisément, en tenant compte de la relation (a) :

$$\left.\begin{aligned} \alpha : \beta : \gamma &= mp'(m'pq + 1) : (mp'q + 1) : m(1 + m'p'q) \\ u : v : w &= (m'pq - 1) : m'p(mp'q - 1) : p(1 - m'p'q). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Pour passer aux coordonnées de S_2 et s_2, de S_3 et s_3, de S_4 et s_4, il suffit de permuter respectivement p et p', q et q', m et m'.

3. Supposons les points A', A'',... variables sur les côtés du triangle de référence de manière à vérifier constamment les relations

$$\left.\begin{aligned} m : p : q &= \lambda : \mu : \nu, \\ m' : p' : q' &= \lambda' : \mu' : \nu'. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Les points A', B', C', engendreront trois ponctuelles projectives φ_1, φ_2, φ_3 dans lesquelles BCA et CAB sont des ternes de points homologues; de même les points A'', B'', C'' se correspondent dans trois ponctuelles projectives φ'_1, φ'_2, φ'_3 ayant pour ternes de points homologues (B, C, A), (C, A, B).

On peut trouver trois points homologues P_a, P_b, P_c de φ_1, φ_2, φ_3, tels que les droites AP_a, BP_b, CP_c concourent en un même point P; soient P'_a, P'_b, P'_c les points homologues de φ'_1, φ'_2, φ'_3 tels que les droites AP'_a, BP'_b, CP'_c concourent en un même point P'. Si (x, y, z), (x', y', z') sont les coordonnées de P, P', un premier système de valeurs de m, n, p est $\frac{z}{y}, \frac{x}{z}, \frac{y}{x}$, et un premier système de valeurs de m', n', p' est $\frac{z'}{y'}, \frac{x'}{z'}, \frac{y'}{x'}$. On peut donc remplacer les formules (2) par les suivantes où nous avons tenu compte de la relation (a) :

$$\begin{aligned} m = k\frac{z}{y}, \quad p = k\frac{x}{z}, \quad q = k\frac{y}{x}, \\ m' = \frac{1}{k}\frac{z'}{y'}, \quad p' = \frac{1}{k}\frac{x'}{z'}, \quad q' = \frac{1}{k}\frac{y'}{x'}, \end{aligned} \qquad (3)$$

k étant un paramètre variable.

On conclut de ces égalités :

$$mm' = \frac{zz'}{yy'}, \quad pp' = \frac{xx'}{zz'}, \quad qq' = \frac{yy'}{xx'};$$

donc les couples A'A'', B'B'', C'C'' appartiennent à trois involutions I_a, I_b, I_c, qu'on peut définir respectivement par les couples (BC, $P_aP'_a$), (CA, $P_bP'_b$), (AB, $P_cP'_c$).

En substituant les valeurs (3) dans les formules (1), on trouve des résultats de la forme

$$\begin{aligned} \alpha : \beta : \gamma &= (fk + g) : (f'k + g') : (f''k + g''), \\ u : v : w &= (Fk + G) : (F'k + G') : (F''k + G''). \end{aligned}$$

On en déduit que le point de Brianchon de l'hexagone A_1 décrit la droite passant par les points $Q(f, f', f'')$, $Q'(g, g', g'')$; de même, la pascale

de l'hexagone H_1 tourne autour du point d'intersection des droites $q(F, F', F'')$, $q'(G, G', G'')$.

Remarquons aussi que le point S_1 décrit sur la droite QQ' une ponctuelle projective avec la ponctuelle φ_1, les points B, C étant les homologues de Q, Q'.

Pour les coordonnées de S_2, on trouve :

$$\alpha : \beta : \gamma = (k^2 d + e) : (k^2 d' + ke') : (k^2 d'' + ke'');$$

ce point décrit donc une cubique ; par analogie, S_3 et S_4 parcourent des cubiques, et les droites s_2, s_3, s_4 enveloppent les courbes de la troisième classe.

3. Un cas particulier remarquable est celui où les points P et P' coïncident, de manière que A'', B'', C'' se correspondent également dans les homographies φ_1, φ_2, φ_3 ; les formules (3) sont alors

$$m = k\frac{z}{y}, \quad p = k\frac{x}{z}, \quad q = k\frac{y}{x},$$

$$m' = \frac{1}{k}\frac{z}{y}, \quad p' = \frac{1}{k}\frac{x}{z}, \quad q' = \frac{1}{k}\frac{y}{x}.$$

Le point S_1 est alors constamment en P ; les points S_2, S_3, S_4 décrivent respectivement les droites BP, CP, AP. La pascale s_1 de H_1 coïncide avec la polaire trilinéaire de P, et les droites s_2, s_3, s_4 tournent autour des points conjugués harmoniques de P_a, P_b, P_c par rapport aux segments BC, CA, AB.

4. Les cas particuliers des propositions que nous venons d'établir sont fort nombreux ; nous n'en examinerons ici que les plus intéressants.

Les points P, P' déterminent complètement le groupe A'A''B'B''C'C'' lorsqu'on donne un point du groupe. Prenons pour P le centre de gravité G de ABC, pour P' un point quelconque ; alors A', B', C' divisent BC, CA, AB dans un même rapport k et l'on a

$$m = p = q = k, \quad m' = \frac{1}{k}\cdot\frac{z'}{y'}, \quad \ldots.$$

Le point S_1 décrit la droite qui joint les brocardiens du point P', et s_1 tourne autour du point d'intersection des droites (y', z', x'), (z', x', y'), isobariques de la polaire trilinéaire de P' ; ce point a pour coordonnées $y'z' - x'^2$, $z'x' - y'^2$, $x'y' - z'^2$; la ponctuelle décrite par S_1 est semblable à celles que parcourent les points A', B', C'.

En particulier, si A′, B′, C′ sont les milieux de BC, CA, AB, les points A″, B″, C″ coïncident avec P'_a, P'_b, P'_c, et s_1 passe par le milieu de la droite joignant les brocardiens du point P′. On peut supposer P′ au point de Lemoine K; alors les diagonales de l'hexagone formé par les médianes et symédianes AG, BK, CG, AK, BG, CK passent au milieu de la distance des points de Brocard.

P étant toujours en G, on peut prendre pour A′, B′, C′ les points à l'infini sur les côtés de ABC; a', b', c' sont alors les parallèles à BC, CA, AB par A, B, C, et a'', b'', c'' sont les conjuguées harmoniques des droites AP′, BP′, CP′ par rapport aux angles BAC, CBA, ACB; les diagonales de l'hexagone h_1 seront parallèles à la droite qui joint les brocardiens de P′ ou ce qui revient au même, à la droite A″B″C″, polaire trilinéaire de P′.

5. Les deux points P, P′ peuvent coïncider avec G; alors A′, B′, C′ sont trois points qui divisent BC, CA, AB dans un certain rapport k, et A″, B″, C″ divisent ces côtés dans le rapport inverse $\frac{1}{k}$. Le point S_1 coïncide alors toujours avec G; les points S_2, S_3, S_4 se meuvent sur les médianes BG, CG, AG; la droite s_1 est à l'infini, et les droites s_2, s_3, s_4 sont constamment parallèles aux côtés BC, CA, AB du triangle fondamental. Les diagonales de l'hexagone h_1 sont divisées en G dans le même rapport $\frac{2k+1}{k+2}$. Dans l'hexagone h_2, deux diagonales sont parallèles à AB et BC, la troisième est dirigée suivant BG; S_2 divise les deux premières dans le rapport k, et la troisième dans le rapport $\frac{2k+1}{k^2(k+2)}$.

Les points S_2, S_3, S_4 forment un groupe isobarique, de même que les droites s_2, s_3, s_4. Les triangles $S_2S_3S_4$, $s_2s_3s_4$ sont homothétiques au triangle ABC par rapport au point S_1, les rapports de similitude ayant pour valeurs

$$\frac{(m-1)^2}{m^2+m+1}, \quad \frac{m^2-m+1}{(m+1)^2};$$

le trilatère $a'b'c'$ a une aire moyenne proportionnelle entre les aires ABC, $S_2S_3S_4$; l'aire A′B′C′ est moyenne proportionnelle entre les aires ABC, $s_2s_3s_4$.

J. J. SYLVESTER (1814-1897)(*).

Le grand mathématicien anglais, James Joseph Sylvester, né à Londres, le 3 septembre 1814, est mort en cette ville, le 15 mars 1897.

Il fit ses études universitaires au collège St-John à l'Université de Cambridge et en sortit, en 1837, comme *second wrangler*, le premier rang lui ayant été ravi par un étudiant du même collège, Wm. N. Griffin, qui fut, dans la suite, un modeste clergyman(**).

Comme Sylvester était juif, les règlements de Cambridge ne lui permirent pas d'aspirer aux honneurs académiques; mais, dès 1839, il fut nommé membre de la Société royale de Londres.

En 1838, il succéda à Wm. Ritchie dans la chaire de physique de l'University College, à Londres et l'occupa jusqu'en 1841.

En 1841, il accepta une place de professeur aux États-Unis, à l'Université de Virginie, mais il ne fut guère apprécié dans ce milieu peu scientifique. Il revint bientôt en Europe (1849), entra comme actuaire dans une Société d'assurances, étudia la jurisprudence et devint avocat en 1850.

De 1855 à 1870, Sylvester fut professeur à l'Académie royale militaire de Woolwich; de 1875 à 1883, il occupa la chaire de mathématiques de l'Université John Hopkins à Baltimore et il y fonda l'*American Journal of Mathematics;* en 1883, il fut élu *Savilian Professor* à Oxford, comme successeur de H.-J.-S. Smith, l'éminent arithméticien. En 1892, il donna sa démission, à cause de son grand âge.

On peut dire de Sylvester qu'il est, avec Cayley, le créateur de l'invariantologie. C'est lui qui a introduit, dans cette partie de l'algèbre, la considération simultanée des variables dualistiques que l'on peut appeler *ponctuelles* et *tangentielles;* on lui doit la théorie des contrevariants et des divariants, une partie de celle des formes canoniques et une foule de résultats particuliers dans la théorie des formes. La

---

(*) D'après HALSTED, *Sylvester* (dans la Revue *Science* de New-York, n° du 16 avril 1897, pp. 597-604); E. LAMPE, *Arthur Cayley und James Joseph Sylvester* (dans la Revue *Naturwissenschaftliche Rundschau*, 1897, t. XII, n° 28); E. PICARD, *James Joseph Sylvester* (*Revue générale des sciences pures et appliquées*, 15 septembre 1897, t. VIII, pp. 689-690).

(**) « Quand on songe, dit Halsted, que Sylvester, Wm. Thomson, Maxwell, Clifford, J. J. Thomson ont tous été *second wrangler*, on se demande involontairement si aucun *senior wrangler*, Cayley excepté, peut être mis en parallèle avec eux ». Cayley a été premier (*senior wrangler*) au concours mathématique de 1842.

terminologie de cette nouvelle partie de la science, lui appartient presque toute entière.

Sylvester a aussi écrit de nombreux mémoires sur la théorie des nombres, l'élimination et les équations algébriques, la théorie des substitutions, etc. On lui doit, en particulier, la découverte des relations qui existent entre les racines d'une équation et les fonctions de Sturm et la démonstration d'un théorème de Newton, sur le nombre des racines imaginaires, théorème qui est une généralisation de celui de Descartes et dont on ne connaissait que l'énoncé, depuis plus d'un siècle et demi. Il a trouvé, pour le nombre des nombres premiers compris entre deux nombres donnés, des limites plus resserrées que celles de Tchebychef.

Parmi les objets dont Sylvester s'est occupé en dehors de l'arithmétique et de l'algèbre, il faut citer la théorie des mécanismes. Il a fait, sur ce sujet, en anglais et en français, des conférences humoristiques qui n'ont pas peu contribué à faire connaître au monde savant les curieuses découvertes de Peaucellier, de Lipkine et de leurs continuateurs.

Sylvester qui était poète à ses heures, en anglais et en latin, a écrit un livre, aujourd'hui introuvable, dont le titre est à peu près : *Algèbre, poésie et musique, trilogie.*

Sylvester avait une nature enthousiaste. Quand il s'éprenait d'un sujet, il publiait mémoires sur mémoires avec une fécondité inépuisable, complétant, corrigeant, généralisant ses premiers résultats sans jamais prendre le temps de donner une forme achevée aux productions de son esprit inventif, et aussi sans trop s'inquiéter des travaux des autres géomètres(*). C'est sans doute à cause de cette dernière circonstance que ses recherches sur la théorie des nombres, la théorie des cubiques et d'autres sujets encore ne l'ont pas conduit à des découvertes aussi remarquables que celles qui lui sont dues en algèbre.

(*) « Je me rappelle que, dans un de ses voyages à Paris, il y a environ dix ans, il vint me demander si, en six semaines, il pourrait apprendre la théorie des fonctions elliptiques. Sur ma réponse affirmative, il me pria de lui désigner un jeune géomètre qui voulut bien, plusieurs fois par semaine, lui donner des leçons. Celles-ci commencèrent, mais dès la seconde, les réciproquants et les matrices vinrent faire concurrence aux fonctions elliptiques ; quelques leçons continuèrent, où le jeune professeur fut initié aux dernières recherches de Sylvester, et on en resta là » (Picard, Notice citée, p. 690).

NOTES MATHÉMATIQUES.

34. ***Sur un lieu géométrique connu.*** On sait que si un triangle de grandeur constante ABC se déplace de façon que les sommets B et C parcourent respectivement deux droites OX, OY, le troisième sommet A décrit une conique.

Pour simplifier, supposons les droites OX et OY rectangulaires.

Écrivons de la manière suivante *l'équation du lieu du point A* en prenant OX et OY pour axes de coordonnées, et donnant aux côtés et aux angles du triangle ABC les notations habituelles :

Nous avons

$$OB = x + \sqrt{\overline{AB}^2 - y^2} = x + \sqrt{c^2 - y^2},$$
$$OC = y + \sqrt{\overline{AC}^2 - x^2} = y + \sqrt{b^2 - x^2}.$$

Or

$$\overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 = a^2.$$

L'équation du lieu est donc immédiatement

$$(1) \qquad (x + \sqrt{c^2 - y^2})^2 + (y + \sqrt{c^2 - x^2})^2 = a^2.$$

En faisant disparaître les radicaux, on trouve une équation du 4e degré.

Cela tient à ce que, par suite du double signe des radicaux, l'équation (1) représente à la fois le lieu du point A et celui du point A′ symétrique de A par rapport à BC. — D'ailleurs, en posant l'angle $ABO = \varphi$, on trouve pour les coordonnées du point A en fonction de φ,

$$x = a\cos(\varphi + B) - c\cos\varphi, \quad y = c\cos\varphi,$$

et l'élimination de φ entre ces deux équations donne la conique (ellipse)

$$(2) \qquad \frac{(cx + ay\sin B)^2}{(a\cos B - c)^2} + y^2 = c^2.$$

On trouverait de même pour le lieu de A′

$$(3) \qquad \frac{(cx - ay\sin B)^2}{(a\cos B - c)^2} + y^2 = c^2.$$

Il en résulte que l'équation (1) rendue rationnelle doit pouvoir se décomposer en les deux équations (2) et (3). Nous recommandons à nos jeunes lecteurs cette décomposition comme exercice de calcul.

(E. N. Barisien.)

×**35**. *Démonstration nouvelle relative à la perpendiculaire à un plan* (d'après M. Dubonis; J.M.E., juillet 1897, p. 161). Si une droite DO est perpendiculaire à deux droites OA, OB tracées par son pied O, dans un plan P, elle est perpendiculaire à toute droite OC passant par son pied dans le plan. — Coupons OA, OB, OC par la transversale ABC. Si DO n'est pas perpendiculaire à OC supposé entre OA et OB, prenons sur DO le point S situé à une distance CS de C égale à OC. Les triangles SCA, OCA sont tels que $SC = OC$, $CA = CA$, $SA > OA$; donc *angle* $SCA > OCA$. On prouve de même que *angle* $SCB > OCB$. Par suite, on aurait $SCA + SCB$ (ou deux droits) $> OCB + OCA$ (ou deux droits), ce qui est absurde. Donc, etc.

×**36**. *Sur les calculs approchés* (d'après M. L. Gérard, *Bulletin de mathématiques élémentaires*, 15 janvier 1897, p. 113-116). Soient A, B, C des valeurs approchées des quantités a, b, c, telles que les différences $A - a$, $B - b$, $C - c$ soient inférieures en valeur absolue à α, β, γ. On a, A, B, C, $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ étant positives,

$$(A + B) - (a + b) = (A - a) + (B - b) < \alpha + \beta;$$

$$(A - B) - (a - b) = (A - a) - (B - b) < \alpha + \beta;$$

$$AB - ab = (A - a)B + (B - b)a < \alpha B + \beta(A + \alpha);$$

$$ABC - abc = (A - a)BC + (B - b)aC + (C - c)ab$$
$$< \alpha BC + \beta(A + \alpha)C + \gamma(A + \alpha)(B + \beta);$$

$$\frac{A}{B} - \frac{a}{b} = \frac{(A - a)B - (B - b)a}{Bb} < \frac{\alpha B + \beta(A + \alpha)}{B(B - \beta)};$$

$$\sqrt{A} - \sqrt{a} = \frac{A - a}{\sqrt{A} + \sqrt{a}} < \frac{\alpha}{\sqrt{A} + \sqrt{A - \alpha}}.$$

Ces relations résument, en pratique, les règles principales relatives à l'évaluation des *erreurs absolues*, dans les calculs approchés. Dans ces calculs, il est plus simple d'évaluer directement les erreurs absolues, plutôt que de le faire indirectement au moyen d'un calcul préalable des erreurs relatives.

×**37**. *Cercle tangent à trois autres*. Soit D le centre d'un cercle tangent en X, Y, Z, à trois cercles de centres A, B, C et de rayons a, b, c. Soit M le centre radical de trois cercles de centres A, B, C et de rayons $a + m$, $b + m$, $c + m$; prenons sur AM un point P tel que

$$\frac{AP}{AM} = \frac{a}{a + m}.$$

Quand m varie, on voit aisément que M et P décrivent des droites passant respectivement par D et X; on les détermine en donnant à m deux valeurs; on trouve ensuite D et X sans peine.

On construit de même une sphère tangente à quatre autres (Août 1897; L. Gérard).

×**38.** *Solution de la question d'arithmétique posée au concours général de* 1897 *en seconde scientifique.* La démonstration publiée dans *Mathesis* (p. 228) nous paraît susceptible d'une simplification notable(*). On a

$$r_1.10^n = M.b + r_{n+1}$$
$$r_{n+1}.10^n = M.b + r_{2n+1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_{(m-1)n+1}.10^n = M.b + r_1$$

Additionnons membre à membre : il vient immédiatement

$$[r_1 + r_{n+1} + \cdots r_{(m-1)n+1}]\,(10^n - 1) = M.b.$$

Mais b ne divise pas $10^n - 1$, sans quoi la période aurait n chiffres, donc b est premier avec $10^n - 1$ et divise la quantité entre crochets, *c. q. f. d.* La démonstration ne suppose pas que r_1 soit le premier reste.

(M. Stuyvaert).

BIBLIOGRAPHIE.

Théorie des Équations algébriques, par Julius Petersen, professeur à l'Université de Copenhague, traduction par H. Laurent. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1897. (XV-350 p. in 8°). Prix : 10 francs.

L'édition danoise et l'éditon allemande de cet ouvrage ont été accueillies jadis avec faveur; aussi faut-il savoir gré à M. Laurent de nous en avoir donné une traduction française; dans la *Revue des Questions scientifiques* du 20 avril dernier, M. d'Ocagne a fait déjà un compte rendu très détaillé de cette traduction.

Le Livre de M. Petersen se subdivise en deux sections profondément distinctes : 1° un excellent traité sur la théorie des Équations; 2° un mémoire sur les Covariants des formes binaires (pp. 311 à 345), mémoire intéressant à la vérité, mais qui contient des recherches personnelles, et ne constitue pas, comme le reste, une œuvre de haute vulgarisation. Dans cette dernière partie, pour conserver l'analogie et la proportion avec les pages précédentes, l'auteur aurait dû exposer les méthodes d'Aronhold et Clebsch, à qui il emprunte quelques notations, même

---

(*) Elle nous a été signalée également par MM. A. C. et J. Goux (Louvain). — M. Meurice nous fait remarquer que l'énoncé de la question ne suppose pas non plus que la somme des restes considérés commence par le premier.

celle de Cayley, puis la sienne propre, et les comparer entre elles, ce qui l'aurait conduit à écrire deux cents pages de plus; ce chapitre des Covariants sort donc complètement du cadre de l'ouvrage (*) et nous ne nous en occuperons pas.

La théorie des Équations algébriques (**) est divisée en quatre parties.

I. *Propriétés générales des équations.* La première difficulté qui se présente ici est le théorème de d'Alembert; l'auteur donne, en peu de mots, la démonstration d'Argand et celle de Cauchy basée sur des considérations géométriques; ces raisonnements ont le degré de rigueur compatible avec leur extrême concision, ce qui ne signifie peut-être pas la rigueur absolue; mais celle-ci a-t-elle jamais été réalisée dans cette question?

Après avoir donné l'essentiel sur les fonctions symétriques, l'auteur expose plusieurs méthodes d'élimination, les compare et les discute; d'ailleurs, il agit de la même façon en plusieurs autres endroits du livre : comparaison entre les manières de procéder de divers auteurs, exposé complet pour les premières, résumé succinct pour les autres. Quant à l'élimination, ce sujet n'est pas épuisé dans l'ouvrage de M. Petersen; au surplus d'importants travaux sur la matière sont postérieurs à son édition allemande. A noter le remplacement des méthodes classiques de Bezout, Cauchy, Cayley, par une autre, due à M. Laurent, plus générale, mais moins accessible aux débutants.

La première partie se termine par les développements habituels sur les transformations des équations.

II. *Résolution algébrique.* Diverses méthodes pour résoudre les équations du 3e et du 4e degré sont suivies de la solution trigonométrique de l'équation binôme. On arrive alors au point culminant de tout le volume, l'impossibillté de résoudre l'équation du 5e degré (***), et la théorie des Équations abéliennes; puis naturellement la résolution algébrique des Équations binômes. Ici il faut louer presque sans réserve : M. Petersen est parvenu, mieux qu'aucun autre, à rendre accessibles ces difficiles questions. Enfin, pour couronner cette seconde partie, vient un chapitre entièrement original sur la possibilité de résoudre les équations au moyen de racines carrées.

III. *Résolution numérique.* Cette partie se rapproche assez bien des passages correspondants de l'Algèbre supérieure de Serret. Dans un premier chapitre, on trouve, outre les limites des racines et la règle de Descartes (laquelle manque de rigueur et de clarté), les théorèmes pour la séparation des racines de Budan, Sturm, Fourier, Newton-Sylvester, suivis de recherches personnelles sur ce

---

(*) Ce chapitre n'est pas dans l'édition originale.

(**) La matière traitée ne coïncide donc pas avec ce que nous appelons ordinairement « Algèbre supérieure » : la théorie complète des déterminants, la recherche des dérivées des fonctions entières, la décomposition des fractions rationnelles, etc. sont supposées connues du lecteur

(***) M. Darboux a signalé (*Bullet. des Sc. math.* 1878) une lacune du raisonnement de M. Petersen; un passage obscur (p. 115) que nous citons plus bas rend inintelligible toute la fin de la démonstration.

sujet. Dans le second chapitre, après quelques notions du Calcul des différences, l'auteur expose les méthodes d'approximation de Newton, Lagrange, Horner, etc.

IV. *Substitutions.* L'auteur donne, sous une forme aussi simple que la difficulté des questions le permet, ce qu'il faut connaître des substitutions pour comprendre la théorie des groupes de Galois. Quant à la marche des idées, au but poursuivi, cette théorie a des liens de parenté avec quelques chapitres de la seconde partie, et l'on peut regretter de ne pas voir ce fait mis en lumière. Mais aussi pourquoi ces deux sujets sont-ils séparés par toute la résolution numérique? C'est à cause de cela sans doute qu'un critique (*) a pu trouver la théorie des substitutions reliée trop lâchement au reste de l'œuvre; en intervertissant l'ordre de la 2e et de la 3e parties, on supprimerait en outre un inconvénient de détail qui se fait sentir à la page 117.

On voit, d'après cette analyse, qu'en maint endroit, M. Petersen a ajouté aux découvertes de ses devanciers. Quant au reproche qu'on lui a fait(**) d'avoir produit une œuvre unilatériale (*einseitig*) et de n'être pas au niveau des derniers perfectionnements de la science, ce reproche semble viser l'absence de l'Invariantologie (***) et nous ne pouvons l'admettre, à moins qu'on n'entende exprimer par là combien serait désirable une théorie complète des Formes binaires due à la plume du même auteur. Car il faut reconnaître que cette théorie, au début simple chapitre d'Algèbre, s'est élevée au rang de science indépendante.

Quand on examine le livre de M. Petersen, au point de vue du style, on est frappé dès l'abord de la simplicité et de l'extrême concision du langage, et cette concision n'est pas seulement dans la forme, mais encore dans le fond : on sent que l'auteur, dominant de haut son sujet, a, pour chaque raisonnement, examiné les diverses variantes et choisi la plus directe. Par là le livre acquiert une espèce de charme; le lecteur découvre promptement le vrai sens des questions traitées et leur solution paraît facile.

Cependant il faut bien reconnaître que ça et là la brièveté de l'exposition n'a pas été sans nuire à la rigueur et à la clarté; peut-être aussi, convient-il de se demander si une certaine part de responsabilité n'incombe pas au traducteur.

Nous lisons par exemple : p. 50, « Nous avons seulement évincé les facteurs « communs à un v et à un u de même indice, car on n'a à combiner que dans ce « cas u et v avec une même équation. — p. 93, Lagrange cherche à déterminer « une fonction des racines qui, une fois connue, permette d'en utiliser les racines. « — p. 115, Or, une permutation circulaire de trois quantités peut s'obtenir en « exécutant deux permutations de cinq d'entre elles. — Il est dit aussi (p. 176) « qu'un théorème de Fourier a été publié *avant* par Budan, et M. Laurent, dans

(*) Voir *Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik*, 1877.

(**) Voir la note précédente.

(***) Les Invariants manquent dans l'édition allemande; dans le texte français, ainsi que nous l'avons dit, le chapitre des Covariants ne peut avoir la prétention de combler cette lacune, si lacune il y a.

» sa préface, annonce une *théorie* nouvelle de la *théorie* des formes binaires. Etc. »

Ces légères négligences, qui semblent indiquer une traduction faite un peu à la hâte, s'expliquent aisément quand on songe au nombre et à la valeur des publications de l'honorable traducteur, et on ne peut que le remercier d'avoir bien voulu consacrer une partie de son temps à mettre le livre de M. Petersen à la portée de tous les lecteurs en en donnant une version française. Au reste, si le succès de l'ouvrage répond à son mérite, l'occasion se présentera bientôt de rendre la forme correcte dans une nouvelle édition.

Terminons par une remarque pratique : chez nous, il se manifeste, dans l'enseignement, une heureuse tendance à remplacer les cours manuscrits par un manuel imprimé. A cause de ses grandes qualités, et même de ses petits défauts, le livre de M. Petersen convient très bien pour servir de base à l'enseignement oral. (M. STUYVAERT.)

NOTE. Voici sur la théorie des covariants des formes binaires de M. Petersen, laissée de côté par M. Stuyvaert dans l'analyse précédente, l'appréciation de M. d'Ocagne : « Nous n'avons pas moins d'éloges à donner à la théorie des formes binaires qui forme la cinquième partie de l'ouvrage et qui n'en est pas la moins originale. Grâce à l'emploi systématique de certaine notation symbolique, l'auteur a pu donner à cet exposé une remarquable homogénéité et nous pensons que les personnes mêmes les plus familiarisées avec cette théorie auront grand plaisir à se rendre compte des voies si directes à la fois et si faciles à suivre que l'auteur a ouvertes pour son exploration. Rien d'aussi vraiment élémentaire n'a sans doute jamais été écrit sur ce sujet en langue française et une première étude faite sur cet exposé facilitera grandement dans l'avenir la lecture des travaux d'ordre plus élevé existant sur la matière et dont l'abord direct est, en général, fort loin d'être aisé. » (*Revue des Questions scientifiques*, avril 1897, pp. 610-611).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 411.

(Voir *Mathesis*, (1) V, p. 23 et (2) I, p. 29).

Soient OA, OB, OC *trois demi-diamètres conjugués quelconques d'un ellipsoïde, et soient* OA′, OB′, OC′ *les demi-diamètres perpendiculaires aux plans* BOC, COA, AOB. *Trouver entre* OA′, OB′, OC′ *des relations analogues aux théorèmes d'Apollonius.* (J. NEUBERG).

Solution par M. STUYVAERT (Gand). Appelons a, b, c les longueurs des demi-diamètres OA, OB, OC, et a', b', c' les longueurs OA′, OB′, OC′. Tout ce qui suit s'appliquera généralement à toutes les quadriques à centre, si l'on admet que les longueurs ci-dessus peuvent avoir des valeurs imaginaires, c'est-à-dire si a^2 représente la puissance positive

ou négative de l'involution de points conjugués sur le diamètre OA. Soient de même α, β, γ les longueurs des demi-axes de symétrie.

Désignons encore par

$$(a), (b), (c); \quad (a'), (b'), (c');$$
$$(bc), (ca), (ab); \quad (b'c'), (c'a'), (a'b'),$$

les angles dièdres et les angles plans des trièdres supplémentaires OABC et OA'B'C'.

On sait que :

$$(a) = \pi - (b'c'), \text{etc.}, \quad (a') = \pi - (bc), \text{ etc.}$$

Si, dans le plan AOB, on mène le diamètre OD perpendiculaire à OA, et si l'on désigne sa longueur par $2d$, on a, en vertu d'une propriété connue des coniques,

$$\frac{1}{d^2} = \left[\frac{1}{b^2} + \frac{\cos^2(ab)}{a^2}\right] \times \frac{1}{\sin^2(ab)}. \tag{1}$$

Mais dans toute quadrique, la somme des carrés des inverses de trois diamètres rectangulaires est constante; les axes de symétrie et les diamètres OA, OD, OC' sont deux systèmes pareils, donc on peut écrire :

$$\frac{1}{d^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c'^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = s^2. \tag{2}$$

Eliminons d des équations (1) et (2), et déduisons de l'égalité obtenue, deux relations analogues, par permutation tournante; nous aurons :

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \times \frac{1}{\sin^2(ab)} + \frac{1}{c'^2} &= s^2, \\ \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \times \frac{1}{\sin^2(bc)} + \frac{1}{a'^2} &= s^2, \\ \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) \times \frac{1}{\sin^2(ca)} + \frac{1}{b'^2} &= s^2. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

On tire de ces égalités :

$$\frac{2}{a^2} = \left(s^2 - \frac{1}{b'^2}\right)\sin^2(ac) + \left(s^2 - \frac{1}{c'^2}\right)\sin^2(ab) - \left(s^2 - \frac{1}{a'^2}\right)\sin^2(bc).$$

Remplaçons $\sin(ac)$ par $\sin(b')$, etc., puis opérons une permutation tournante; nous trouverons :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{2}{a^2} &= \left(s^2 - \frac{1}{b'^2}\right)\sin^2(b') + \left(s^2 - \frac{1}{c'^2}\right)\sin^2(c') - \left(s^2 - \frac{1}{a'^2}\right)\sin^2(a'),\\
\frac{2}{b^2} &= \left(s^2 - \frac{1}{c'^2}\right)\sin^2(c') + \left(s^2 - \frac{1}{a'^2}\right)\sin^2(a') - \left(s^2 - \frac{1}{b'^2}\right)\sin^2(b'),\\
\frac{2}{c^2} &= \left(s^2 - \frac{1}{a'^2}\right)\sin^2(a') + \left(s^2 - \frac{1}{b'^2}\right)\sin^2(b') - \left(s^2 - \frac{1}{c'^2}\right)\sin^2(c').
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Or les théorèmes analogues à ceux d'Apollonius, pour les quadriques, peuvent se traduire par les égalités

$$\left.\begin{aligned}
a^2b^2c^2\sin^2(ab)\sin^2(ac)\sin^2(a) &= C^{te} = \alpha^2\beta^2\gamma^2,\\
a^2b^2\sin^2(ab) + b^2c^2\sin^2(bc) + c^2a^2\sin^2(ca) &= C^{te} = \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2,\\
a^2 + b^2 + c^2 &= C^{te} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Il n'y a plus qu'à substituer, dans ces dernières, les valeurs de a, b, c tirées des précédentes. Pour la facilité, il convient d'écrire les égalités (5) sous la forme suivante :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{8}{a^2b^2c^2} &= \frac{8\sin^2(c')\sin^2(b')\sin^2(b'c')}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\\
\frac{2}{c^2\sin^2(b')\sin^2(b'c')} + \frac{2}{a^2\sin^2(c')\sin^2(c'a')} + \frac{2}{b^2\sin^2(a')\sin^2(a'b')} &= 2\frac{\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} = 2s^2\\
\frac{4}{b^2c^2} + \frac{4}{a^2c^2} + \frac{4}{a^2b^2} &= \frac{4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\sin^2(c')\sin^2(b')\sin^2(b'c')}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Dans la première de ces égalités les angles peuvent, sans altération du résultat, subir une permutation tournante; les deux autres ont été obtenues en divisant les deux dernières relations (5) respectivement par $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ et $a^2b^2c^2$ et en ayant égard à la première; les coefficients numériques ne sont mis que pour la commodité des substitutions.

La seconde des formules (6) donne alors, en tenant compte des relations de la forme

$$\sin(b')\sin(b'c') = \sin a'\sin(a'c'),$$

$$\Sigma\left(s^2 - \frac{1}{a'^2}\right)\left[\frac{1}{\sin^2(a'b')} + \frac{1}{\sin^2(a'c')} - \frac{\sin^2(a')}{\sin^2(b')\sin^2 a'b')}\right] = 2s^2$$

ou encore

$$\Sigma\left(s^2-\frac{1}{a'^2}\right)\frac{\sin^2(a'c')+\sin^2(b'a')-\sin^2(b'c')}{\sin^2(a'b')\sin^2(a'c')}=2s^2.$$

La troisième des formules (6) donne, d'autre part,

$$2\Sigma\left(s^2-\frac{1}{a'^2}\right)^2\sin^4(a')-2\Sigma\left(s^2-\frac{1}{a'^2}\right)\left(s^2-\frac{1}{b'^2}\right)\sin^2(a')\sin^2(b')=$$
$$-\frac{4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\sin^2(c')\sin^2(b')\sin^2(b'c')$$

ou encore

$$\Sigma\left(s^2-\frac{1}{a'^2}\right)\frac{2\sin^2(a')}{\sin^2(b')\sin^2(a'b')}-\Sigma\left(s^2-\frac{1}{a'^2}\right)\left(s^2-\frac{1}{b'^2}\right)\times\frac{1}{\sin^2(a'b')}=C'^e.$$

La première des formules (6) fournit enfin une relation facile à écrire, mais compliquée.

Question 1061.

(Voir *Mathesis* (2), VI, p. 80).

Chercher le lieu des sommets de paraboles tangentes à deux normales rectangulaires d'une parabole donnée et ayant le même foyer que cette conique. (E. Duporcq.)

Solution par MM. R. Buysens (Gand) et Droz Farny. Soient A et B les pieds de deux normales rectangulaires, P et Q les pieds des perpendiculaires abaissées sur ces normales du foyer F de la parabole donnée. La droite PQ sera la tangente au sommet de la parabole π qui doit toucher les normales considérées. Mais la projection du foyer d'une parabole sur une normale à cette courbe décrit une parabole Σ ayant même axe que la première et ayant pour sommet le foyer de celle-ci.

En effet, la normale et la tangente en A, étant deux droites conjuguées rectangulaires, déterminent sur l'axe de la parabole deux points N et T équidistants du foyer. Le point P est donc le milieu de AN. Soit A_1 le milieu de la perpendiculaire abaissée du point A sur l'axe; A_1 décrit une parabole affine à la parabole donnée, ayant même sommet et même axe. Le segment A_1P est parallèle à l'axe et vaut la moitié de la sous-normale ou la distance du sommet au foyer; d'où le lieu du point P.

La droite PQ tourne donc autour du point de Frégier F_1 du sommet F de la parabole Σ. La projection du point F sur cette droite ou le sommet de π décrit la circonférence de diamètre FF_1.

Autres solutions géométriques par MM. Retali, Déprez et Francq.

MM. Soons et Déprez, après avoir remarqué que le sommet S de la parabole variable π est la projection de F sur la droite PQ, achèvent respectivement la solution en cherchant les équations des circonférences de diamètre FP et FQ en coordonnées polaires, ou les équations des droites PQ et FS en coordonnées rectangulaires et en éliminant entre les deux équations un paramètre variable.

M. Barisien observe que la directrice de π passe par les symétriques de F par rapport aux normales AP et BQ, et par le point N ; de son équation, il déduit que cette droite passe par un point fixe K de l'axe de la parabole donnée. La projection ρ de F sur la directrice de π décrit la circonférence de diamètre FK ; mais S est le milieu de $F\rho$, etc.

Question 1081.

(Voir *Mathesis* (2), VI, p. 215).

Par le point de rebroussement d'une cardioïde, on mène deux transversales rectangulaires et l'on considère les paraboles qui touchent ces droites et qui ont leur foyer sur la courbe. Démontrer que l'enveloppe de ces paraboles est une hypocycloïde de Steiner. (Droz-Farny.)

Solution par M. Gob. L'énoncé porte la restriction inutile que les deux transversales soient rectangulaires.

Soient deux droites AB et AC, et un axe quelconque Δ. Si d'un point quelconque M de Δ on abaisse des perpendiculaires MN, MP sur AB et AC, la droite NP enveloppe, lorsque M se déplace sur Δ, une parabole dont le foyer F est la projection de A sur Δ.

Considérons maintenant un cercle ABC passant par A et soient Q et R les points d'intersection de Δ avec ce cercle. Les droites de Simson de ces points Q et R par rapport au triangle ABC sont tangentes à la parabole. Elles sont aussi tangentes à l'hypocycloïde de Steiner, enveloppe des droites de Simson du triangle ABC. La parabole et l'hypocycloïde ont deux autres tangentes communes qui sont AB et AC.

Lorsque Δ est tangent au cercle ABC, les points Q et R coïncident de même que leurs droites de Simson. La parabole est tangente à l'hypocycloïde. Si l'on suppose que Δ se déplace en restant tangent au cercle ABC, le foyer F décrira la podaire de ce cercle par rapport au point A.

On a donc le théorème suivant qui est équivalent à la proposition énoncée ;

Le lieu des foyers des paraboles tangentes à une hypocycloïde à trois rebroussements et ayant avec cette courbe deux tangentes communes AB *et* AC *est une cardioïde dont le point de rebroussement est* A.

Remarques. 1. La directrice de la parabole enveloppe un cercle.

2. On démontre de même les théorèmes suivants :

a) Le lieu des foyers des paraboles ayant avec une hypocycloïde de Steiner deux tangentes communes fixes AB et AC et telles que les deux autres tangentes communes fassent un angle constant est un limaçon de Pascal dont le point double est A. La directrice de la parabole enveloppe une circonférence.

b) Le lieu du foyer d'une parabole ayant avec une hypocycloïde de Steiner deux tangentes fixes AB et AC et telle que les deux autres tangentes communes fassent des angles égaux et de sens contraire avec une direction fixe est une droite passant par A.

L'axe de la parabole se déplace parallèlement à lui même.

Question 1093.

(Voir *Mathesis* (2), VI, p. 264).

L'hyperbole des pieds des normales menées à une ellipse d'un point mobile sur la circonférence qui a pour diamètre un axe de cette ellipse, enveloppe une kreuzcurve. (Barbette).

Solution par M. Cristesco. L'enveloppe est encore une *kreuzcurve*, lorsque le point d'où l'on mène les normales, se meut sur une circonférence concentrique avec l'ellipse et de rayon quelconque.

En effet, soit

$$\alpha^2 + \beta^2 - k^2 = 0, \tag{1}$$

l'équation de la circonférence sur laquelle se meut le point mobile.

L'hyperbole d'Apollonius d'un point (α, β) de la circonférence (1) a pour équation

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0. \tag{2}$$

Pour trouver l'enveloppe de l'hyperbole (2), il faut éliminer α, β entre les équations (1), (2) et l'équation :

$$\frac{\alpha}{-a^2y} = \frac{\beta}{b^2x} = \frac{k^2}{-c^2xy}; \tag{3}$$

on a obtenu le troisième rapport en ajoutant les numérateurs et les dénominateurs, après avoir multiplié les deux termes du premier par α, et les deux termes du second par β, et tenant compte des équations (1) et (2).

On en déduit

$$\alpha = \frac{k^2a^2}{c^2x}, \quad \beta = -\frac{k^2b^2}{c^2y};$$

portant ces valeurs dans l'équation (1), on obtient l'équation de l'enveloppe

$$\frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2} = \frac{c^4}{k^2}.$$

Ont résolu la même question MM. Barisien, Colart, Hacken, Déprez, Droz Farny, Collette et Jeřabek.

On obtient une Kreuzcurve semblable en remplaçant l'ellipse donnée par l'hyperbole supplémentaire (de mêmes axes). (Colart, Hacken.)

Si le point d'où l'on mène les normales, se meut sur une seconde conique dont les axes coïncident en direction avec ceux de l'ellipse donnée, l'enveloppe cherchée est encore une Kreuzcurve. Si le point se meut sur une circonférence quelconque, on trouve encore pour l'enveloppe de l'hyperbole d'Apollonius une courbe du quatrième ordre. (Déprez.)

Faisons mouvoir un point sur une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont dirigés suivant les axes de l'ellipse donnée; l'hyperbole d'Apollonius relative ce point a pour enveloppe une hyperbole de mêmes asymptotes que la première. (Déprez.)

Question 1103.

(Voir *Mathesis*, (2) VII, p. 31).

On donne un point fixe O *situé sur une droite* Δ. *Un segment* AB *de longueur constante* a *se déplace sur* Δ *de façon que* O *soit toujours compris entre* A *et* B. *Soit* M *un point du plan tel que les périmètres des triangles* MOB *et* MOA *soient égaux et constants, de valeur* 2p. *Montrer que* :

1° *En général le lieu de* M *est une quartique* φ, *qui lorsque* a *varie, passe par deux points fixes.*

2° *Si* $p = a$, *la quartique* φ *se décompose en deux ellipses ayant un foyer commun en* O. (E. N. Barbarien).

Solution par M. Déprez. Soient $MO = \rho$, $MOA = \omega$, $OA = \lambda$, $OB = \mu$. On a les relations :

$$\lambda + \mu = a. \tag{1}$$

$$\rho + \lambda + \sqrt{\rho^2 + \lambda^2 - 2\lambda\rho\cos\omega} = 2p, \quad \rho + \mu + \sqrt{\rho^2 + \mu^2 + 2\rho\mu\cos\omega} = 2p.$$

Les dernières relations peuvent s'écrire sous la forme :

$$p^2 - p(\rho + \lambda) + \lambda\rho\cos^2\tfrac{1}{2}\omega = 0,\quad p^2 - p(\rho + \mu) + \mu\rho\sin^2\tfrac{1}{2}\omega = 0.$$

D'où

$$\lambda = \frac{p(\rho - p)}{\rho\cos^2\frac{1}{2}\omega - p},\quad \mu = \frac{p(\rho - p)}{\rho\sin^2\frac{1}{2}\omega - p};$$

remplaçant λ, μ par leurs valeurs dans l'équation (1), il vient

$$\rho^2\left[p - \frac{a}{4}\sin^2\omega\right] + p\rho(a - 3p) + p^2(2p - a) = 0.$$

Le point M décrit une quartique.

La quartique passe par les points ayant pour coordonnées $(p, 0)$, (p, π).

Si $p = a$, l'équation de la courbe prend la forme :

$$\rho^2(4 - \sin^2\omega) - 8a\rho + 4a^2 = 0,$$

ou

$$[\rho(2 - \sin\omega) - 2a][\rho(2 + \sin\omega) - 2a] = 0.$$

La quartique se décompose en deux coniques de foyer commun O et ayant pour équations :

$$\rho = \frac{2a}{2 - \sin\omega};\quad \rho = \frac{2a}{2 + \sin\omega}.$$

Remarque. Soit M un point du plan tel que la somme des carrés des côtés des triangles MOB, MOC, ait une valeur constante K^2, le lieu de M est une ellipse ayant O pour centre si $a < K\sqrt{2}$.

En effet, on a les relations :

$$\lambda + \mu = a,$$

$$\rho^2 + \lambda^2 - \lambda\rho\cos\omega = \frac{K^2}{2},\quad \rho^2 + \mu^2 + \mu\rho\cos\omega = \frac{K^2}{2}.$$

On tire des dernières :

$$\lambda - \mu = \rho\cos\omega,\ \text{d'où}\ \lambda = \tfrac{1}{2}(\alpha + \rho\cos\omega).$$

Substituant dans la deuxième relation, on trouve

$$\rho^2(4 - \cos^2\omega) + a^2 - 2K^2 = 0.$$

Le lieu est une ellipse de centre O, si $a < K\sqrt{2}$.

×Question 1118.

(Voir *Mathesis*, (2), VII, p. 80).

Résoudre le système

$a = y + x(1+z)^2$, $b = y(1+z)^2 + xz^2$, $c = x + yz^2$. (E. Lemoine.)

Solution par M. V. Cristesco (Cernavoda, Roumanie). Si l'on résout les deux dernières équations par rapport à x et y, on trouve

$$x = \frac{c(1+z)^2 - bz^2}{(1+z)^2 - z^4}, \quad y = \frac{b - cz^2}{(1+z)^2 - z^4}. \tag{1}$$

Portons ces valeurs dans la première des équations proposées ; il vient

$$[1+z+z^2]\,[a(1+z-z^2) - b(1-z-z^2) - c(1+3z+z^2)] = 0.$$

Par suite, z est donné par les équations

$$z^2 + z + 1 = 0, \tag{2}$$

$$(a - b + c)z^2 - (a + b - 3c)z + (-a + b + c) = 0. \tag{3}$$

Connaissant z, les équations (1) et (2) donneront x et y.

L'équation (2) a ses racines imaginaires. L'équation (3) a ses racines réelles si

$$5(a^2 + b^2 + c^2) - 6(ab + bc + ca) \geqq 0. \tag{4}$$

Remarque. Si a, b, c sont les côtés d'un triangle, l'inégalité (4) exprime que l'on a

$$\overline{IG}^2 \geqq r^2,$$

I étant le centre du cercle inscrit, r son rayon, et G le centre de gravité du triangle. Les équations proposées auront donc, dans ce cas, des racines réelles, données par (1) et (3), quand le centre de gravité du triangle sera extérieur à la circonférence inscrite, ou sur cette circonférence même.

Ont résolu la même question MM. Soons et Deguelde.

×Question 1120.

(Voir *Mathesis*, (2), VII, p. 126).

Quelle relation entre les angles α, β, γ, δ *peut-on déduire de l'égalité*

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma & \sin\delta \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & \cos\delta \\ \sin\beta & \sin\alpha & \sin\delta & \sin\gamma \\ \cos\beta & \cos\alpha & \cos\delta & \cos\gamma \end{vmatrix} = 0 ?$$

(J. Neuberg.)

Solution par MM. A. Droz Farny et Audibert. Retranchons la seconde colonne de la première, et la quatrième de la troisième; puis dans le déterminant transformé, additionnons la première ligne à la troisième et la seconde à la quatrième, nous aurons :

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha - \sin\beta & \sin\gamma - \sin\delta & \sin\beta & \sin\delta \\ \cos\alpha - \cos\beta & \cos\gamma - \cos\delta & \cos\beta & \cos\delta \\ 0 & 0 & \sin\alpha + \sin\beta & \sin\gamma + \sin\delta \\ 0 & 0 & \cos\alpha + \cos\beta & \cos\gamma + \cos\delta \end{vmatrix} = 0.$$

ou

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha - \sin\beta & \sin\gamma - \sin\delta \\ \cos\alpha - \cos\beta & \cos\gamma - \cos\delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sin\alpha + \sin\beta & \sin\gamma + \sin\delta \\ \cos\alpha + \cos\beta & \cos\gamma + \cos\delta \end{vmatrix} = 0.$$

d'où l'on déduit aisément en transformant encore les sommes ou différences en produits :

$$\sin(\alpha - \beta)\sin(\gamma - \delta)\sin^2\frac{\alpha + \beta - \gamma - \delta}{2} = 0.$$

On en conclut

$$\alpha - \beta = k\pi, \quad \gamma - \delta = k\pi, \quad \text{ou} \quad \alpha + \beta - \gamma - \delta = 2k\pi.$$

Autre solution par M. Dépresz.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1143. On considère tous les limaçons de Pascal, ayant pour équation polaire

$$\rho = a\cos\theta + b.$$

1° Si a est fixe et b variable, et si l'on mène par le point double O une sécante qui rencontre la courbe en P et Q, montrer que, pour tous les limaçons de la série, les tangentes en P et Q se rencontrent sur une droite fixe.

2° Si a et b sont constants, et si la droite OPQ est mobile, les tangentes en P et Q se rencontrent sur une cubique dont on demande de trouver l'aire comprise entre la courbe et son asymptote. (E. N. Barisien.)

1144. Si cinq droites sont tangentes à une même hypocycloïde à trois rebroussements : 1° Les foyers des cinq paraboles inscrites aux quadrilatères obtenus en prenant ces droites quatre à quatre sont en ligne droite; 2° Les perpendiculaires menées par le centre du cercle des neuf points sur la droite d'Euler de chacun des dix triangles obtenus en

prenant les droites trois à trois concourent au point central de l'hypocycloïde. (A. Gob).

×**1145.** Soit ABCD un quadrilatère gauche dans lequel les angles A et B sont égaux, de même que les angles C et D. Démontrer : 1° que AD = BC, AC = BD ; 2° que la droite joignant les milieux des côtés AB et CD est perpendiculaire à ces côtés ; 3° que la plus courte distance des côtés AD et BC est équidistante des sommets A et B.

La figure ABCD peut être appelée un *trapèze isoscèle gauche*.

(Muirhead.)

×**1146.** Dans un triangle ABC, avec les notations ordinaires, on pose

$$\delta = 4R + r, \quad \delta_a = 4R - r_a, \dots$$

Démontrer que

$$a\delta + br_c + cr_b = b\delta + cr_a + ar_c = c\delta + ar_b + br_a =$$
$$2p\,(2R + r) - a\delta_a + br_b + cr_c = b\delta_a - cr - ar_b = c\delta_a - ar_c - br$$
$$= 2\,(p - a)\,(2R - r_a).$$

On a deux autres groupes analogues contenant δ_b et δ_c. (E. Lemoine).

PUBLICATIONS RÉCENTES.

21. *Cours élémentaire d'Algèbre théorique et pratique*, à l'usage des écoles moyennes, des écoles normales primaires et des écoles industrielles, par M. Haccour, régent à l'École moyenne de l'État, à Péruwelz. Deuxième édition, modifiée et considérablement augmentée. Namur, Wesmael (1897; cartonné, 248 p., in 12). Prix : 2 frcs.

22. *Higher Arithmetic*, by W. W. Beman, Professor of Mathematics in the University of Michigan and D. E. Smith, Professor of Mathematics in the Michigan State Normal College. Boston, U. S. A. and London, Ginn and Co. 1897 (XVII — 193 pp. in 8°, cartonné). Prix : 80 cents = environ 4 fr. 20.

Manuel pratique, avec quelques aperçus théoriques, çà et là, contenant après chaque chapitre d'innombrables problèmes empruntés à la vie usuelle ou aux applications des sciences. *Introduction :* Définitions et étymologies (dix pages). Ch. 1—4. Calcul et divisibilité (40 pages). 5. Résolution des problèmes. 6—8 Nombres complexes; système métrique; mesure des températures; géométrie pratique; longitude et temps. 9-11. Proportions, progressions, logarithmes. 12. Arithmétique graphique. 13-21. Intérêts, escompte, emprunts, assurances, etc. 22. Exercices divers. — Notes.

Tous les professeurs d'arithmétique trouveront à glaner dans ce livre écrit à un point de vue américain, très différent de celui où l'on se place d'ordinaire en Europe.

23. *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen* von R. Fricк, *in* Braunschweig, und F. Klein, in Göttingen. Erster Band: Die gruppentheoretischen Grundlagen. Mit 192 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1896 (XIV-634 pp. gr. in 8°). Prix : 22 marks.

24. *Cours de Mécanique analytique* par E. Pasquier, professeur à l'Université de Louvain. Tome premier. Vecteurs. Cinématique. Statique et dynamique du point. Louvain, Uytspruyst, 1897 (Autographie de VIII-336 p. in 4°).

25. *Cours de Problèmes de Géométrie analytique*, à l'usage des candidats à l'École navale, à l'École centrale et à l'École Polytechnique, par G. de Longchamps, ancien professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, etc. Tome premier. Paris, Ch. Delagrave, 1898 (VIII-295 pp.). Prix : 5 francs.

Deux volumes seront consacrés à la géométrie plane, un troisième à la géométrie solide dans ce cours de Problèmes. Le premier volume contient cinq chapitres traitant des généralités, trois des coniques (axes, tangentes, poles, polaires, centres, diamètres, asymptotes).

L'auteur, bien connu des lecteurs de *Mathesis*, vient d'être nommé Censeur des études au lycée de Charlemagne; il abandonne en même temps la direction du *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales*, qui, grâce à ses efforts intelligents et persévérants, avait acquis une juste réputation dans le monde universitaire. En quittant l'enseignement, il s'est proposé de résumer et de classer les conseils si complexes que l'on peut donner aux élèves qui abordent les problèmes de la Géométrie analytique. Le *Cours de problèmes*, dernier effort de sa vie de professeur, se distingue des autres recueils d'exercices de géométrie analytique; c'est un ouvrage original, qui est appelé à rendre de grands services aux élèves et aux professeurs.

QUESTIONS D'EXAMEN.

815. Les médianes d'un triangle forment une progression arithmétique; examiner quand le triangle est rectangle, acutangle ou obtusangle. (Bosi.)

Soient $\alpha = x$, $\beta = x + y$, $\gamma = x + 2y$ les trois médianes ; il faut et il suffit que l'on puisse construire un triangle dont les côtés soient proportionnels à ces médianes, donc $x > y$. Au plus grand côté correspond la plus petite médiane; on a donc à examiner la quantité

$$b^2 + c^2 - a^2 = \frac{4}{9}(5\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) = \frac{4}{9}(3x^2 - 6xy - 5y^2).$$

Le triangle est rectangle si $x = y(1 + \sqrt{\frac{8}{3}})$, acutangle si $x > y(1 + \sqrt{\frac{8}{3}})$, obtusangle si $x < y(1 + \sqrt{\frac{8}{3}})$ et $> y$.

816. Le trinôme

$$a^{n+1} - (n+1)ab^n + nb^{n+1}$$

est divisible par $(a-b)^2$, et le quotient de la division est

$$a^{n-1} + 2a^{n-2}b + 3a^{n-3}b^2 + \cdots + nb^{n-1}.$$

Conclure de là que :

$$2^{2n} + 15n - 1 = \text{M}.9, \quad 2^{4n} - 15n - 1 = \text{M}.25.$$

(Bellachi.)

817. Les trois côtés d'un triangle rectiligne sont en progression arithmétique ; trouver la condition pour que le triangle soit rectangle, acutangle ou obtusangle.

Soient x, $x+y$, $x+2y$ les trois côtés ; on doit d'abord avoir

$$x + 2y < x + (x+y) \text{ ou } x > y.$$

Ensuite, on examinera les relations

$$x^2 + (x+y)^2 - (x+2y)^2 = 0, \text{ ou } > 0, \text{ ou } < 0.$$

Les racines du *trinôme* $x^2 - 2xy - 3y^2$ étant $x = 3y$, $x = -y$, le triangle est rectangle si $x = 3y$, acutangle si $x > 3y$, obtusangle si $x > y$ et $< 3y$.

818. Posons

$$S_1 = 1 + 2 + \cdots + n, \quad S_2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

Trouver la limite du rapport $\dfrac{S_2^2}{S_1^3}$ lorsque n croît indéfiniment.

(Réponse : $\frac{4}{9}$).

Rectifications. Page 102, q. 1117, lire : 2° les côtés II'', I'I'' enveloppent un cercle.

Page 220, question 23, au lieu de : Neuf carrés *entiers* consécutifs..., lire : Neuf carrés *impairs* consécutifs...

Puis ajouter : On a d'ailleurs, que n soit pair ou impair, l'expression générale :

$$(n-8)^2 + \cdots + (n-2)^2 + n^2 + (n+2)^2 + \cdots + (n+8)^2 = \frac{(3n-15)(3n-16)}{2} + \frac{(3n+15)(3n+16)}{2}.$$

On a également, quel que soit n,

$$(n-3)^2 + (n-1)^2 + (n+1)^2 + (n+3)^2 = \frac{(2n-4)(2n-5)}{2} + \frac{(2n+4)(2n+5)}{2}.$$

(G. de R. A.)

×RÉSUMÉ DE LA THÉORIE DE L'ÉQUIVALENCE

d'après M. L. GÉRARD(*).

1. Dans un triangle ABC dont les hauteurs sont AH, BK, CL, on a $\frac{1}{2}$ AB × CL = $\frac{1}{2}$ BC × AH = $\frac{1}{2}$ CA × BK, comme le prouve la similitude des triangles (ABH, CBL) et (BCK, ACH).

2. Ce demi-produit s'appelle la *puissance du triangle.*

3. On appelle puissance d'un trapèze le demi-produit de la somme de ses bases par sa hauteur.

4. Si l'on divise un triangle en deux parties par une parallèle à une base, la puissance de ce triangle est égale à la somme des puissances de ses parties; il en est de même si on divise le triangle en deux parties par une droite partant de l'un des sommets; ou si on le divise en triangles et en trapèzes par des parallèles à une direction quelconque.

5. La puissance d'un trapèze est égale à la somme des puissances des trapèzes et des triangles de même hauteur obtenus en joignant un point de la base supérieure à un point de la base inférieure.

6. Si l'on décompose un triangle T en triangles *t* d'une manière quelconque, la puissance du triangle total est la somme des puissances de ses parties. Car, en menant par tous les sommets des triangles *t* des parallèles à un côté de T, T est décomposé en trapèzes U; la puissance de T est égale à la somme des puissances des U; celle-ci est égale à la somme des puissances de tous les triangles formés dans la figure; cette somme elle-même est égale à la somme des puissances des triangles *t*.

7. Si l'on décompose un polygone de deux manières en agrégats de triangles, la somme des puissances des deux agrégats de triangles est la même, car elle est égale à la somme des puissances des triangles obtenus en menant à la fois les lignes qui donnent les deux premières décompositions et celles qui sont nécessaires après cela pour que le polygone soit décomposé en triangles.

8. *Un polygone ne peut être équivalent à une de ses parties.* En effet,

---

(*) Voir *Bulletin de mathématiques élémentaires*, 15 juin 1897, pp. 273-276. Nous engageons nos lecteurs à refaire les démonstrations qui sont ici esquissées, sans recourir aux notions ordinaires d'*aire*, de *volume* et d'*équivalence*, puisqu'il s'agit ici de les préciser, de les définir scientifiquement (P. M.).

soit P un polygone formé par la juxtaposition de plusieurs polygones Q, R, S. Si les polygones P et Q pouvaient être équivalents (c'est-à-dire décomposables en triangles superposables chacun à chacun), la puissance de P serait égale à celle de Q, ce qui est impossible puisqu'elle est la somme de celles de Q, R, S.

9. Si deux polygones superposables ont une partie commune, les parties non communes sont équivalentes, c'est-à-dire décomposables en triangles superposables.

10. Ce qui précède s'étend aux polyèdres: on appelle *puissance d'un tétraèdre* le tiers du produit de sa base par sa hauteur; *puissance d'un prismatoïde* (polyèdre limité par deux bases parallèles et par des triangles ou des trapèzes latéraux), le sixième du produit de sa hauteur par la somme des bases et de quatre fois la section moyenne.

11. La puissance d'un polygone peut être prise pour mesure de son aire; celle d'un polyèdre, pour mesure de son volume.

UNE NOUVELLE DÉMONSTRATION DU POSTULATUM D'EUCLIDE

Réponse (Voir *Mathesis*, pp. 225-226.)

« Considérons deux droites AX, BY perpendiculaires à une même troisième AB. Prenons sur AX, les n longueurs égales AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$, et élevons aux points A_1, A_2, ... A_n, les perpendiculaires A_1C_1, A_2C_2, ..., A_nC_n toutes égales à AC, C étant un point quelconque pris sur AB, entre A et B. On peut prouver aisément que les points $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont situés entre les droites AX, BY. Menons les droites CC_1, C_1C_2, ..., $C_{n-1}C_n$ de manière à former n quadrilatères égaux, savoir : AA_1C_1C, $A_1A_2C_2C_1$, ..., $A_{n-1}A_nC_nC_{n-1}$. Des points C_1, C_2, ..., C_n abaissons sur BY les perpendiculaires $C_1B_1, C_2B_2, \ldots, C_nB_n$. Nous formerons ainsi n autres quadrilatères, BB_1C_1C, $B_1B_2C_2C_1$, ..., $B_{n-1}B_nC_nC_{n-1}$.»

Soient 4 droits -2α, la somme des angles des quadrilatères égaux AA_1C_1C, $A_1A_2C_2C_1$, etc.;

$$4 \text{ droits} - \beta_1, \quad 4 \text{ droits} - \beta_2, \quad \ldots, \quad 4 \text{ droits} - \beta_n.$$

les sommes des angles des autres quadrilatères.

On trouve aisément, les angles ACC_1, A_1C_1C étant égaux, que

$$\begin{aligned}
&\text{angle } BCC_1 = 1 \text{ droit} + \alpha\\
&\text{angle } B_1C_1C = 1 \text{ droit} - \alpha - \beta_1\\
&\text{angle } B_1C_1C_2 = 1 \text{ droit} + 3\alpha + \beta_1\\
&\text{angle } B_2C_2C_1 = 1 \text{ droit} - 3\alpha - \beta_1 - \beta_2\\
&\text{angle } B_2C_2C_3 = 1 \text{ droit} + 5\alpha + \beta_1 + \beta_2,\\
&\text{angle } B_3C_3C_2 = 1 \text{ droit} - 5\alpha - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

et ainsi de suite, tant que les perpendiculaires C_1B_1, C_2B_2, C_3B_3, ... tombent toujours de plus en plus loin de AB.

Mais les calculs précédents prouvent qu'il n'en sera pas toujours ainsi; en effet, chacun des angles BCC_1, $B_1C_1C_2$, $B_2C_2C_3$, ... est plus grand que le précédent de plus que 2α; donc en allant assez loin, on trouvera un angle

$$B_pC_pC_{p+1} = 1 \text{ droit} + (2p+1)\alpha + \beta_1 + \cdots + \beta_p,$$

supérieur à 2 droits. La perpendiculaire $C_{p+1}B_{p+1}$ tombera entre CB et C_pB_p ; car, si elle tombait au delà de C_pB_p, la somme de trois des angles du quadrilatère $B_pC_pC_{p+1}B_{p+1}$ savoir :

$$\text{angle } B_p + \text{angle } B_{p+1} + \text{angle } B_pC_pC_{p+1}$$

serait supérieure à quatre droits, ce qui est absurde.

La perpendiculaire $C_{p+1}B_{p+1}$ tombe donc entre AB et C_pB_p, contrairement à ce qui est supposé dans la démonstration que nous critiquons ici (D'après MM. Barbarin et Sollertinsky).

Note. La démonstration dont nous venons d'indiquer le défaut est, au fond, identique à celle de M. Joubin. Mais il n'est peut-être pas inutile de faire connaître celle-ci, dans sa partie essentielle, sous la forme que lui a donnée son auteur(*).

Considérons deux droites MX, NY perpendiculaires à une même troisième MN et suffisamment espacées; juxtaposons sur chacune d'elles, à l'intérieur du biangle XMNY, à partir des points A_1, B_1 équidistants des points M et N, deux séries d'un même nombre n de triangles tous égaux, savoir :

$$\begin{aligned}
&A_1C_1A_2,\quad A_2C_2A_3,\quad \ldots,\quad A_nC_nK,\\
&B_1D_1B_2,\quad B_2D_2D_3,\quad \ldots,\quad B_nD_nL.
\end{aligned}$$

(*) On passe d'une démonstration à l'autre en élevant au milieu de MN, une perpendiculaire à cette droite, puis abaissant des perpendiculaires, des points C_2, C_3, ..., C_n, sur cette ligne et sur MX.

Menons les droites C_1D_1, C_2D_2, ..., C_nD_n. Nous déterminons ainsi n hexagones :

$$MA_1C_1D_1B_1N, \quad A_2C_1D_1B_2D_2C_2, \quad \ldots, \quad A_nC_{n-1}D_{n-1}B_nD_nC_n.$$

Soient T la somme des angles de l'un des triangles, H, la somme des angles de tous les hexagones; H sera égal ou inférieur à $8n$ droits. La somme des angles de tous les triangles et de tous les hexagones est

$$2n\,T + H.$$

Cette somme est aussi égale à

$$12(n-1) \text{ droits}$$

somme des angles en

$$A_1, C_1, D_1, B_1; \quad A_2, C_2, D_2, B_2; \quad \ldots; \quad A_{n-1}, C_{n-1}, D_{n-1}, B_{n-1};$$

plus 6 droits, somme des angles en M, N, A_n, B_n; *plus* enfin la somme V inconnue, des angles en K, L, C_n, D_n.

On a donc

$$2n\,T + H = 12(n-1) \text{ droits} + 6 \text{ droits} + V;$$

et, par suite, en supprimant V dans le second membre,

$$2n\,T > (12n-6) \text{ droits} - H$$

et aussi, puisque H est égal ou inférieur à $8n$ droits,

$$2n\,T > (4n-6) \text{ droits}.$$

On déduit de là, en divisant par n et transposant un terme,

$$T + \frac{3}{n} \text{ droit} > 2 \text{ droits}.$$

Or, on peut rendre la fraction $\frac{3}{n}$ aussi petite qu'on le veut en prenant n assez grand; donc T, ou la somme des angles du triangle $A_1C_1A_2$, ne peut subir la moindre augmentation sans dépasser 2 droits, ce qui exige que T = 2 droits. On déduit aisément de là le postulatum.

×NOTE MATHÉMATIQUE.

×**30.** ***Note d'Arithmétique.*** Voici quelques remarques suggérées par la question d'arithmétique posée au dernier concours général en seconde scientifique.

1° Si la fraction $\frac{a}{b}$ donne une période de $2n$ chiffres, la somme de deux restes distants de n rangs est égale à b.

En effet, on sait que $r_k + r_{k+n} = \mathrm{M}.b$; mais r_k et r_{k+n} étant plus petits que b, cette égalité exige $r_k + r_{k+n} = b$.

2° On a

$$a \times 10^i = \mathrm{M}.b + r_i, \quad a \times 10^k = \mathrm{M}.b + r_k,$$

d'où

$$a^2 \times 10^{i+k} = \mathrm{M}.b + r_i r_k.$$

On en conclut que les produits

$$r_i r_k, \quad r_{i+1} r_{k-1}, \quad r_{i+2} r_{k-2}, \quad \ldots,$$

divisés par b, donnent le même reste. (L. Meurice.)

SUR UNE QUESTION D'ARITHMOLOGIE

par M. A. Boutin.

Dans le numéro d'octobre 1897, de *Mathesis*, à l'occasion de la question d'arithmologie n° 3, M. de Rocquigny demande la résolution générale de l'équation

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{x(x+1)}{2} = y^2, \tag{1}$$

x et y étant des fonctions de n.

Dans une note accompagnant la résolution de la question 1009 de *Mathesis*, et dans l'Exercice 413, du J. E. (Exercices divers), on trouvera quelques indications utiles que nous allons compléter.

Si on suppose que x et y sont des polynômes entiers en n, l'identification résultant de (1) amène à écrire que tous les coefficients des termes de degré supérieurs à l'unité sont nuls. La seule hypothèse possible est donc :

$$x = \alpha n - b \quad y = \alpha n - \beta.$$

L'identification donne :

$$a^2 + 1 = 2\alpha^2, \tag{2}$$

$$b^2 + b = 2\beta^2, \tag{3}$$

$$4\alpha\beta + 1 = a(2b + 1). \tag{4}$$

Les équations (2) et (3) sont résolues par les valeurs :

$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 5, \quad \alpha_3 = 29, \quad \alpha_4 = 169, \quad \cdots \quad \alpha_p = 6\alpha_{p-1} - \alpha_{p-2};$

$a_1 = 1, \quad a_2 = 7, \quad a_3 = 41, \quad a_4 = 239, \quad \cdots \quad a_p = 6a_{p-1} - a_{p-2};$

$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_3 = 6, \quad \beta_4 = 35, \quad \cdots \quad \beta_p = 6\beta_{p-1} - \beta_{p-2};$

$b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 8, \quad b_4 = 49, \quad \cdots \quad b_p = 6b_{p-1} - b_{p-2} + 2.$

On a une solution de (1) en prenant pour x et y, les nombres a, b, α, β, affectés du même indice. Il suffit de montrer que, dans ce cas, la relation (4) est satisfaite.

Les nombres a, b, α, β, ne sont pas indépendants, ils sont liés à la suite de Pell :

$$\gamma_0 = 0, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 2, \quad \gamma_3 = 5, \quad \gamma_4 = 12, \quad \gamma_5 = 29, \quad \gamma_6 = 70,$$

$$\cdots \quad \gamma_p = 2\gamma_{p-1} + \gamma_{p-2} = \frac{(1+\sqrt{2})^p - (1-\sqrt{2})^p}{2\sqrt{2}}. \qquad (5)$$

On a

$$\alpha_{p+1} = \gamma_{2p+1}, \quad a_{p+1} = \gamma_{2p+1} + \gamma_{2p},$$

$$\beta_{p+1} = \tfrac{1}{2}\gamma_{2p}, \quad b_{p+1} = \frac{\gamma_{2p} + \gamma_{2p-1} - 1}{2}.$$

L'égalité (4) à vérifier devient, par ces valeurs :

$$1 + \gamma_{2p}^2 = \gamma_{2p-1} \quad \gamma_{2p+1}$$

en introduisant la valeur (5) de γ_p, la vérification est immédiate. Donc, pour les mêmes indices, les solutions de (2) et (3) vérifient (4) et le problème proposé est complètement résolu par les formules :

$$\frac{n(n \mp 1)}{2} + \frac{(a_p n \mp b_p)\,(a_p n \mp b_p \mp 1)}{2} = (\alpha_p n \mp \beta_p)^2.$$

On peut obtenir a_p, b_p, α_p, β_p en fonction de p seulement (Voir E. Lucas, *Théorie des nombres*). — On a par exemple :

$$\alpha_p = 2^{2p-2} + \frac{2p-3}{1} 2^{2p-4} + \frac{(2p-4)(2p-5)}{1.2} 2^{2p-6} +$$

$$\frac{(2p-5)(2p-6)(2p-7)}{1.2.3} 2^{2p-8} + \cdots$$

La loi est manifeste; la formule s'arrête au terme pour lequel l'exposant de 2 est négatif. — On aurait aisément des développements analogues pour a_p, b_p, β_p.

L'équation indéterminée

$$\frac{x(x+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = y^2,$$

qui admet également une infinité de solutions, quel que soit n, donnerait lieu à un calcul analogue au précédent.

SUR QUELQUES QUESTIONS DE CONCOURS EN 1897, EN 2e ET 1re SCIENTIFIQUE,

par M. Déprez, professeur à Charleroi.

1. *Trouver le maximum de* $xy+yz+zx$, *sachant que* $x+y+z=2p$.

On a l'identité

$$6(xy+yz+zx)=2(x+y+z)^2-(x-y)^2-(y-z)^2-(z-x)^2;$$

le maximum de $xy+yz+zx$ a donc lieu lorsque les trois derniers carrés s'annulent ou que $x=y=z$.

Ce résultat peut s'interpréter ainsi :

On donne un triangle équilatéral ABC. *Le triangle podaire d'un point intérieur est maximum si ce point coïncide avec le centre du triangle donné.*

2. *Étant donné un triangle* ABC, *si* D *et* D′ *sont les points où les bissectrices de l'angle* A *et de son supplément rencontrent la droite* BC, *démontrer que les droites qui joignent les projections de* D *et de* D′ *sur les côtés de l'angle* A *se coupent en un point de* BC.

Cette proposition peut être étendue au triangle sphérique. La démonstration se fait facilement par la théorie des transversales.

3. *Dans un triangle* ABC, *si du pied* D *de la hauteur* AD *on abaisse des perpendiculaires* DE, DF *sur les côtés* AB, AC, *la distance* EF *est égale à la moitié du périmètre du triangle formé en joignant les pieds des hauteurs du triangle* ABC.

AD étant le diamètre du cercle circonscrit au triangle DEF, on a

$$EF=AD\sin A=2R\sin A\sin B\sin C.$$

Soient a', b', c' les côtés du triangle formé par les pieds des hauteurs; les angles de ce triangle sont égaux a $180°-2A$, $180°-2B$, $180°-2C$, et le rayon du cercle circonscrit est égal à $\frac{1}{2}R$, donc

$$a'=R\sin 2A,\quad b'=R\sin 2B,\quad c'=R\sin 2C.$$

On en conclut

$$a'+b'+c'=R(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=4R\sin A\sin B\sin C.$$

Voici une démonstration géométrique du même théorème. Appelons H l'orthocentre de ABC, et B′, C′ les pieds des hauteurs BH, CH. Les droites DE, DF rencontrent B′C′ aux points P, Q; comme AC, AB sont les bissectrices des angles DB′Q, DC′P et sont perpendiculaires à DQ, DP, on a

$$DE=EP,\quad DF=FQ,\quad DC'=C'P,\quad DB'=B'Q.$$

Donc PQ représente le périmètre du triangle DB'C', et EF en est la moitié.

4. *Cherchez le lieu des points tels qu'en abaissant des perpendiculaires sur les côtés d'un triangle rectangle, le carré de la perpendiculaire abaissée sur l'hypoténuse soit équivalent au rectangle des deux autres. Discutez l'équation et ramenez-la ensuite à sa forme la plus simple.*

Nous supposerons un triangle quelconque ABC, et nous désignerons par x, y, z les perpendiculaires abaissées d'un point M sur BC, CA, AB.

Le lieu demandé a alors pour équation

$$z^2 - xy = 0.$$

C'est une conique touchant CA, CB en A et B, et passant par le centre I du cercle inscrit et par le centre I_c du cercle exinscrit, situé dans l'angle BCA.

On a une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que

$$c^2 < 4ab,\ c^2 > 4ab \quad \text{ou} \quad c^2 = 4ab.$$

Soient C' le milieu de AB, O le centre de la conique (ellipse ou hyperbole); on a la relation

$$\frac{OC}{OC'} = \frac{4ab}{c^2},$$

d'où l'on déduit une construction de O. Les points A, B, I, I_c appartenant à la fois à la conique et à une circonférence, les axes sont parallèles aux bissectrices des angles des droites AB et CI_c.

Connaissant le centre O, les axes en direction, un point A et la tangente AC, il est facile de trouver les longueurs des axes.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES (*).

Question 1100.

(Voir *Mathesis*, (2) VI, p. 280).

On considère une parabole P *et la droite* D, *symétrique de la tangente au sommet de* P *par rapport à la directrice. Soient* M *un point quelconque de* D *et* AB *la corde polaire de* M *par rapport à* P. *Montrer que :*

1° *Tous les triangles* MAB *ont leur orthocentre au sommet de* P ;

(*) Nous avons oublié de mentionner, pour la question 1104, les solutions de MM. Deguelder et d'Avillez; pour les questions 1103 et 1120, la solution de M. Colart; pour la question 1106, la solution de M. Liebert (Bruxelles).

2° *Le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et le centre du cercle des neuf points du triangle* MAB *décrivent chacun une parabole.*

(E. N. Barisien)(*).

Solution par M. Barisien. La parabole donnée ayant pour équation

$$y^2 - 2px = 0, \tag{1}$$

soient (α, β) les coordonnées d'un point M du plan. Cherchons, dans le cas général, les coordonnées du centre de gravité G, du centre du cercle circonscrit O, de l'orthocentre H et du centre du cercle des neuf points I.

Centre de gravité G. La droite AB a pour équation

$$\beta y = p(x + \alpha). \tag{2}$$

En éliminant x entre (1) et (2), on a

$$y^2 - 2\beta y + 2p\alpha = 0.$$

Cette équation donne les ordonnées y_1 et y_2 des points A et B; donc

$$y_1 + y_2 = 2\beta, \quad y_1 y_2 = 2p\alpha,$$

et les abscisses x_1 et x_2 des points A et B sont liées par les relations

$$x_1 + x_2 = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2p} = \frac{(y_1 + y_2)^2 - 2y_1 y_2}{2p} = \frac{2\beta^2 - 2p\alpha}{p}, \quad x_1 x_2 = \alpha^2.$$

Par suite, les coordonnées de G sont

$$3x_G = x_1 + x_2 + \alpha = \frac{2\beta^2 - 2p\alpha}{p} + \alpha = \frac{2\beta^2 - p\alpha}{p}, \quad y_G = \beta.$$

Centre O *du cercle circonscrit.* L'équation générale d'un cercle passant par A et B est de la forme

$$\lambda(y^2 - 2px) + (\beta y - px - p\alpha)(\beta y + px + \mu) = 0, \tag{3}$$

avec la condition

$$\lambda = -(p^2 + \beta^2). \tag{4}$$

En exprimant que le cercle (3) passe par le point M, on a, après avoir divisé par le facteur $(\beta^2 - 2p\alpha)$,

$$\lambda + \beta^2 + p\alpha + \mu = 0, \quad \text{d'où } \mu = p^2 - p\alpha. \tag{5}$$

En remplaçant dans l'équation (3) λ et μ par leurs valeurs (4) et (5), il vient

$$p(x^2 + y^2) - (2\beta^2 + p^2)x - \beta(p - 2\alpha)y + p\alpha(p - \alpha) = 0.$$

(*) Le nom de l'auteur de la question avait été oublié.

Par conséquent, les coordonnées de O sont

$$x_0 = \frac{2\beta^2 + p^2}{2p}, \quad y_0 = \frac{\beta(p - 2\alpha)}{2p}.$$

Orthocentre H. On sait que les points O, G et H sont en ligne droite et que G est situé entre O et H avec la condition GH = 2OG. Il en résulte que les coordonnés de H s'expriment en fonction de celles de G et O par les relations

$$x_H = 3x_G - 2x_0, \quad y_H = 3y_G - 2y_0.$$

On a donc immédiatement

$$x_H = -(\alpha + p), \quad y_H = \frac{2\beta(\alpha + p)}{p}.$$

Centre I *du cercle des neuf points.* Le point I étant situé au milieu de OH, on a

$$x_1 = \frac{x_0 + x_H}{2}, \quad y_1 = \frac{y_0 + y_H}{2};$$

et, par suite,

$$x_1 = \frac{2\beta^2 - 2p\alpha - p^2}{4p}, \quad y_1 = \frac{\beta(2\alpha + 5p)}{4p}.$$

Démontrons maintenant les propriétés énoncées.

1° Si $\alpha = -p$, le point M est situé sur la droite D et alors

$$x_H = 0, \quad y_H = 0.$$

L'orthocentre est donc bien au sommet de P.

2° En faisant $\alpha = -p$ et éliminant β entre x_G et y_G, on a pour l'équation du lieu du point G

$$2y^2 = 3px - p^2.$$

Ce lieu est une parabole.

On trouve de même que le lieu du point O est la parabole

$$8y^2 = 18px - 9p^2,$$

et que le lieu de I est la parabole

$$32y^2 = 36px - 9p^2.$$

Remarque. On trouverait aussi que :

1° *Le lieu du point de rencontre de la droite d'Euler* (*ou droite* OGH) *du triangle* MAB *avec la droite* AB *est une hyperbole équilatère.*

2° *Le cercle circonscrit au triangle* MAB *enveloppe une cubique.*

3° *Le lieu du point* G′ *conjugué harmonique de* G *par rapport à* O *et* H *est une parabole.*

Autres solutions analytiques par MM. Andrien, Déprez.

Solution géométrique par M. Droz Farny. I. Désignons par F, S, Δ le foyer, le sommet et la directrice de la parabole P, par A′, B′, M′ les milieux des côtés MB, MA, AB du triangle MAB; par H et H′ les orthocentres des deux triangles MAB, MA′B′.

On sait que la droite A′B′ est tangente à la parabole; donc l'orthocentre H′ du triangle circonscrit MA′B′ appartient à la directrice Δ. Soit *m* la projection de M sur Δ; la polaire de M est parallèle à celle de *m*, laquelle est perpendiculaire sur *m*F; donc MH est parallèle à *m*F. On en déduit la construction suivante de l'orthocentre H d'un triangle MAB formé par deux tangentes quelconques et leur corde des contacts : Projetez M en *m* sur la directrice; menez par M une parallèle MH′ à *m*F qui rencontre la directrice en H′; enfin, prolongez MH′ de H′H = MH.

Si M se trouve sur D, on a M*m* = SF = $\frac{1}{2}p$; donc MS est parallèle à *m*F et divisée par D en deux parties égales. On en conclut que S est l'orthocentre du triangle MAB.

Les deux propositions suivantes s'aperçoivent encore facilement : 1° Lorsque M parcourt un diamètre *m*M′ de la parabole, H parcourt la droite *m*S; 2° lorsque M décrit une droite *d* parallèle à la directrice Δ, H décrit la symétrique de *d* par rapport à Δ.

II. Faisons mouvoir M sur une droite donnée quelconque S; AB tournera autour d'un point fixe Q, pôle de S. Les deux droites MM′, AB engendreront deux faisceaux projectifs, et leur intersection M décrira une parabole P′ passant par Q et dont l'axe est parallèle à celui de P.

Si la droite *d* est parallèle à Δ, Q est sur l'axe de P, et les paraboles P et P′ ont le même axe. Le centre de gravité G du triangle MAB divisant la droite MM′ dans un rapport constant décrit une parabole P″.

Prenons pour *d* la droite D définie ci-dessus. Alors l'orthocentre de MAB est constamment en S; le centre O du cercle MAB et le centre I du cercle des neuf points du triangle MAB divisent la droite SG dans des rapports fixes, et, par suite, parcourent des courbes homothétiques à la parabole P″, par rapport à S.

×Question 1108.

(Voir *Mathesis*, (2), VII, p. 80).

Si $Q_{n,p}$ *désigne la somme des produits p à p des fractions* $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \frac{1}{n}$, *on a la formule* :

$$\sum_{p=1}^{p=n} 2^p Q_{n,p} = \frac{1}{2}(n^2+3n).$$

(H. Mandart).

Solution par M. Audibert. Développant la formule dont nous désignerons le premier membre par S_n, on a

$$S_n = 2Q_{n,1} + 2^2 Q_{n,2} + \cdots + 2^n Q_{n,n};$$

mais en vertu de la relation évidente

$$Q_{n+1,p} = Q_{n,p} + \frac{Q_{n,p-1}}{n+1},$$

on peut écrire

$$S_{n+1} = 2\left(Q_{n,1} + \frac{1}{n+1}\right) + 2^2\left(Q_{n,2} + \frac{Q_{n,1}}{n+1}\right) + \cdots$$

$$+2^n\left(Q_{n,n} + \frac{Q_{n,n-1}}{n+1}\right) + 2^{n+1}\frac{Q_{n,n}}{n+1} = S_n + \frac{2}{n+1}[1 + S_n - 2^n Q_{n,n}] + 2^{n+1}\frac{Q_{n,n}}{n+1}.$$

D'où résulte

$$S_{n+1} - S_n = \frac{2}{n+1}\left[1 + \frac{1}{2}(n^2+3n)\right] = n+2 =$$

$$\frac{1}{2}[(n+1)^2 + 3(n+1)] - \frac{1}{2}(n^2+3n).$$

Donc, si la formule est vraie pour la limite n, elle le sera aussi pour la limite $n+1$; or, on vérifie aisément qu'elle s'applique au cas de $n = 2$, 3 etc.

Question 1115.

(Voir *Mathesis*, (2), VII, p. 102).

On considère les paraboles dont l'axe passe par un point donné P *et qui touchent une droite donnée* AB *au même point* A. *Le foyer décrit une hyperbole équilatère; la tangente au sommet enveloppe une parabole.* (J. N.)

Solution géométrique par M. A. Droz Farny. Soit F une position du foyer d'une des paraboles ; l'axe PF coupe la tangente fixe en B. D'après une propriété connue, l'angle formé par le rayon vecteur FA avec la parallèle menée par A à l'axe PF, admet la droite fixe AB comme bissectrice. Il en résulte que les faisceaux (PF) et (AF) sont inversement égaux. Le lieu de F est donc une hyperbole équilatère passant par A et P et ayant son centre Q au milieu de AP ; les asymptotes sont l'une parallèle et l'autre perpendiculaire à AB.

La tangente au sommet S d'une des paraboles divise BA en parties égales au point D. DQ étant parallèle à PB, l'angle SDQ est droit ; l'enveloppe de la tangente au sommet est donc une parabole Σ admettant Q comme foyer et BA comme tangente au sommet.

Le lieu géométrique des sommets est la podaire de la parabole Σ par rapport à P ; c'est une cubique bien connue.

Solutions analogues par MM. Retali, Buyssens, Brocard, Polain (athénée de Liége) et Schiappa Monteiro, professeur à l'école polytechnique de Lisbonne.

Si l'axe PF rencontre la tangente AB en B et la normale AN en N, on a, d'après un théorème connu : BF = FN ; le lieu de F est donc celui des milieux des sécantes menées par P et limitées aux côtés de l'angle droit BAN (Monteiro, Soons, Andrien).

Solution analytique par M. Libert (Bruxelles). Je prends AB comme axe des y ; et la normale AN comme axe des x. Soient (p, q) les coordonnées de P.

1° Partons de l'équation focale :

$$(1-n^2)y^2 - 2mnxy + (1-m^2)x^2 \quad 2(\beta + nt)y - 2(\alpha + mt)x + \alpha^2 + \beta^2 - t^2 = 0.$$

La courbe étant une parabole, on a :

$$m^2 + n^2 = 1 ; \tag{4}$$

elle passe par l'origine et y est tangente à l'axe des y, ce qui donne :

$$\alpha^2 + \beta^2 - t^2 = 0, \tag{2}$$

$$\beta + nt = 0 ; \tag{3}$$

enfin l'axe mené par P est perpendiculaire à la directrice et passe par F :

$$\beta - q = \frac{n}{m}(\alpha - p). \tag{4}$$

Entre ces quatre équations, éliminons m, n, t. On trouve :

$$t^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad n^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}, \quad m^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2};$$

ces valeurs transforment l'équation (4) en :

$$\beta - q = -\frac{\beta}{\alpha}(\alpha - p).$$

Le lieu du point F a donc pour équation :

$$\frac{y-q}{y} + \frac{x-p}{x} = 0,$$

ou

$$2xy - qx - py = 0;$$

c'est une hyperbole équilatère dont le centre a pour coordonnées $\frac{1}{2}p$, $\frac{1}{2}q$ et dont les asymptotes sont parallèles aux axes ; elle passe par A et P.

Pour construire un point du lieu, il suffit de mener par P une droite quelconque SP et par A une droite AF faisant avec la direction négative des x le même angle que SP avec la direction positive.

Nous en déduisons une autre manière de chercher l'équation du lieu. Les équations de SP et AF sont

$$y - q = \lambda(x - p), \quad y = -\lambda x;$$

d'où

$$\frac{y-q}{y} + \frac{x-p}{x} = 0, \quad 2xy - py - qx = 0.$$

2° L'axe PF rencontre la tangente AB en un point ayant pour ordonnée $(q - \lambda p)$; la tangente au sommet passant au milieu de AB a pour équation

$$y = -\frac{1}{\lambda}x + \frac{q-\lambda p}{2},$$

ou

$$p\lambda^2 + (2y - q)\lambda + 2x = 0 \qquad (1)$$

Dérivons par rapport à λ ; il vient

$$2p\lambda + (2y - q) = 0 \qquad (1')$$

et éliminons λ entre ces 2 équations ce qui donne

$$(2y - q)^2 = 8px.$$

C'est l'équation d'une parabole qui a son sommet au point $(0, \frac{1}{2}q)$ et son axe parallèle à AX; le foyer de cette parabole est au centre d'une hyperbole.

L'équation de cette hyperbole rapportée à ses asymptotes est

$$xy - \frac{pq}{4} = 0,$$

et celle de la parabole ramenée à son axe et à sa tangente au sommet est $y^2 - 2px = 0$.

Autres solutions analytiques (ou plutôt mixtes) par MM. Soons, Andrien, Buyssens, Barisien et Colart.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1147. Trouver deux entiers consécutifs dont l'un soit un carré et l'autre un triangulaire. (de Rocquigny.)

1148. On donne: 1° une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes; 2° une parabole variable ayant pour foyer un point F de l'axe non transverse OF, pour axe une parallèle à une des asymptotes et pour ordonnée au foyer (ou pour paramètre) la distance de F aux asymptotes.

On demande le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle des trois points d'intersection des deux courbes. (H. Brocard.)

×**1149.** Résoudre le système

$$(y+z)(y-z)^2 = (z+x)(z-x)^2 = (x+y)(x-y)^2.$$ (Moore.)

1150. On considère tous les triangles ABC ayant même base BC et dans lesquels les angles B et C ont un rapport donné K; soient A', B', C' les pieds des hauteurs et H leur point de concours.

1° B'C' enveloppe une hypocycloïde;

2° A'C' et A'B' enveloppent des épicycloïdes;

3° Le centre O_9 du cercle des neuf points de ABC décrit la polaire réciproque d'une hypocycloïde par rapport à un certain cercle;

4° Le cercle O_9 enveloppe une podaire de polaire réciproque d'une hypocycloïde (polaire prise par rapport à un certain cercle);

5° Trouver les lieux du sommet A, de l'orthocentre H et du centre de gravité *b* de ABC.

Cas particulier de K = 2. (Déprez.)

PUBLICATION RÉCENTE.

26. Annuaire pour l'an 1898, publié par le bureau des longitudes. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1897 (in-18 de VI-806 pages, avec trois cartes magnétiques). Prix : 1 fr. 50.

Ce petit volume compact contient comme toujours une foule de renseignements scientifiques qu'on ne trouve que là. Le volume de cette année contient en outre les Notices suivantes : *Sur la Stabilité du système solaire;* par M. H. POINCARÉ. — *Notice sur l'œuvre scientifique de M. H. Fizeau;* par M. A. CORNU. — *Sur quelques progrès accomplis avec l'aide de la Photographie dans l'étude de la surface lunaire;* par MM. M. LŒWY et P. PUISEUX. — *Sur les travaux exécutés en 1897 à l'observatoire du mont Blanc;* par M. J. JANSSEN. — *Discours prononcés au cinquantenaire académique de M. Faye, le 25 janvier 1897* ; par MM. J. JANSSEN et M. LŒWY.

---

*QUESTIONS D'EXAMEN.

819. On sait que la tangente en B à la circonférence circonscrite au triangle ABC forme avec le côté BC un angle égal à A. Quel est le théorème correspondant pour le triangle sphérique ? (DROZ-FARNY.)

Cette question se présente en trigonométrie sphérique sous une forme un peu différente :

O étant le pôle du cercle circonscrit au triangle ABC, les angles α, β, γ que font les rayons OA, OB, OC avec les côtés adjacents résultent des égalités :

$$\beta + \gamma = A, \quad \gamma + \alpha = B, \quad \alpha + \beta = C.$$

820. On considère les ellipses ayant un foyer donné F, tangentes à une droite donnée d et dont l'un des axes a une longueur donnée $2l$. Trouver le lieu du second foyer F'. (E. N. BARISIEN.)

Si le petit axe a une longueur constante, le lieu est une parallèle à d; car le produit des distances de F et F' à $d = l^2$.

Si le grand axe $= 2l$, le lieu est la circonférence ayant pour centre le symétrique de F par rapport à d et pour rayon $2l$.

Le lieu du centre de l'ellipse variable se déduit facilement de ce qui précède.

Rectification Dans la question 1113, p. 260, la solution $z^2 + z + 1 = 0$ ne peut exister; car en additionnant les équations proposées on trouve $2(x + y) \times (z^2 + z + 1) = a + b + c$. (COLART, *Huy.*)

Page 248, ligne 2, lire *Dubouis* au lieu de *Debonis*.

TABLE DES MATIÈRES(*).

ARITHMÉTIQUE; ANALYSE INDÉTERMINÉE.

Pages.

×Développement de $\sqrt{x}$ en fraction continue; par M. Boutin 8
×Sur la définition de la multiplication; par M. A Listray 17
×Théorème d'arithmétique; par M. L. Collette 40
×Sur l'extraction de la racine carrée des nombres; par M. E. Barbette et M. Stuyvaert 59, 161
×La multiplication égyptienne et russe 86
×Sur les fractions continues 108
Une démonstration du théorème de Wilson; par A. Cayley 163
×Questions d'arithmologie; par M. de Rocquigny 217
Question de concours; par un abonné et par M. Stuyvaert 228, 249
×Sur les calculs approchés; d'après M. L. Gerard 248
×Note d'arithmétique 269
Sur une question d'arithmologie; par M. Boutin 269
Question DXCVIII; solution par M. Fauquembergue 27
Question CLXXXII; solution par M. Fauquembergue 51
×Question 1094; solution par M. A. Droz Farny 101
Question 1058; solution par M E. Colart 149
×Question 1047; solution par MM. Van Deuren, Colart, etc. 196
×Question 1062; solution par MM. Brien, Colart, etc. 231
×Question 1124; solution par MM. A. Boutin, Bergmans, etc. 236
×Question 1108; solution par M. Audibert 276

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

×Deux questions de concours; par un abonné 16
×Sur la question 949; par M. G. de Rocquigny 18
×Sur les combinaisons; par M. Barbette et M. Stuyvaert 85, 227
×Question de concours; par M. Déprez 271
×Question 783; solution par M. R. H. Van Dorsten 117
×Question 1083; solutions par MM. Colart, Déprez, etc. 211
Question 1036; solution par M. Retali 230

(*) Rectifications, pp. 51, 68, 80, 102, 214, 216, 238, 264, 272, 280. Les articles marqués d'une croix n'exigent, pour être compris, que la connaissance des mathématiques élémentaires.

Pages.
×Question 1080; solution par M. Hacken 232
×Question 1113 ; solution par M. Cristesco. 269, 280
×Question 1120; solution par MM. Droz Farny et Audibert 260

×GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE, MÉTAGÉOMÉTRIE,

Notre supplément 37
Sur les triangles sphériques (J. N.) 61
Théorème sur le carré de l'hypoténuse et 5e postulat d'Euclide ; par M. V. Reyes 86
Sur la formule des trois niveaux; par M. A. Goulard 105
Principes de la géométrie non euclidienne (P. M.). 112, 134, 158
Note de géométrie ; par M. E. Mathot 139
Sur les cercles radicaux et antiradicaux ; par M. Duran Loriga. 189
Sur quatre cercles tangents deux à deux ; par M. Mathot 193
Construction du pentagone régulier ; d'après Schröter 194
Tangente commune à deux cercles ; par M. Stuyvaert 194
Une nouvelle démonstration du postulatum d'Euclide; d'après M. Joubin. Réponse d'après MM P. Barbarin et Sollertinsky. 225, 266
Perpendiculaire à un plan ; d'après M. Dubouis 248
Cercle tangent à trois autres; d'aprés M. L. Gerard 248
Théorie de l'équivalence ; d'après M L. Gerard 265
Questions de concours ; par M. Déprez 271
Sur la géométrie non euclidienne, par MM. Lechalas et Mansion, supplément I, pp. 1-16, III, p. 1-8.
Question 1015; solution par MM. Colart, Lemoine, etc. : 26
Question 803; solution par M. Cristesco. 43
Question 1095; solution par M. Jonesco 48
Question 1016; solutions par MM. Jonesco, Collette, etc. 69
Question 1018; solutions par MM. Francq, Hacken, etc. 71
Question 1020; solution par M. Déprez 73
Question 1023; solution par M. E. Colart 77
Question 1031 ; solution par M. Droz Farny 77
Question 1053; solution par M. Mandart. 98
Question 1059; solution par M. R. Buysens 100
Question 948; solution par M. Bastin 119
Question 959; solution par MM. J. Jonesco, Barisien. 147
Question 333; solutions par MM. Stuyvaert et Gelin 164
Question 1027; solutions par MM. Colart, Droz Farny, etc. 171
Question 1038; solution M. Droz, Farny. 174
Question 1034; solution par M. Retali 207
Question 1039; solution par MM. Colart, J. Jonesco, etc. 209
Question 1106; solution par MM. Soons, Déprez 235

COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ; GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

Pages.

Une propriété des coniques; par M. J. Wasteels 13
Sur une propriété des coniques (J. N.) par M. Droz Farny 16, 87
Sur les coniques circonscrites à un triangle; par M. A. Krahé 33
Notes de géométrie analytique; par M. H. Mandart 38
Sur les triangles trihomologiques; par M. H. Van Aubel 58
Sur les triangles semi-conjugués (J. N.) Retali, Lorent 59, 142
Sur une conique inscrite ou circonscrite à un triangle; par M. Stuyvaert. 63, 81
Propriétés des triangles d'aire maximum inscrits dans l'ellipse; par M. E.-N. Barisien 88
Sur la recherche de certains lieux géométriques (A. C.) 110
Sur le centre des transversales angulaires égales; par M. Déprez 156
Équation focale des coniques; par M. E. N. Barisien. 193
Propriété focale des coniques à centre; par M. Stuyvaert 195
Sur les cordes de courbure concourantes dans les coniques; par M. Cl. Servais 222
Cercle orthoptique mutuel de deux coniques homofocales (J. N.) 227
Théorèmes sur le triangle; par M. Ferrati 241
Sur un lieu géométrique connu; par M. E. N. Barisien 247
Questions de concours; par M. Déprez 271
Question 985; solution par M. Cristesco 19
Question 994; solution par M. Bastin 21
Question 1003; solution par M. R. B. 23
Question 1005; solution par M. E. Colart 25
Question 999; solution par M Droz Farny. 68, 109
Question 952; solutions par MM. Bastin, Servais, etc. 120
Question 1000; solution par M. E. Buisseret 122
Question 1046; solutions par MM. A. Gob et Colart 124
Question 1037; solutions par MM. Retali, Colart, etc. 173
Questions 1026; 1025; solution par M. Gob 202
Question 1110; solution par M. Retali 219
Question 1114; solution par M. Retali 234
Question 414; solution par M. Stuyvaert 252
Question 1061; solution par MM. R. Buysens et Droz Farny 255
Question 1100; solutions par MM. E. N. Barisien et Droz Farny 274
Question 1115; solutions par MM. Libert et Droz Farny. 276

COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

La conchoïde de R. de Sluse; par M. G. Loria 5
Question 1021; solution par M. Retali 74
Question 1035; solution par M. Duporcq 97
Question 901; solution par M. Droz Farny. 143

Pages.
Question 946; solution par MM. Cristesco, Petresco 145
Question 1026; solution par M. Gob. 202
Question 1032; solution par MM. Gob, Colart, etc. 206
Question 1128; solution par M. E. N. Barisien 237
Question 1081; solution par M. Gob 256
Question 1093; solution par M. Cristesco 257
Question 1103; solution par M. Deprez. 258

CALCUL DIFFÉRENTIEL; CALCUL INTÉGRAL; THÉORIE DES SÉRIES.

Propriété fondamentale des Wronskiens; par M. A. Demoulin. 62
Sur une formule de Newton; par M. Lampe 109
Sur diverses formules trigonométriques; par M. Lampe. . . . 129, 153, 183
Remarques utiles dans les calculs de limites; par M. E. Cesáro 177
Question 267; solution par M. Stuyvaert 42
Question 978; solution par M. Stuyvaert 45
Question 252; solution par M. Stuyvaert 253
Question 932; solution par M. Stuyvaert 168
Question 1022; solution par M. Mandart 198
Question 1025; solution par M. Mandart. 199
Question 979; solution par M. Gob 229

BIBLIOGRAPHIE ET BIOGRAPHIE, PUBLICATIONS RÉCENTES.

Notre supplément 37
Congrès scientifique international des mathématiciens 40
X. Antomari. Cours de Géométrie descriptive (J. Van Rysselberghe) . . 40
Mort de Weierstrass 62
Sur Wolfgang et Jean Bolyai. 194
J.-J. Sylvester (P. M.) 245
J. Petersen et H. Laurent. Théorie des équations algébriques (M. Stuyvaert) 52, 249
K. Weierstrass, par M. d'Ocagne, 2e supplément . . . . . pp. 1-24
M. Frolov. Théorie des parallèles 32, 104
E. Gelin. Traité d'arithmétique 32
Z. G. de Galdeano. Modernas Generalizationes 32
L. Lorentz. Œuvres scientifiques 32
S. Krüger. Ellipsoïdale evenwichtsvormen eener wentelende homogene vloeistofmassa. 52
Ch. Meray. Analyse infinitésimale (t. II) 52
C. Wessel. Repésentation analytique de la direction 104
L. Gérard. Arithmétique. 104
W. Bouwman. De Plückersche Grootheden der Deviatiekromme . . . 104
J. Thirion. Leçons d'arithmétique. — Résumé des leçons d'arithmétique. . 127

Pages.

G. Fontené. Géométrie dirigée 151
Remière. Les femmes dans la science 238
J. Riemann. Algèbre élémentaire. 238
A. Laisant et Perrin. Applications de l'Algèbre à la Géométrie 239
P. Mansion et L. Gasco. Functiones hyperbolicas. 239
Ch. Hermite etc. In memoriam Lobatchevskii 239
B. Lefebvre. Algèbre élémentaire 239
M. Haccour. Algèbre 262
W. Beman and E. Smith. Higher arithmetic 262
R. Frick und F. Klein. Automorphen Functionen (I. Band) 263
E Pasquier. Cours de Mécanique analytique 263
G. de Longchamps. Cours de problèmes de géométrie analytique 263
Annuaire du bureau des longitudes 280

QUESTIONS D'EXAMEN.

Questions 776 à 820 . . . . 30, 31, 78, 103, 127, 151, 176, 215, 240, 263, 280
École polytechnique de Paris. Composition de mathématiques 152
Concours général des lycées de France 152

SUPPLÉMENTS (48 pages).

1. Lechalas. Identité des plans de Riemann et des sphères d'Euclide, pp. 1-11. — P. Mansion. Sur la non identité du plan riemannien et de la sphère euclidienne . . . . . pp. 12-16
2. M. d'Ocagne. Karl Weierstrass. . . . . pp. 1-24
3. P. Mansion. Sur la géométrie non euclidienne. . . . . pp. 1-8

QUESTIONS (*).

	POSÉE	RÉSOL
	(1) I ou (2) I	(2) VII
95	206 (28)	
	(1) III ou (2) I	
252	143 (28)	94
267	175 (28)	42
	(1) IV ou (2) I	
×333	119 (29)	164
353	159	
×357	159	
387, 2e p.	231 (29)	NR
	(1) V ou (2) I	
411	23 (29)	252
415	46	NR

	POSÉE	RÉSOL
	(1) VI ou (2) I	(2) VII
×513	71 (30)	NR
	(1) VII ou (2) I	
594	264 (31)	NR
597	280	
598	280 (31)	NR
	(1) X	
699	279	
	(2) II	
767	128	
778	176	NR
×783	216	117

	POSÉE	RÉSOL
	(2) II	(2) VII
784	216	
785	216	NR
×789	240	
	(2) III	
×803	31	43
815	56	
825	80	NR
857	176	
876	216	NR
882	240	
×886	240	
×889	264	
892	264	
892bis	280	

(*) La rédaction de *Mathesis* a en portefeuille de bonnes solutions des questions qui ne sont pas marquées des lettres NR (non résolues); elle engage ses collaborateurs à porter de préférence leurs efforts sur celles-ci.

	POSÉE (2) IV	RÉSOL (2) VII
901	31	142
905	32	NR
×909	55	
910	55	
932	104	168
939	127	
×944	128	
946	151	145
×948	151	119
×949	151	18
952	152	120
953	152	
×959	175	147
971	216	
×973	216	
978	239	45
979	240	229
985	263	19
×986	263	
×989	264	
990	264	
994	279	2
999	280	68, 109
1000	280	122
	(2) V	
×1002	32	
1003	32	23
1005	32	25
1013	80	NR
1014	104	
×1015	104 et 240	26
×1016	104	69
×1017	104	196
×1018	104	71
×1019	128	
×1020	128	73
1021	128	74
1022	128	198
×1023	152	77
1025	152	199
1026	152	202
×1027	176	171
1028	176	202
×1029	176	
1030	176	
×1031	215	77
1032	215	206
1033	215	
×1034	216	207
1035	216	97
1036	216	280
1037	216	173
×1038	216	174
×1039	240	209
1040	240	124
×1041	240 et 264	

	POSÉE (2) V	RÉSOL (2) VII
1042	240	
1043	264 (t. VI, 31)	
×1044	264	
1045	264	
1046	264	
1047	280	
1048	280	NR
1049	280	
1050	280	
	(2) VI	
×1051	32	
1052	32	
×1053	32	98
1054	32	
1055	32	
1056	56	
1057	56	
×1058	56	149
1059	56	100
1060	80	
1061	80	255
×1062	80	231
×1063	80	
1064	104	
1065	104	
1066	104	
×1067	104	
×1068	128	
1069	128	
×1071	128	
1072	142	
×1073	142	
1074	142	
1075	142	
1076	192	
1077	192	
×1078	192	
1079	192	NR
×1080	215	232
1081	215	256
1082	215	
×1083	215	211
1084	215	
1085	216	
1086	216	
1087	216	NR
1088	216	
×1089	240	NR
1090	240	NR
×1091	240	
1092	240, 280	NR
1093	264	257
1094	264	101
×1095	264	48
1096	264	
1097	280	NR

	POSÉE (2) IV	RÉSOL (2) VII
1098	280	NR
1099	280	NR
1100	280	272
	(2) VII.	
1101	31, 51	NR
1102	31	NR
1103	31	258
1104	31	234
×1105	32	
×1106	32	235
1107	51	NR
×1108	52, 80	276
×1109	52	NR
1110	52	212
1111	80, 102	
1112	80	
×1113	80	260
×1114	80	
1115	102	276
×1116	102	
1117	102	
1118	102	
1119	125	
×1120	126	260
1121	126	
1122	127	
×1123	150	NR
×1124	150	236
×1125	150	
1126	151	
×1127	175	
1128	175	236
1129	175	NR
×1130	175	
1131	213	
1132	213	NR
1133	214	NR
×1134	214	
1135	214	
×1136	214, 237	NR
1137	214	
×1138	215	NR
×1139	237	NR
1140	237	NR
×1141	238	
1142	238	
1143	261	NR
1144	261	NR
×1145	262	
×1146	262	NR
1147	279	NR
1148	279	NR
×1149	279	NR
1150	279	NR
NCM, DXCVIII, t. VI, 525		27
CLXXII, t. II		50

TABLE DES NOMS.

Abonné, 16, 228.
Agnesi (Marie), 238.
Alembert (D'), 250.
Ampère, 37.
André, 119.
Andrien, 214, 275.
Antomari, 40.
Anonyme, 71.
Apollonius, 193, 252, 257.
Argand, 104, 250.
Aronhold, 249.
Aubry, 129.
Audibert, 236, 261, 276.
Avillez (d'), 272.
B. (R.), 23.
Bally, 227.
Baltzer, 106, 207.
Barbarin, 267.
Barbette, 61, 86, 257.
Barisien, 19, 25, 26, 27 30, 31, 32, 52, 71, 78, 79, 88, 102, 103, 120, 123, 124, 127, 128, 144, 147, 173, 193, 199, 206, 214, 230, 234, 236, 237, 240, 247, 257, 261, 273.
Bastin, 21, 26, 119, 120, 145.
Bellachi, 78, 264.
Beman, 262.
Bergmans, 236.
Bernoulli, 94, 126
Bézout, 250.
Bolyai, 194.
Bosi, 61, 263.
Boutin, 8, 236, 269.
Bouwmann, 104.
Bovy, 120.
Brianchon, 241.
Bricard, 45, 229.
Brien, 99, 231.
Brocard (G.), 156.
Brocard (H.), 57, 58, 98, 149, 192, 193, 208, 235, 238, 241, 277, 279.
Budan, 250.
Buisseret, 122.
Buysens, 26, 71, 100, 125, 173, 206, 255, 277.
C. (A.), 73, 112, 150, 214, 237, 249.
Cantor (M.), 87.
Catalan, 43, 73.
Cauchy, 52, 250.
Cayley, 160, 163, 194, 245.
Cazamian, 31, 97.
Cesáro (E.), 94, 177.
Ceva, 141
Chatelet (Marquise du), 238.
Chasles, 83, 120, 227.
Clebsch, 249.
Clifford, 245.
Colart, 25, 26, 68, 72, 77, 78, 124, 149, 171, 173, 195, 206, 210, 211, 231, 257, 272, 279, 280.
Colette, 32, 40, 50, 69, 71, 235, 258.
Cor, 238.
Cornu, 280.
Couturier 26, 73, 77, 172, 173
Crelle, 136.
Cristesco, 19, 26, 43, 73, 77, 78, 145, 147, 173, 236, 238, 257, 260.
Cusa, 129.
Darboux, 244.
Davidoglou, 26.
Dedekind, 150.
Degen, 101.
Degueldre, 99, 151, 172, 210, 235, 260, 272.
Delahaye, 26, 72.
De Land, 207.
Demoulin, 62.
Déprez, 20, 21, 26, 43, 48, 70, 71, 73, 78, 99, 102, 119, 120, 123, 125, 126, 147, 156, 172, 175, 202, 206, 209, 210, 212, 213, 215, 234, 235, 256, 258, 261, 271, 275, 279.
Desaint, 198.
Descartes, 250.
De Tilly, 37, 114.
Dioclès, 7.
Dirichlet, 150.
Droz Farny, 20, 23, 26, 52, 68, 72, 73, 77, 101, 102, 119, 125, 143, 171, 172, 173, 175, 196, 206, 210, 213, 215, 230, 234, 235, 255, 256, 258, 261, 275, 277, 280.
Dubouis, 248.
Duporcq, 97, 255.
Duran Loriga, 189.
Eckwehr (von), 195.
Euclide, 32, 47, 86, 104, 113, 266.
Euler, 207.
Fairon, 119.
Fauquembergue, 18, 27, 50.
Ferrati, 241.
Finck, 105.
Fontené 151.
Fourier, 37, 250.
François, 98, 172, 235.
Francq, 26, 71, 77, 78, 99, 125, 210, 256.
Frégier, 256.
Fricke, 264.
Frolow, 32, 104.
Galdeano (de), 32.
Galois, 251.
Gauss, 104, 194.
Gelin, 32, 167.
Genty, 23.
Gerard, 104, 248, 265.
Gerardville, 239.
Germain (Sophie), 238.
Gillet, 68.
Gob, 64, 73, 124, 175, 202, 206, 210, 214, 229, 256, 262.
Goulard, 105.
Goux, 249.
Haccour, 262.
Hacken, 26, 72, 196, 232, 258
Hadamard, 181.
Halsted, 195, 239, 245.
Hermite, 94, 239.
Horner, 251.
Huygens, 5.
Hypatie, 238.
J. (Liége), 101.
Janssen, 280.
Jeřabek, 78, 256.
Joachimsthal, 124.
Jonesco (B.), 26, 73, 77, 172.
Jonesco (J.), 20, 26, 49, 69, 70, 72, 73, 77, 78,

80, 119, 120, 145, 147, 172, 173, 196, 198, 206, 208, 210.
Joubin, 225, 267.
Keelhoff, 173.
Klein (F.), 263.
Klompers, 20, 26, 69.
Koenigs, 151.
Kovalewski (M^e), 238.
Krahé, 33.
Krüger, 52, 67.
Lagrange, 251.
Laisant, 17, 94, 105, 239.
Lakhtine, 179.
Lampe, 109, 129, 153, 183, 245.
Laurens, 100.
Laurent (H.), 52, 249.
Lechalas, 37.
Lefèbvre, 239.
Leibnitz, 134.
Lemoine, 17, 26, 86, 57, 58, 71, 80, 105, 120, 176, 234, 239, 244, 260, 262.
Le Paige, 5.
Libert, 272, 277.
Lipkine, 246.
Listray, 18.
Lobatchefsky, 37, 112, 136, 158, 160, 239.
Loewy, 280.
Longchamps (de), 236.
Lorent, 142.
Lorentz, 32.
Loria, 5.
Lucas (Ed.), 94, 117, 270.
Maclaurin, 106.
Maes, 234, 236.
Mandart, 20, 26, 39, 52, 70, 73, 77, 78, 80, 98, 125, 172, 173, 196, 198, 199, 206, 207, 230, 276.
Mannheim, 16.
Mansion, 37, 40, 62, 104, 109, 117, 129, 160, 226, 229, 265.
Maxwell, 32, 245.
Massau, 129.
Mathot, 139, 193, 216.
Méray, 52.
Merlin, 77, 78, 172, 173.
Meurice, 168, 249, 269.
Monteiro, 277.
Montanari, 196.
Moore, 279.
Muirhead, 262.
Neuberg, 8, 14, 17, 25, 40, 45, 59, 61, 62, 77, 78, 87, 100, 102, 119, 126, 143, 175, 191, 192, 193, 201, 209, 211, 212, 214, 222, 232, 239, 252, 260, 276.
Newton, 106, 109, 129, 188, 246, 250.
Niewenglowski, 69, 106.
Ocagne (d'), 191, 239, 252.
Oltramare, 28.
Pascal, 126, 241, 261.
Pasquier, 263.
Paterno, 51.
Peaucellier, 246.
Pell, 270.
Perrin, 239.
Pervouchine, 179.
Petersen, 52, 249.
Petit-Bois, 241.
Petresco, 145.
Picard, 245.
Plakhovo, 87.
Plücker, 104.
Poincaré, 280.
Polain, 277.
Prime (V^e), 69, 108.
Puiseux, 280.
Realis, 27.
Rebière, 238.
Retali, 74, 126, 127, 142, 173, 207, 213, 230, 234, 256, 277.
Reye, 107.
Reyes, 86.
Riemann (B), 113, 158.
Riemann (J.), 238.
Ritschie, 245.
Rocquigny (de), 18, 150, 217, 236, 264, 279.
Romieux, 151.
Rouse, 195.
Rowe, 164.
Saccheri, 37.
Salmon, 75, 207, 223.
Sanjana, 77.
Sarrus, 105.
Schering, 209.
Schlömilch, 129.
Schneider, 105.
Schoute, 76, 104.
Seligmann, 71, 77, 99, 125, 172.
Serret, 130, 250.
Servais, 66, 82, 120, 122, 222.
Simpson, 106.
Simson, 64, 66, 158, 256.
Sluse, 5.
Smith (D.), 262.
Smith (H.), 245.
Sollertinsky, 100, 267.
Somerville (Mary), 238.
Soons, 80, 93, 102, 147, 175, 176, 215, 231, 235, 236, 256, 260.
Staudt (von), 66, 81.
Steiner, 77, 106, 192.
Stewart, 158.
Strymeersch, 147.
Sturm, 250.
Stuyvaert, 31, 42, 45, 51, 63, 81, 94, 150, 161, 164, 168, 194, 195, 213, 228, 249, 252.
Sylvester, 245.
Tait, 50.
Tannery (J.), 237.
Tarry (G.), 175, 192.
Taylor (H. M.), 164.
Thiele, 104.
Thirion, 127.
Thomson, 245.
Tiete, 77, 78, 172.
Torricelli, 106.
Tzitzéica, 199.
Valentiner, 32, 104.
Vallée Poussin (de la), 38.
Van Aubel (H.), 53.
Van Deuren, 125, 196, 210.
Van Dorsten, 117.
Van Rysselberghe, 42.
Verdeyen, 123.
Verheist, 99.
Vuibert, 79, 103, 104, 127, 128, 151.
Wasteels (J.), 13.
Weierstrass, 62.
Wessel, 104.
Wilson, 163.
Wolstenholme, 231.
Zeuthen, 76, 104.

Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1896,
t. XX, 2e partie.

IDENTITÉ
DES PLANS DE RIEMANN
ET
DES SPHÈRES D'EUCLIDE

PAR

M. G. LECHALAS,
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

Chacun sait que la trigonométrie des plans de Riemann est identique à celle des sphères d'Euclide et qu'il y a de même identité entre la trigonométrie des plans de Lobatchefsky et celle des pseudo-sphères, surfaces euclidiennes étudiées par Beltrami. Il n'en a pas fallu davantage pour que certains adversaires des géométries non euclidiennes aient cru pouvoir plaisanter leurs partisans, en prétendant que leur découverte se réduisait à un changement dans les noms des surfaces. Les géomètres non euclidiens n'ont pas manqué de protester contre cette assertion et de soutenir énergiquement la distinction des surfaces que l'on prétendait confondre.

Cependant un philosophe aux allures indépendantes et aux intuitions parfois géniales, M. Delbœuf, reprit la thèse des euclidiens, mais en en transformant complètement la portée : pour lui, plans de Riemann et plans de Lobatchefsky ne sont bien que des sphères euclidiennes, mais envisagées dans des espaces à trois dimensions différents du nôtre et dans lesquels elles présentent des propriétés également différentes (*).

(*) Voir *Revue philosophique* d'avril 1894, pp. 373 à 377 (*L'ancienne et les nouvelles géométries*).

L'idée nous parut profonde et mériter le plus sérieux examen. Pour qu'on puisse admettre l'identité de deux surfaces, une première condition est nécessaire, à savoir l'identité de leurs géométries propres, c'est-à-dire abstraction faite de tout espace à trois dimensions dans lequel elles seraient contenues. Or, cette condition permet d'écarter immédiatement l'identité des pseudo-sphères et des plans de Lobatchefsky, car les géodésiques des premières se coupent deux à deux un nombre infini de fois, et celles des derniers une seule fois ; par deux points d'une pseudo-sphère il passe de même une infinité de géodésiques, au lieu d'une géodésique unique ; et enfin, si le déplacement d'une figure s'opère, en un sens, sans déformation sur une pseudo-sphère, cette propriété n'est pas absolue, car le déplacement peut faire naître ou évanouir certaines intersections, ou seulement changer les points où elles se produisent et les angles qu'elles engendrent.

On peut, il est vrai, faire évanouir ces différences en considérant une pseudo-sphère sur laquelle une infinité de feuillets seraient enroulés et en faisant abstraction des intersections résultant de la superposition des divers feuillets : c'est ainsi qu'on peut considérer un cylindre de révolution comme ayant identiquement la géométrie du plan. Mais cet artifice, intéressant assurément, ne saurait permettre de poser l'identité des surfaces. Ajoutons que l'arc de géodésique qui joint deux points d'une pseudo-sphère est plus long que la droite euclidienne, alors que celle-ci est plus longue elle-même que toute droite de Lobatchefsky allant également de l'un de ces points à l'autre ; mais cette considération oblige à sortir de la surface étudiée.

A l'égard des sphères euclidiennes et des plans de Riemann, rien de tel ne peut être objecté : les géométries de ces deux classes de surfaces, considérées en elles-mêmes, exclusivement comme des espaces à deux dimensions, sont absolument identiques.

Ce fait ne saurait toutefois constituer une preuve de l'identité de ces surfaces elles-mêmes, car il est parfaitement conciliable avec l'apparition de propriétés différentes dans un même espace à trois dimensions : ainsi en est-il du plan et des cylindres

à directrice ouverte, comme les cylindres paraboliques, dont les géométries à deux dimensions ne diffèrent nullement. Aussi n'avons-nous été convaincu que par des considérations complémentaires présentées par M. Delbœuf, considérations que nous allons reprendre en leur donnant un développement analytique, mais qui nous parurent immédiatement démonstratives, la possibilité de ce développement étant évidente pour nous.

Fort de cette conviction, nous avons exposé à notre tour la thèse de M. Delbœuf, réduite au cas des plans de Riemann et des sphères d'Euclide, dans notre *Étude sur l'espace et le temps* (*). Le cadre de cet ouvrage ne comportait d'ailleurs pas le développement analytique qui aurait pu être utile, et, en tout état de cause, nous pensions bien que cette conception soulèverait des objections, à moins qu'elle ne passât inaperçue.

Nous sommes reconnaissant à M. Mansion de nous avoir fourni l'occasion de reprendre cette question avec plus d'ampleur, en critiquant notre manière de voir dans un compte rendu, d'ailleurs beaucoup trop bienveillant, de notre ouvrage, qu'il a publié dans la *Revue des questions scientifiques* (**).

Disons tout de suite pour quel motif la raison invoquée à l'appui de cette critique ne nous paraît aucunement convaincante.

La sphère euclidienne, dit M. Mansion, a un centre unique, ce qui n'est pas le cas pour un plan riemannien. Or, la propriété invoquée est évidemment relative à l'espace à trois dimensions dans lequel on considère la sphère, et nous aurons simplement à voir si elle subsiste lorsqu'on envisage cette surface dans l'espace à trois dimensions ayant mêmes géodésiques qu'elle ; dans cet espace, nous devrons exactement retrouver les propriétés des plans de Riemann (***).

Au risque d'être un peu long, mais afin de préparer le terrain et de faciliter l'interprétation géométrique du développement

---

(*) Page 31.

(**) Janvier 1896, p. 266 ; voir spécialement p. 269.

(***) Nous devons dire que, dans le tirage à part de son compte rendu, M. Mansion a supprimé l'argument tout en maintenant la critique.

analytique que nous allons présenter, nous réduirons d'abord d'une unité le nombre des variables, parce qu'ainsi nous ne sortirons pas de la géométrie euclidienne la plus élémentaire.

Dans un espace à trois dimensions euclidien, c'est-à-dire ayant la droite euclidienne pour géodésique, soit la sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

que nous coupons par le plan $x = 0$; la courbe d'intersection est le cercle $y^2 + z^2 = R^2$. Si maintenant je rends ce plan mobile autour de l'axe des z, en lui donnant pour équation $x = y \operatorname{tang} \alpha$, la courbe d'intersection restera la même, quel que soit α, en raison de la parfaite symétrie de l'équation de la sphère, et ainsi du reste qu'on le vérifierait facilement au moyen d'un changement de coordonnées qui ferait du plan sécant le nouveau plan des yz (*).

Il résulte de là que, lorsque le plan sécant tourne autour de l'axe des z, le grand cercle qu'il détermine constamment sur la sphère engendre celle-ci, et l'on peut ajouter que, lorsque α est égal à π, chaque moitié du grand cercle vient en coïncidence avec la position primitive de l'autre moitié (**) : il y a eu retournement du cercle. Ce retournement, d'ailleurs, au lieu d'être considéré comme résultant de la rotation d'un plan autour de l'axe des z dans l'espace à trois dimensions, peut être regardé comme opéré par une rotation sur la sphère elle-même autour des points où cet axe perce cette surface,

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \pm R.$$

On peut donc dire que le cercle est une ligne retournable

(*) Les formules de transformation seraient

$$x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha,$$
$$y = -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha,$$
$$z = z'.$$

(**) Ceci résulte immédiatement de la symétrie de l'équation du cercle.

autour de deux de ses points, sur les sphères dont il est grand cercle.

Remarquons d'ailleurs que, pendant la rotation, les points situés sur le plan des xy ont décrit le grand cercle $x^2 + y^2 = R^2$ et sont, durant tout le mouvement, restés à une distance constante $\frac{1}{2}\pi R$ des deux points autour desquels s'est effectuée la rotation : un grand cercle a donc deux centres sur la sphère, auxquels répondent deux rayons égaux. Tout point, à une distance βR d'un des centres de rotation, décrit également un cercle ayant aussi deux centres, mais auxquels répondent des rayons inégaux, βR et $(\pi - \beta)R$, ayant πR pour somme. La parfaite symétrie de l'équation de la sphère montre la généralité de ces propriétés.

Nous allons prendre maintenant une variable de plus, et nous demandons qu'on veuille bien nous suivre, sans préoccupation sur le point d'arrivée et les conclusions à tirer de ce que nous établirons, mais en contrôlant simplement l'exactitude de la géométrie que nous développerons (*).

Dans un espace euclidien à quatre dimensions, c'est-à-dire ayant la droite euclidienne pour géodésique, l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = R^2,$$

représente un espace à trois dimensions que nous appellerons sphérique. Dans cet espace d'ailleurs, une équation du premier degré représente un espace euclidien à trois dimensions, et celui qui a pour équation $x = 0$, coupe l'espace sphérique suivant la sphère

$$y^2 + z^2 + v^2 = R^2,$$

qu'on peut appeler *grande sphère*, car tout autre espace, tel que $x = a$, déterminerait une sphère de plus petit rayon :

$$y^2 + z^2 + v^2 = R^2 - a^2.$$

(*) Le principe de l'exposé qui suit nous a été indiqué par notre ami, M. Calinon.

Rendons mobile l'espace $x = 0$ autour du plan des vz, en changeant son équation en : $x = y \operatorname{tang} \alpha$; la sphère d'intersection restera la même en raison de la parfaite symétrie de l'équation de l'espace sphérique et ainsi du reste qu'on le vérifierait facilement au moyen d'un changement de coordonnées qui ferait de l'espace sécant celui des nouveaux axes des y, des z et des v (*). Il résulte de là que, lorsque l'espace sécant tourne autour du plan des zv, la grande sphère qu'il détermine dans l'espace sphérique engendre celui-ci, et l'on peut ajouter que, lorsque α est égal à π, chaque moitié de la sphère vient en coïncidence avec la position primitive de l'autre moitié : il y a eu retournement de la sphère. Ce retournement, d'ailleurs, au lieu d'être considéré comme résultant de la rotation d'un espace euclidien à trois dimensions dans un espace également euclidien à quatre dimensions, peut être regardé comme opéré dans l'espace sphérique à trois dimensions lui-même, autour du grand cercle suivant lequel le plan des zv coupe cet espace sphérique :

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z^2 + v^2 = R^2.$$

On peut donc dire que la sphère est une surface retournable autour de ses grands cercles, dans les espaces sphériques à trois dimensions dont elle est grande sphère.

Pendant cette rotation autour d'un des grands cercles, chaque point de la sphère reste à des distances constantes de chacun des points de ce grand cercle; si donc nous considérons un des points de celui-ci et le grand cercle dont il est le centre (ou le pôle), tous les points de la surface engendrée par ce grand cercle seront également distants de lui et formeront une sphère dont il sera un centre, mais qui en aura un second, à savoir le second centre du grand cercle générateur. Les deux rayons de cette grande sphère seront tous deux égaux à $\frac{1}{2}\pi R$. Si au lieu d'un grand cercle, nous prenons un petit cercle, il engendrera une petite sphère ayant deux rayons βR et $(\pi - \beta)R$.

(*) Les z et les v ne changent pas, et les formules de transformation des x et des y sont celles que nous avons vues précédemment.

Les propriétés dont jouissent ainsi les sphères euclidiennes dans les espaces sphériques à trois dimensions sont exactement celles des plans ou des sphères de Riemann, suivant que l'on considère une grande sphère ou une petite sphère dans l'espace sphérique. Il est bien évident d'ailleurs que, les formules riemanniennes à deux dimensions étant identiquement celles de la géométrie sphérique euclidienne, leur généralisation par l'introduction d'une troisième variable doit forcément conduire aux formules des espaces sphériques à trois dimensions.

Si l'on peut qualifier « euclidienne » une sphère, pour exprimer qu'elle peut être située dans un espace euclidien à trois dimensions, nous pouvons qualifier de même nos espaces sphériques, puisque nous les avons précisément déterminés au sein d'un espace euclidien à quatre dimensions. Ces qualifications n'empêchent pas qu'on puisse dire très justement que, dans un espace sphérique à deux ou à trois dimensions, tout est sphérique; mais il n'en est pas moins vrai que ces espaces contiennent certaines figures, les cercles et les sphères, qui leur sont communes avec les espaces euclidiens à deux et à trois dimensions. Seulement, les propriétés de ces figures communes diffèrent profondément quand, sortant d'elles-mêmes, on les envisage dans un espace euclidien ou dans un espace sphérique. Sur l'espace euclidien à deux dimensions, le cercle n'est ni géodésique ni retournable et n'a qu'un centre; sur un espace sphérique à deux dimensions, il a deux centres et peut être géodésique et retournable. De même, dans un espace euclidien à trois dimensions, la sphère n'est pas retournable et a un centre unique; dans un espace sphérique à trois dimensions, la sphère a deux centres, et elle y est retournable lorsqu'elle a même géodésique que lui. *Or, dans l'un et l'autre cas, cercles et sphères sont bien identiques, puisque nous les avons obtenus en coupant les espaces sphériques à deux et trois dimensions par des espaces euclidiens à deux et trois dimensions : c'est la superposition sous sa forme la plus immédiate.*

La conclusion de tout cela est simple : les plans et sphères de Riemann sont des sphères identiques à celles d'Euclide, et ses

espaces à trois dimensions sont des espaces sphériques susceptibles d'entrer dans un espace euclidien à quatre dimensions.

M. Mansion, dans les lettres qu'il a bien voulu nous écrire, parle des espaces sphériques à trois dimensions euclidien, riemanniens et lobatchefskiens; mais il ne saurait les distinguer les uns des autres plus qu'il ne le fait pour les sphères : tout ce qui est possible, c'est de placer ces espaces sphériques dans des espaces à quatre dimensions euclidien, riemanniens et lobatchefskiens, ce qui fera sans doute apparaître des propriétés distinctes, mais propriétés relatives à ces divers espaces à quatre dimensions et n'établissant aucune distinction entre les espaces sphériques.

Si, dans un de ces derniers espaces, on prend cinq points quelconques, leurs dix distances vérifient la relation riemannienne, du moment qu'on les a mesurées dans cet espace, c'est-à-dire suivant les arcs de grand cercle qui en sont les géodésiques; mais, si on les mesure suivant des droites euclidiennes, lesquelles ne peuvent entrer dans cet espace sphérique, ces distances vérifient naturellement la relation euclidienne de Lagrange, puisqu'on s'est ainsi placé dans l'espace euclidien déterminé par ces cinq points.

Nous croyons avoir bien marqué en quel sens nous admettons cette proposition que « tout est euclidien dans un espace euclidien, riemannien dans un espace riemannien », comme nous l'a écrit M. Mansion. Il semble que, pour lui, cette proposition ait un sens beaucoup plus absolu et signifie qu'aucune figure euclidienne ne peut entrer dans un espace riemannien, et réciproquement. De là résulterait d'abord l'impossibilité de comparer les distances de deux points dans un espace riemannien et un espace euclidien, puisque, en l'absence d'une unité commune, ne pouvant être fournie que par une ligne entrant dans les deux espaces, l'application des formules correspondantes ne saurait fournir des résultats comparables. Logiquement d'ailleurs, cette interprétation, erronée selon nous, devrait être poussée beaucoup plus loin, la même impossibilité, comme nous l'a fait remarquer M. Mansion lui-même à la suite de la communica-

tion de la remarque précédente, devant être étendue aux figures de deux espaces riemanniens (ou lobatchefskiens) de paramètres différents (*).

De là, nous pensons qu'on devrait conclure l'impossibilité de distinguer deux espaces riemanniens, comme deux espaces lobatchefskiens, l'un de l'autre, car deux espaces de même nature ne diffèrent que par les valeurs données à un paramètre, et, ce paramètre étant une longueur (ou le carré d'une longueur suivant les formules adoptées), on ne peut le déterminer que par une mesure dans l'espace correspondant : si aucune communication n'existe d'un espace à l'autre, aucune comparaison n'est possible entre les paramètres. On ne saurait plus dès lors que prendre le paramètre pour unité, ainsi que l'a fait Lobatchefsky.

M. Mansion a trouvé une réponse ingénieuse, mais non démonstrative selon nous, à ces réflexions. Si, dit-il, on mesure sur une sphère euclidienne (**) les côtés d'un triangle rectangle isocèle, avec un arc de grand cercle quelconque pris pour unité, et si l'on trouve 45, 45 et 60 pour mesures des trois côtés, le paramètre ou rayon de la sphère doit vérifier la relation

$$\cos\left(\frac{45}{x}\right)\cos\left(\frac{45}{x}\right) = \cos\left(\frac{60}{x}\right),$$

d'où l'on tire :

$$x = \frac{180}{\pi}.$$

Si ensuite un autre observateur, mesurant le même triangle, trouve 45, 45, 59, le paramètre y sera donné par la relation

$$\cos\left(\frac{45}{y}\right)\cos\left(\frac{45}{y}\right) = \cos\left(\frac{59}{y}\right),$$

(*) L'espace euclidien étant la limite commune des espaces riemanniens et lobatchefskiens dont les paramètres croissent indéfiniment, il n'y aurait aucune raison pour poser l'exclusion de toute figure commune entre lui et les espaces de ces deux classes, si l'on admettait la communauté de figures entre les divers espaces d'une même classe malgré la différence de leurs paramètres.

(**) On sait que, pour nous, les sphères de tous les espaces sont identiques quand elle ont même courbure.

et sa valeur sera plus petite que x : de là l'idée de paramètres différents; mais nous pouvons être assurés que, cette idée ne pouvant avoir de base rationnelle dans l'hypothèse faite, une hypothèse contraire s'est glissée subrepticement dans le raisonnement. Or, on nous parle de rayon, ce qui suppose toute une théorie de la sphère dans un espace à trois dimensions où les rayons sont comparables; à supposer même qu'on ne parlât que de paramètres dont on cherche la valeur, l'interprétation en serait tout autre si l'on s'en tenait à la notion de sphères entre lesquelles toute comparaison de longueurs serait impossible,

A s'en tenir, en effet, à la sphère sur laquelle ils se trouvent, la recherche expérimentale de nos deux observateurs se réduit à ceci : trouver le rapport qui existe entre l'arc pris pour unité et la longueur x figurant dans les formules. S'ils obtiennent deux valeurs différentes, c'est que l'un au moins s'est trompé ; mais, dit-on, cela leur fait concevoir que, sur une autre surface, x pourrait avoir une autre valeur. Or, pour que x y eût une autre valeur, il faudrait que l'on pût comparer les longueurs de cette autre surface à notre unité, et c'est précisément ce que l'on s'est interdit. Cette unité n'a de sens que sur la surface où elle est prise : c'est une certaine fraction de la géodésique totale et ce n'est que cela; sur toute autre sphère, il en sera de même. La véritable conclusion à tirer par l'observateur maladroit et ne croyant pas l'être serait qu'il n'est pas sur une sphère, car il ne saurait concevoir d'autres sphères où son unité de mesure serait contenue dans la géodésique totale un plus ou moins grand nombre de fois.

En terminant cette discussion, nous dirons quelques mots d'une suite naturelle au désaccord sur les espaces de Riemann. Dans ceux de Lobatchefsky entrent des sphères de toute courbure, notamment des sphères de courbure nulle, qu'on appelle horisphères et dont la géométrie est exactement celle du plan euclidien, à l'exception des propriétés qui, supposant la retournabilité, sont relatives à l'espace à trois dimensions dans lequel on envisage ces surfaces. Pour nous, sphères et horisphères sont des sphères et des plans d'Euclide transportés dans un espace à

trois dimensions. On établirait d'ailleurs cette proposition par le procédé employé ci-dessus pour les plans de Riemann. Toutefois, comme certaines figures des espaces de Lobatchefsky, notamment leurs géodésiques, ne peuvent entrer dans un espace euclidien, quel que soit le nombre de ses dimensions, c'est dans un espace de Lobatchefsky à quatre dimensions qu'il faudrait placer un espace euclidien à trois dimensions, de même que, tout à l'heure, nous placions un espace sphérique à trois dimensions dans un espace euclidien à quatre dimensions.

On pourrait à ceci faire une objection : vous prenez un espace de Lobatchefsky à quatre dimensions, et vous y introduisez, dites-vous, un espace euclidien à trois dimensions où l'horisphère est retournable; en réalité, vous n'introduisez qu'un espace isométrique de l'espace euclidien. L'objection est irréfutable, en ce sens que nous ne pouvons distinguer un espace euclidien d'un autre espace ayant même géométrie; cela est si vrai qu'on n'arrive jamais qu'à faire des géométries générales, convenant à tous les espaces isométriques. Ce qu'on démontre donc, c'est l'identité deux à deux des sphères et des plans de tous les espaces qui vérifient la géométrie euclidienne avec les sphères et les horisphères de tous les espaces vérifiant la géométrie de Lobatchefsky. Il serait aisé de montrer que, de même, nous n'avons d'abord prouvé que l'identité deux à deux des surfaces sphériques des espaces vérifiant la géométrie d'Euclide avec les sphères et les plans de même courbure des espaces vérifiant la géométrie de Riemann.

SUR

LA NON-IDENTITÉ DU PLAN RIEMANNIEN

ET

DE LA SPHÈRE EUCLIDIENNE

PAR

P. MANSION,

Professeur à l'Université de Gand.

Bien que nous trouvions irréprochables les calculs de M. Lechalas, dans sa note intitulée : *Identité des plans de Riemann et des sphères d'Euclide*, nous ne pouvons admettre la conclusion finale que l'auteur en tire. Pour faire comprendre la raison de notre dissentiment, nous devons remonter aux principes mêmes de la géométrie générale.

La droite euclidienne est, par définition, telle qu'elle vérifie à la fois les postulats 5 et 6 d'Euclide, savoir : « (5). Deux droites d'un plan se rencontrent si elles font d'un même côté avec une transversale des angles intérieurs dont la somme est inférieure à deux droits. (6). Deux droites ne peuvent enclore un espace. » Dans un triangle rectangle euclidien, on a entre les nombres a, b, c qui mesurent l'hypoténuse et les côtés, la relation fondamentale

$$a^2 = b^2 + c^2 . . . . . \quad (E)$$

L'espace euclidien est caractérisé par une relation de Lagrange, qui se déduit de (E) et que nous appellerons (E'), entre les dix distances mutuelles de cinq quelconques de ses points. On peut définir analytiquement de même un espace euclidien à quatre

dimensions, par une relation (E″) entre les quinze distances mutuelles de six quelconques de ces points.

La droite lobatchefskienne est, par définition, celle qui ne vérifie que le postulat 6 d'Euclide. Dans un triangle rectangle lobatchefskien, on a une relation de la forme

$$\mathrm{Ch}\left(\frac{a}{l}\right) = \mathrm{Ch}\left(\frac{b}{l}\right)\mathrm{Ch}\left(\frac{c}{l}\right), \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{L})$$

où l est un paramètre numérique dont rien, en géométrie théorique, ne détermine la valeur. Un espace lobatchefskien à trois (ou quatre) dimensions est caractérisé par une relation qui se déduit de (L) et que nous appellerons (L′) [ou (L″)], entre les dix (ou les quinze) distances mutuelles de cinq (ou six) quelconques de ses points.

La droite riemannienne est, par définition, celle qui ne vérifie que le postulat 5 d'Euclide. Dans un triangle rectangle riemannien, on a une relation de la forme

$$\cos\left(\frac{a}{r}\right) = \cos\left(\frac{b}{r}\right)\cos\left(\frac{c}{r}\right), \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{R})$$

où r (comme l dans le cas précédent) est un paramètre numérique dont rien, en géométrie théorique, ne détermine la valeur. Un espace riemannien à trois (ou quatre) dimensions est caractérisé par une relation qui se déduit de (R) et que nous appellerons (R′) [ou (R″)], entre les dix (ou les quinze) distances mutuelles de cinq (ou six) quelconques de ses points.

Cela posé, considérons dans un plan euclidien, lobatchefskien ou riemannien, deux axes rectangulaires. Soient α, β, ρ les distances d'un point du plan à ces axes et à leur point de rencontre. L'équation d'un cercle sera

$$x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2,$$

dans les trois systèmes de géométrie, pourvu que l'on suppose

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad \mathrm{R} = \rho$$

en géométrie euclidienne;

$$x = \mathrm{Sh}\left(\frac{\alpha}{l}\right), \quad y = \mathrm{Sh}\left(\frac{\beta}{l}\right), \quad \mathrm{R} = \mathrm{Sh}\left(\frac{\rho}{l}\right)$$

en géométrie lobatchefskienne;

$$x = \sin\left(\frac{\alpha}{r}\right), \quad y = \sin\left(\frac{\beta}{r}\right), \quad \mathrm{R} = \sin\left(\frac{\rho}{r}\right)$$

en géométrie riemannienne.

Dans ce dernier cas, si $\mathrm{R} = 1$, on obtient, comme cercle-limite la droite riemannienne. La droite riemannienne jouit de la propriété d'avoir deux centres; la distance de l'un quelconque de ses points à l'un de ces centres (l'origine des coordonnées) est la même que la distance de ce point à l'autre centre (point opposé à l'origine).

Considérons, dans un espace euclidien, lobatchefskien ou riemannien, trois plans rectangulaires. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \rho$ les distances d'un des points de cet espace à ces plans et à leur point d'intersection. L'équation d'une sphère sera

$$x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{R}^2,$$

pourvu que l'on suppose

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma, \quad \mathrm{R} = \rho,$$

en géométrie euclidienne;

$$x = \mathrm{Sh}\left(\frac{\alpha}{l}\right), \quad y = \mathrm{Sh}\left(\frac{\beta}{l}\right), \quad z = \mathrm{Sh}\left(\frac{\gamma}{l}\right), \quad \mathrm{R} = \mathrm{Sh}\left(\frac{\rho}{l}\right),$$

en géométrie lobatchefskienne;

$$x = \sin\left(\frac{\alpha}{r}\right), \quad y = \sin\left(\frac{\beta}{r}\right), \quad z = \sin\left(\frac{\gamma}{r}\right), \quad \mathrm{R} = \sin\left(\frac{\rho}{r}\right),$$

en géométrie riemannienne.

Dans ce dernier cas, si $\mathrm{R} = 1$, on obtient, comme sphère-limite, le plan riemannien. Le plan riemannien jouit de la propriété d'avoir deux centres. La distance de l'un quelconque de ses points à l'un de ces centres (l'origine des coordonnées) est

la même que la distance de ce point à l'autre centre (point opposé à l'origine).

On conçoit de même ce que signifie, en analyse, un espace sphérique à trois dimensions, situé dans un espace à quatre dimensions, euclidien, lobatchefskien ou riemannien, et défini par une relation de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = R^2,$$

x, y, z, v, R ayant encore une signification différente, dans les trois cas, que nous supprimons pour abréger. Dans le cas où $R = 1$, on obtient, comme espace sphérique limite riemannien, l'espace riemannien à trois dimensions, lequel a, dans l'espace riemannien à quatre dimensions, deux centres qui sont situés à la même distance d'un point quelconque de cet espace.

Les propriétés qui constituent la géométrie de la circonférence considérée sur la sphère de même rayon; celle de la sphère considérée dans l'espace sphérique de même rayon sont les mêmes que celles de la droite dans le plan riemannien, du plan riemannien dans l'espace riemannien. En effet, ces propriétés ne dépendent pas de la valeur de R; elles subsistent donc pour $R = 1$. En particulier, un cercle de rayon R sur une sphère de rayon R a deux centres équidistants sur cette sphère, une sphère de rayon R, dans un espace sphérique de rayon R, a deux centres équidistants dans cet espace sphérique, les distances étant comptées sur des circonférences de rayon R. A cause de cela, M. Lechalas dit que le plan riemannien est *identique* à une sphère d'Euclide (ou de Lobatchefsky).

Nous ne pouvons admettre cette proposition de M. Lechalas, à moins qu'elle ne se réduise à une tautologie.

En effet, la définition d'une circonférence, d'une sphère, d'un espace sphérique d'Euclide ou de Lobatchefsky *implique* la considération du centre de cette circonférence, de cette sphère ou de cet espace sphérique, la distance de ce centre aux points de ces diverses figures étant comptée suivant des droites euclidiennes ou lobatchefskiennes, tandis que les distances, dans

la géométrie propre de ces figures, sont comptées suivant des circonférences. Or, la droite riemannienne, le plan riemannien, l'espace riemannien ont deux centres, symétriques par rapport à ces figures : les distances de ces centres aux points de ces figures sont comptées sur des droites riemanniennes, comme les distances considérées dans la géométrie propre de ces figures.

Ces propriétés sont différentes de celles des figures correspondantes d'Euclide ou de Lobatchefsky, si on les considère avec leur centre, et alors la proposition de M. Lechalas nous semble inexacte.

Si, au contraire, on considère ces figures sans leur centre, elle revient à cette identité : La géométrie du plan et de l'espace de Riemann est la même que celle de la sphère et de l'espace sphérique d'Euclide ou de Lobatchefsky, pourvu que, dans cette dernière géométrie, on mesure les distances sur certaines lignes tracées sur la sphère ou dans l'espace sphérique, ces lignes ayant dans cet espace les mêmes propriétés que les droites de Riemann. En réalité, dans ce cas, aucune propriété justifiant l'emploi des mots *d'Euclide* ou *de Lobatchefsky* n'intervient dans la définition de la sphère ou de l'espace sphérique considéré; au contraire, par définition, cette sphère et cet espace sphérique sont le plan et l'espace de Riemann (*).

En résumé, le plan riemannien peut être considéré comme identique à la sphère euclidienne, si l'on n'étudie que les propriétés intrinsèques de ces surfaces; mais par le fait qu'on les qualifie d'euclidienne et de riemannienne, on leur attribue des propriétés extrinsèques qui les différencient.

(*) On peut concevoir des espaces de Riemann et de Lobatchefsky de divers paramètres de la manière suivante : Si l'on connaît b, longueur rapportée à une certaine unité, du côté d'un triangle rectangle isoscèle déterminé, dont on ignore s'il est euclidien, riemannien ou lobatchefskien, on pourra supposer, avant toute mesure, que la longueur a de l'hypoténuse a n'importe quelle valeur, égale, inférieure ou supérieure à $b\sqrt{2}$. Cela implique la possibilité de valeurs en nombre infini pour r et l, mais non la possibilité de comparer des longueurs dans deux espaces différents.

Bruxelles. — HAYEZ, imp. de l'Acad. royale.

KARL WEIERSTRASS

PAR

M. D'OCAGNE

Professeur à l'École des Ponts et Chaussées
Répétiteur à l'École Polytechnique.

L'année qui va finir a vu disparaître une des plus hautes figures mathématiques de notre temps.

L'illustre professeur berlinois Karl Weierstrass s'est éteint le 19 février 1897, chargé d'ans et de gloire, après avoir, pendant plus d'un demi-siècle, au cours d'admirables découvertes, semé à profusion des idées non moins originales que profondes, qui, ayant déjà puissamment contribué à changer à notre époque la face de l'analyse, feront, pendant de longues années encore, lever de riches moissons dans le domaine de cette science.

Salué partout comme un maître, il a, par sa mort, on peut le dire, plongé dans le deuil l'univers mathématique. Certes, la nation allemande peut avec fierté le proclamer son enfant, de même que la France se glorifie d'avoir compté Cauchy parmi les siens. M. Emil Lampe — auquel, par la suite, nous aurons à faire de nombreux emprunts — a même pu dire, non sans raison, qu'avec Weierstrass son pays s'était acquitté envers le nôtre de ce qu'il lui avait emprunté avec Cauchy ; à cette occasion même, le nom de Riemann eût pu être joint à celui de Weierstrass. Mais quelque légitimes et respectables que soient ces revendications du sentiment national, elles ne sauraient primer le tribut d'admiration et de reconnaissance que, dans un élan spontané, l'humanité pensante tout entière s'empresse de décerner à de tels génies.

N'est-ce point un des plus beaux et des plus nobles privilèges de la science pure, que de faire oublier aux

hommes les divisions nées en ce bas monde des imperfections de leur nature et du jeu de leurs passions, et de les arracher aux conflits qui en sont la suite, pour les unir tous dans un effort commun qui ne connaît ni les frontières ni les partis : la recherche de la vérité ? Et les grands esprits qui nous tracent les voies de cette recherche n'appartiennent-ils point, par dessus tout, à l'humanité prise dans sa plus large expression ?

I

C'est à Ostenfeld, en Westphalie, où son père exerçait les fonctions de bourgmestre, que Karl Weierstrass vint au monde le 31 octobre 1815 (1). Ainsi que son frère Peter, devenu depuis lors professeur de philologie, et ses sœurs Élise et Clara (2), qui, restées comme lui célibataires, devaient plus tard unir leur existence à la sienne en une touchante association, il appartenait à la religion catholique à laquelle son père s'était converti.

A l'encontre de nombre de grands mathématiciens dont l'exemple est souvent cité, il ne semble pas que ses puissantes facultés se soient révélées de bonne heure. Après avoir achevé ce que nous appellerions ses études secondaires, au Gymnase de Paderborn, il entra à l'Université de Bonn où, de 1834 à 1838, il suivit les cours de la Faculté de Droit. Ce n'est qu'à cette époque, ses regards ayant été attirés vers la mécanique céleste, qu'il sentit s'éveiller en lui sa véritable vocation. Il avait alors 23 ans ! A cet âge, comme le remarque M. Lampe, Gauss était sur le point de publier ses immortelles *Disquisitiones arithmeticae*. Constatons à notre tour que Galois, dont les

(1) Tous les renseignements biographiques contenus dans cet article, sont empruntés à l'intéressante Notice lue par M. Emil Lampe devant la Société physique de Berlin, le 5 mars 1897 (Leipzig, Johann Ambrosius Barth, 1897).

(2) Sa sœur Clara l'a précédé d'un an dans la tombe.

conceptions géniales, relatées en une vingtaine de pages, ont jeté les fondements d'une science nouvelle, et dont on sait la fin tragique, n'a même pas vécu ce nombre d'années !

Mais cette sorte de retard dans l'éclosion de son génie ne devait point, par la suite, nuire à Weierstrass. Il semble, au contraire, qu'en abordant, avec un esprit déjà mûr et exempt de tout parti pris d'école, les graves problèmes auxquels il devait s'attaquer, il ait pu de prime abord y pénétrer plus profondément et se soit trouvé mieux à même d'approprier à des recherches d'un nouveau genre un instrument analytique également nouveau.

C'est à Munster, sous la direction de Gudermann, que, de 1838 à 1840, il poursuivit ses études mathématiques dans le silence du cabinet. L'initiation aux principes de la science par l'enseignement public, avec la lenteur qu'exige la moyenne d'intelligence des auditeurs, ne pouvait convenir à cet esprit vigoureux, capable par sa seule intuition de se rendre maître du premier coup des théories réputées les plus difficiles et seulement accessibles pour le commun des étudiants par une longue et patiente application. C'est en quelque sorte de plain-pied que Weierstrass a pénétré dans le domaine où, par prédestination, son activité devait se dépenser.

Il n'avait pas fallu trois ans à l'écolier improvisé pour se révéler comme un maître. A l'occasion d'un examen d'aptitude au professorat *(pro facultate docendi)* qu'il subit pendant l'été de 1841, il eut à fournir une composition écrite portant sur trois questions ; ayant obtenu pour l'une d'elles le libre choix du sujet, il étonna ses juges par une dissertation où la profondeur des aperçus et l'habileté des moyens pouvaient déjà faire prévoir l'auteur des belles découvertes qui, par la suite, devaient jeter tant d'éclat sur son nom (1).

(1) Ce premier travail de Weierstrass est resté inédit jusqu'à l'impression

En dépit de ce brillant début dans la science, Weierstrass dut tout d'abord se contenter des modestes fonctions de maître *(Lehrer)* au Progymnase de Deutsch-Krone, dans la Prusse Rhénane. Ce que pouvaient être ces fonctions, un seul détail suffira à en donner une idée : aux enfants confiés à ses soins, Weierstrass devait enseigner jusqu'à l'écriture et à la gymnastique *(Schreib- und Turnstunden)* ! Quelle besogne pour un homme dont le cerveau était déjà livré à ses profondes méditations sur la théorie des fonctions abéliennes ! Et ce n'est pas seulement pendant quelques mois, c'est pendant six ans — soit jusqu'à l'âge de 33 ans — que Weierstrass resta dans cette situation si peu en rapport avec son mérite. Qui donc, après un tel exemple, croirait pouvoir se plaindre de ses débuts !

Jamais, d'ailleurs, Weierstrass, arrivé au faîte des grandeurs accessibles à un savant, n'a songé à effacer de sa mémoire ces années de vulgaire labeur. Il y reportait, au contraire, sa pensée avec une complaisance particulière, en évoquant même le souvenir avec bonhomie lors de la célébration, au milieu d'un concert unanime d'hommages, de son quatre-vingtième anniversaire. Son humeur philosophique qui le portait à ne voir, en toute chose, que le bon côté, lui faisait même envisager cette situation comme présentant des avantages pour un chercheur, dont l'esprit ne se trouve pas ainsi détourné de l'objet auquel il s'est attaché, et il désapprouvait ceux dont l'ambition trop impatiente ne pouvait s'y complaire.

Il devint, en 1848, professeur *(Oberlehrer)* au Gymnase de Braunsberg, en Prusse, résidence qu'il ne quittait, à l'époque des vacances, que pour revenir auprès des siens restés en Westphalie et avec qui il n'avait jamais cessé d'entretenir les rapports de la plus cordiale affection. C'est à Westernkotten, où son père s'occupait alors de l'exploi-

de ses OEuvres complètes, où il figure dans le premier volume. Une partie seulement en avait vu le jour au milieu d'un mémoire paru dans le JOURNAL DE CRELLE.

tation de salines, que la famille se réunissait; c'est de là qu'est daté (11 septembre 1853) son premier Mémoire inséré dans le JOURNAL DE CRELLE.

Le temps passé par Weierstrass à Braunsberg fut celui où les idées, qui fermentaient en lui depuis qu'il s'était adonné aux sciences mathématiques, vinrent, en quelque sorte, à maturité. Tous les loisirs que lui laissaient ses fonctions étaient consacrés à ces recherches, que l'ample moisson de ses découvertes lui faisait poursuivre avec une ardeur fébrile. A ce propos, M. Lampe rapporte un trait qui peint bien l'état d'âme, à cette époque, du grand analyste: le directeur du Gymnase entendit, certain matin, un grand vacarme dans une de ses classes; informations prises, c'étaient les élèves de Weierstrass qui, par des gamineries de leur âge, célébraient l'absence de leur maître. N'ayant point été avisé de cette absence, le directeur courut chez le jeune professeur et fut tout étonné, en pénétrant dans la chambre sombre qu'il habitait, de le trouver écrivant à sa table sur laquelle une lampe achevait de brûler. Weierstrass, absorbé dans une recherche difficile qu'il avait poursuivie toute la nuit, n'avait pas pris garde au lever du jour, dont l'arrivée seule du directeur venait de l'avertir. Sur l'observation, d'ailleurs indulgente, que lui fit celui-ci, il répliqua simplement qu'il était dans l'impossibilité d'interrompre son travail, au bout duquel il entrevoyait une découverte qui ferait quelque bruit dans le monde scientifique. Ce jour-là, sans doute, il s'était rendu maître de quelqu'une de ces vérités fondamentales dont il a enrichi le domaine de nos connaissances.

L'apparition des premiers Mémoires de Weierstrass, qui eut lieu pendant son séjour à Braunsberg, ne tarda pas à faire sensation parmi le public savant. L'un des premiers, Richelot, que l'influence de Jacobi avait engagé dans une voie de recherches analogue, sut y discerner les marques du véritable génie; c'est sur sa proposition que Weierstrass reçut, en 1854, le titre de Docteur *honoris*

causa de l'Université de Königsberg. Vers la même époque, Borchardt entra en relations personnelles avec le professeur de Braunsberg, nouant avec lui une étroite et solide amitié qui subsista sans un nuage jusqu'à la mort du premier (1880).

Voyant sa réputation de mathématicien définitivement consacrée, Weierstrass aspirait à vivre dans un centre de haute culture intellectuelle où il trouvât, en hommes et en livres, les ressources qui lui faisaient défaut dans le fond de sa province. Une occasion favorable s'offrit enfin à lui ; il obtint, au mois de juin 1856, la chaire de mathématiques à l'Institut industriel de Berlin, et fut nommé, au mois de novembre de la même année, professeur extraordinaire à l'Université ; il se trouvait dès lors en mesure de donner libre carrière à son génie.

S'il avait fallu au grand géomètre attendre au delà de la quarantième année pour obtenir une situation à peu près digne de lui, son éclatant mérite ne tarda pas, en revanche, dans le milieu où il venait de pénétrer, à être hautement reconnu, et dès la seconde année de son séjour à Berlin, soit en 1857, il était admis à l'unanimité comme membre de l'Académie des Sciences de cette ville.

Malheureusement, l'effort cérébral dépensé par Weierstrass dans ses difficiles recherches, joint à son excessif labeur de professeur, ne tarda pas à ébranler gravement sa santé : c'était le tribut de la gloire. Des troubles nerveux se manifestèrent chez lui dès le mois de mars 1860, et, à la suite d'une crise violente dont il fut victime à la fin de l'année 1861, il dut se résigner à suspendre pendant quelque temps toutes ses occupations. Peu à peu cependant il se remit au travail mais sans pouvoir, comme professeur, se multiplier ainsi qu'il l'avait fait précédemment. Fort heureusement, la création en sa faveur, à l'Université de Berlin, d'une troisième chaire ordinaire de mathématiques — les deux premières étant occupées par

Ohm (1) et par Kummer — lui assura, dès l'année 1864, une existence aisée sans l'astreindre comme professeur à de trop pénibles obligations.

Cette situation, à laquelle ses collègues de l'Université joignirent, en 1873, la dignité de Recteur magnifique, fut celle qu'il conserva jusqu'à sa mort et dans laquelle il fera figure devant la postérité ; c'est de là, en effet, qu'il a, comme nous l'indiquerons plus loin, rayonné sur le monde mathématique.

II

En dépit des souffrances physiques qui s'étaient abattues sur lui et de la tension de son esprit toujours en travail, jamais Weierstrass ne se départit de l'affabilité de caractère, voire même de l'humeur joviale, qui étaient innées chez lui. Étudiant, il s'était distingué dans les joyeuses et bruyantes réunions de ses camarades par son entrain et sa gaîté ; cette heureuse disposition de caractère ne l'abandonna à aucune époque de sa vie. Par un singulier contraste avec la gravité de ses travaux, la plaisanterie conserva toujours à ses yeux un charme particulier. C'est qu'aussi l'esprit livré à de sévères spéculations ressent, à de certains moments, le besoin de se délasser. Ne raconte-t-on pas qu'Euler trouvait un sensible plaisir aux grosses farces des théâtres de marionnettes ?

Loin de s'enfermer dans une tour d'ivoire, le grand mathématicien s'efforçait, dans le monde, où il plaisait par la simplicité de ses manières et le tour enjoué de sa conversation, de faire oublier sa qualité de savant.

Mais c'était surtout sur ses élèves que, par la double influence de la bonté de son cœur et de l'élévation de

(1) Le frère du grand physicien.

ses pensées, il exerçait une irrésistible attraction, et l'on peut affirmer que nul maître ne fut jamais entouré d'une vénération plus universelle et plus profonde.

C'est ici le lieu de dire quel professeur incomparable fut Weierstrass et d'insister sur le caractère tout particulier de son enseignement.

Par une rencontre qui n'est pas aussi rare qu'on pourrait le croire, le grand penseur, si puissamment armé pour la découverte, éprouvait une sorte de malaise lorsqu'il s'agissait de jeter sur le papier les résultats de ses travaux. Ayant avec une rare netteté la vision intérieure des choses auxquelles s'appliquait son esprit, il lui semblait sans doute que leur expression écrite, avec son caractère définitif et permanent, ne fût jamais suffisamment adéquate à sa pensée ; de là une sorte de répugnance à prendre la plume. Aussi, dès qu'il se trouva en possession d'une chaire lui permettant de s'adresser directement au public, renonça-t-il à peu près complètement à la forme écrite pour répandre ses idées. Son enseignement devint ainsi peu à peu pour lui un mode oral de publication du fruit de ses labeurs. C'est assez dire l'attrait puissant qu'il dut exercer sur les auditeurs capables de le suivre (1).

La conséquence de cette façon de procéder fut que, tout d'abord, les idées du maître ne pénétrèrent guère à l'étranger que par les écrits de ses disciples. Aussi un éminent mathématicien français a-t-il pu dire qu'il avait subi l'influence de la pensée de Weierstrass avant d'avoir lu une ligne sortie de sa main.

En particulier, l'illustre geomètre avait, depuis de

(1) Détail singulier : Weierstrass, depuis qu'il était sujet à des troubles nerveux, ne pouvait rester debout devant le tableau noir sans être pris de vertige ; aussi contractait-il le soin de tenir la craie à un de ses auditeurs, qu'il se contentait de guider du fauteuil où il restait assis pour parler, fermant les yeux aux passages difficiles comme si, dit M. Lampe, il eût voulu abriter ses pensées contre les influences extérieures.

longues années déjà, opéré dans la théorie des fonctions elliptiques la révolution dont il sera dit un mot plus loin, lorsqu'elle nous fut en quelque sorte révélée par Halphen, dans le beau Traité où il en tire de si heureuses conséquences. Ce n'est d'ailleurs pas la seule circonstance qui contribua à faire bénéficier le public français des conquêtes dues au génie de Weierstrass. Une étroite affinité intellectuelle avait, dès longtemps, établi les rapports les plus cordiaux entre le grand mathématicien berlinois et le maître vénéré qui, tant par ses belles découvertes que par son haut enseignement, a, plus que tout autre, contribué à développer en France les études de pure analyse. Très au courant des idées de son ami avec lequel il entretenait une correspondance suivie, M. Hermite leur faisait dans ses cours une large place, sachant d'ailleurs, avec l'art incomparable dont il possède le secret, leur imprimer la forme didactique propre à les rendre le plus facilement assimilables, les éclaircissant aussi et les complétant par des remarques personnelles que leur auteur n'eût certes pas désavouées. Tous ceux qui ont eu l'heureux privilège d'entendre l'illustre professeur français exposer les théories de son collègue de Berlin, pourront témoigner de l'enthousiasme communicatif qu'il y mettait et par lequel ses auditeurs se laissaient envahir, s'unissant en quelque sorte avec lui dans l'hommage qu'il rendait au grand géomètre allemand.

On eût pu craindre que les richesses prodiguées par Weierstrass dans ses leçons fussent, au moins en partie, perdues pour la postérité. Une telle éventualité ne doit plus, grâce à Dieu, être maintenant redoutée. Plusieurs de ses anciens élèves, dont le nom est à lui seul une garantie, MM. Hettner, Knoblauch, Kötter, Phragmen et Stickelberger ont, à sa demande même, assumé la tâche particulièrement honorable de rédiger ses principales leçons qui seront publiées dans le recueil de ses Œuvres complètes.

La puissance créatrice de Weierstrass n'eut de comparable que sa parfaite modestie, exempte de toute affectation. N'ayant jamais brigué aucun honneur, il accueillit joyeusement ceux qui lui furent prodigués à la fin de sa carrière (1). C'est là un trait qu'il convient de noter : le grand géomètre, sans les avoir désirées, ne dédaigna jamais, comme étant au-dessous de son mérite, les distinctions par lesquelles se récompensent des titres le plus souvent bien inférieurs aux siens. Il n'était point accessible aux inspirations de l'orgueil, qui poussent parfois certains hommes de génie à se placer eux-mêmes au-dessus des autres hommes en affichant le mépris des honneurs qui ne sont pas à leur destination exclusive.

L'effacement dans lequel, s'il n'eût tenu qu'à lui, Weierstrass eût laissé sa personnalité, laisse entrevoir combien peu lui importaient les questions de priorité ; loin de jamais élever aucune réclamation à ce propos, il prodiguait, au contraire, sans compter, les indications les plus précieuses à tous ceux qui l'entouraient, trop heureux de voir fructifier entre leurs mains les germes qu'il y avait déposés. Aussi bien un de ses disciples a-t-il pu dire qu'il se réjouissait de toute idée qui lui avait été dérobée, lorsqu'il la retrouvait chez le larron (2).

La générosité avec laquelle il ouvrait à ses élèves le trésor de ses plus intimes pensées, la joie sincère qui éclatait en lui à la nouvelle des succès qu'ils remportaient en suivant ses inspirations, lui attachaient inébranlablement tous les cœurs. Aussi jamais vieillesse ne fut-elle entourée de soins plus dévoués ni plus vigilants. Par une pensée touchante, honorant non moins ceux qui en eurent l'initiative que celui qui en fut l'objet, lorsque le maître,

(1) Membre de tous les grands corps savants du monde entier, Weierstrass [illegible]. Il [illegible] un des dix fauteuils d'associé [illegible] dont disposait l'Académie des Sciences de l'Institut de France.

(2) Dans le texte de M. Darboux, (2) : Weierstrass freute sich über jeden Gedanken, der ihm gestohlen wurde, wenn er diesen bei dem Entwender wieder fände.

vaincu par les infirmités de l'âge, se vit condamné à ne plus quitter sa maison, ses anciens élèves s'entendirent pour venir chaque jour, à tour de rôle, l'entretenir tant des sujets scientifiques auxquels il s'intéressait encore, que des événements de la vie quotidienne. La célébration du jour anniversaire de sa naissance était l'occasion de réunions amicales, au cours desquelles il prenait lui-même plaisir, sur le ton de bonhomie et de simplicité qui lui était habituel, à revenir sur les incidents de sa longue carrière et, tout particulièrement, sur ses modestes débuts. Pour son quatre-vingtième anniversaire, S. M. l'Empereur d'Allemagne commanda au peintre R. von Voigtländer le portrait du vénéré savant pour le musée national allemand. L'artiste, nous dit M. Lampe, saisit admirablement l'expression vive et intelligente des traits du grand penseur dans cette toile qui perpétuera son image aux yeux des générations à venir.

III

Après cette rapide esquisse de l'homme, nous allons, aussi brièvement que possible, essayer de donner une idée de son œuvre, sans nous dissimuler d'ailleurs les difficultés de cette tâche. D'une part, en effet, l'étroitesse des limites qui nous sont imposées ; de l'autre, le caractère de la Revue des Questions scientifiques, qui n'est pas spécialement mathématique, ne nous permettent de traiter le sujet ni avec l'ampleur ni avec les détails qu'il comporterait. Au moins nous efforcerons-nous d'en souligner les traits les plus essentiels.

FONCTIONS ANALYTIQUES

Ce qui domine l'œuvre de Weierstrass, ce qui, au regard de la postérité, en restera la principale caracté-

ristique, c'est l'établissement « d'une théorie complète, définitive et maintenant classique » (1) des fonctions analytiques.

Cette théorie n'avait été qu'ébauchée par Cauchy, qui l'avait d'ailleurs abordée par la voie détournée du calcul intégral. Weierstrass s'y attaque directement, prenant comme unique point de départ la propriété qu'ont les fonctions analytiques d'être *développables en séries de Taylor*. Cette méthode entraîne des longueurs pour l'établissement de certaines propriétés, comme le théorème fondamental qui porte le nom de Laurent et qui, pour Cauchy, est intuitif. Mais, en n'introduisant aucun élément parasite, tel que ceux que Cauchy emprunte au calcul intégral, elle va plus au fond des choses et conduit à des notions de la plus haute importance, à celle notamment du *prolongement analytique* que, le premier, Weierstrass a admirablement élucidée, et sur laquelle nous nous arrêterons quelques instants.

Quand on connaît une fonction analytique dans un domaine D, si petit qu'il soit, et qui peut se réduire à un simple élément de ligne, on peut *sans ambiguïté* la prolonger *analytiquement* le long d'un chemin C quelconque issu d'une origine contenue dans D, en ayant recours à une succession de séries de Taylor, à moins qu'on ne rencontre sur le chemin C un point A qui soit un point *singulier* de la fonction, c'est-à-dire un point autour duquel la fonction ne soit pas développable en séries de Taylor. Si, conservant la même origine, on fait varier d'une façon continue le chemin C en marquant, pour chaque position de ce chemin, le premier point singulier A qu'on y rencontre à partir de l'origine, il peut se faire que ce point A engendre une ligne; il peut aussi se faire que cette ligne soit fermée et entoure complètement le do-

(1) Hermite, Notice sur Weierstrass. COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, 1er mars 1897; T. CXXIV, p. 450.

maine D. Dans ce dernier cas, la fonction considérée *n'existe* qu'à l'intérieur de cette ligne singulière essentielle qui limite, en quelque sorte, le domaine naturel de la fonction. C'est là une idée profonde que Weierstrass, le premier, a mise en pleine lumière. Il a donné des exemples de fonctions analytiques n'existant qu'à l'intérieur d'un cercle et non prolongeables au-delà. Il a donné également des exemples d'*expressions analytiques*, de séries notamment, représentant dans une certaine aire une fonction analytique, d'ailleurs prolongeable au-delà, et dans une autre aire une fonction toute différente. De cette étude, il a lumineusement fait ressortir la distinction entre la *fonction analytique*, nettement définie dans tout son domaine d'existence dès qu'on la connaît pour un élément de ce domaine, et les diverses *expressions analytiques* (séries, intégrales définies, etc.) qu'on peut lui donner et qui, représentant la fonction dans une certaine aire seulement, peuvent représenter autre chose ou même ne rien représenter du tout en dehors de cette aire.

C'est assurément là une des conquêtes fondamentales de Weierstrass. La notion de prolongement analytique joue un rôle essentiel dans les travaux de M. Schwarz sur la représentation conforme, dans ceux de M. Félix Klein sur les fonctions modulaires, ainsi que dans diverses parties de l'œuvre de M. Poincaré.

Conduit par sa méthode même à l'étude d'une fonction analytique *uniforme* (monodrome ou à une seule détermination) dans le domaine d'un *point singulier isolé*, Weierstrass établit l'admirable distinction entre les *pôles*, où la fonction devient infinie comme une fonction rationnelle, et les *points essentiellement singuliers* ou *points essentiels*, où la fonction est complètement indéterminée, c'est-à-dire dans le voisinage desquels la fonction peut s'approcher autant qu'on le veut de toute valeur donnée. Dans le premier cas, si a est l'affixe du point singulier, la série de Laurent relative au point a ne renferme qu'un nombre fini de

termes en $\frac{1}{(z-a)^n}$; dans le second, elle en contient un nombre infini. Ces belles propositions ont été complétées plus tard, comme on sait, par le célèbre théorème de M. Picard sur les zéros de l'équation $f(z) - h = 0$ dans le voisinage d'un point essentiel.

C'est encore le développement logique de sa méthode qui conduisit Weierstrass à une de ses plus belles et plus élégantes découvertes : la décomposition en un produit infini de facteurs primaires des fonctions *entières* (n'ayant dans le plan aucun point singulier) laquelle constitue, dit M. Picard (1), « un des plus admirables théorèmes de l'Analyse moderne ». De là découle immédiatement la représentation, par un quotient de deux fonctions entières, de toute fonction *méromorphe* (n'ayant d'autres singularités que des pôles). Nombreuses et brillantes sont les applications de ces deux théorèmes, notamment aux fonctions elliptiques.

Il convient de citer à part la belle proposition relative à l'intégrale eulérienne de seconde espèce que Weierstrass démontre être l'inverse d'une fonction entière.

Une extension des plus importantes a, depuis lors, été donnée aux théorèmes de Weierstrass par M. Mittag-Leffler, pour le cas des fonctions uniformes possédant une infinité de pôles ou de singularités essentielles. On peut dire que le théorème de M. Mittag-Leffler effectue la représentation d'une fonction uniforme quelconque.

Pour compléter l'indication de ce qui, dans l'œuvre du grand géomètre allemand, concerne les fonctions en général, il convient de citer les théorèmes fondamentaux sur les fonctions de plusieurs variables, sur les fonctions implicites, dont il a tout particulièrement pénétré la nature, sur les fonctions définies par des équations différentielles. Ses démonstrations, différentes de celles de Cauchy, sont plus complètes sur certains points.

(1) Revue générale des Sciences du 15 mars 1897, 8e année, n° 5), p. 173

Ayant édifié cet admirable corps de doctrine, Weierstrass s'est tout naturellement trouvé amené à en faire l'application à diverses classes particulières de fonctions.

FONCTIONS ALGÉBRIQUES

C'est par le problème de l'inversion des intégrales abéliennes que Weierstrass fut, dès 1857, amené à l'étude des fonctions algébriques. Quelques semaines après la communication qu'il fit à ce sujet à l'Académie des Sciences de Berlin, le JOURNAL DE CRELLE publia le Mémoire si justement célèbre et tant admiré de Riemann sur la question. Weierstrass, soucieux de rattacher aux siens les résultats de son émule, retira son manuscrit de l'imprimerie, pour se livrer à des recherches algébriques que lui-même jugeait très difficiles et qui, interrompues par d'autres travaux, lui prirent beaucoup de temps. Aussi n'est-ce qu'en 1869 qu'il fit connaître ses résultats définitifs dans cet ordre d'idées.

A l'encontre de celle de Riemann, fondée sur des notions de géométrie de situation aujourd'hui classiques, la doctrine de Weierstrass, non moins originale et non moins profonde, n'emprunte rien qu'à la seule analyse. Sa définition du *rang* ρ (égal au *genre* augmenté d'une unité) d'une courbe algébrique par la réduction de proche en proche de ses singularités, est très belle, très purement algébrique, en même temps que très utile, car elle s'étend aux surfaces, comme l'a montré M. Picard. Elle le conduit à une forme canonique dépendant de 3ρ modules pour toute courbe algébrique de rang ρ, si toutefois ρ est supérieur à 2. Cette doctrine entraîne en outre une théorie complète, admirablement enchaînée, des intégrales abéliennes, de leurs périodes, de leurs formes normales.

Moins intuitive sans doute que la théorie de Riemann, celle de Weierstrass peut, en revanche, être citée comme

une merveille de construction logique. Non seulement elle permet d'établir tous les résultats déduits de la première, mais elle semble être d'une application plus sûre et va plus loin sur certains points. On en peut citer un exemple célèbre. Il s'agit d'un des plus importants théorèmes de la théorie des courbes algébriques, enseigné par Weierstrass longtemps avant que M. Schwarz le retrouvât sous une forme d'ailleurs moins complète, et qui consiste en ce que toute courbe de genre supérieur à 1 n'admet qu'un nombre fini de transformations birationnelles en elle-même (1). D'éminents géomètres, en se plaçant au seul point de vue de Riemann, ont pu, pendant longtemps, regarder ce théorème comme simplement *vraisemblable*, alors qu'il est bien, en réalité, une conséquence immédiate des méthodes de Weierstrass.

Il ne faudrait d'ailleurs pas inférer de ce qui précède, que Weierstrass mésestimait le moins du monde la voie suivie par Riemann. Personne, au contraire, plus que lui ne rendait justice à la merveilleuse pénétration de ce grand géomètre ; mais il faisait une distinction fondamentale entre la recherche des vérités analytiques, pour laquelle toute liberté lui semblait permise dans le choix des méthodes, et la forme sous laquelle ces vérités, une fois acquises, devaient venir s'ajouter à l'édifice de la science. A ce dernier point de vue, il se montrait fermement convaincu que les propositions de la pure analyse ne devaient être démontrées que par des méthodes purement analytiques et jamais, dans ses travaux personnels, il ne s'est écarté de cette manière de voir.

(1) V[illegible] Weierstrass [illegible] lettre à M. Schwarz [illegible] chef-d'œuvre d'inven[illegible]

FONCTIONS ELLIPTIQUES

C'est la théorie des fonctions elliptiques tout entière que Weierstrass a refaite en partant d'un point de vue très élevé.

Lorsqu'une fonction $f(z)$ est telle que $f(z + z_0)$ soit une fonction algébrique de $f(z)$ et $f(z_0)$, on dit qu'elle *admet un théorème d'addition*. Weierstrass montre que toute fonction admettant un théorème d'addition est une fonction algébrique soit de z, soit de e^{az}, soit de $p(z)$, la fonction p étant définie par la relation

$$z = \int_{\infty}^{p} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}},$$

et que la réciproque est vraie. Il obtient le même théorème, ainsi que sa réciproque, pour toute fonction uniforme liée algébriquement à sa dérivée.

C'est dans ces belles propositions que la fonction $p(z)$ puise sa première importance; c'est par là que Weierstrass s'est trouvé amené à en faire une étude approfondie, lui adjoignant d'ailleurs les fonctions $\zeta(z)$ et $\sigma(z)$ définies par $\zeta' = -p$, $\frac{\sigma'}{\sigma} = \zeta$ (avec un choix convenable des constantes).

Au moyen de ces nouvelles fonctions, Weierstrass a pu refaire tout l'édifice des fonctions elliptiques, auquel il semblait pourtant que Jacobi eût donné sa forme définitive. Dans cette nouvelle théorie, les trois fonctions p, ζ et σ remplacent *sn*, Z, Θ, l'invariant $I = \frac{g_2^3}{g_2^3}$ joue le rôle de k^2, la fonction $I\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)$, ω et ω' étant les périodes, devient la nouvelle fonction modulaire, etc. Weierstrass adjoint d'ailleurs à la fonction p une fonction entière désignée par $Al(z)$, fort importante et dont l'analogue joue un rôle considérable dans la théorie des fonctions hyperelliptiques.

Les fonctions de Weierstrass se prêtent admirablement

à l'exposé systématique de la théorie des fonctions elliptiques, prise dans ses grandes lignes, comme le prouvent aujourd'hui les Traités d'Halphen, de MM. Tannery et Molk, de MM. Appell et Lacour, fondés sur leur emploi (1). Avec elles, les idées générales ressortent très bien et deviennent plus facilement assimilables pour les commençants. Enfin elles présentent d'indiscutables avantages dans certaines questions comme le problème de l'inversion des intégrales elliptiques, pour lequel elles dispensent d'examiner la réalité des racines du polynôme placé sous le radical. Halphen a d'ailleurs montré, dans le Tome II de son grand Traité, tout le parti qu'on en pouvait tirer dans les applications à la géométrie, à la mécanique, à la géodésie, etc.

Mais ce n'est pas à dire que la belle théorie de Jacobi ait pour cela perdu tout son intérêt. Là où les applications doivent être poussées jusqu'au calcul numérique, voire même pour approfondir certaines théories, celle de la transformation par exemple, elle présente encore de grands avantages.

Si, par exemple, au point de vue théorique, il est d'un haut intérêt de voir que le développement en produit infini de la fonction σ est donné immédiatement, sans qu'on ait à recourir à aucun artifice, par le théorème général de Weierstrass sur les décompositions en facteurs primaires dont il a été parlé plus haut, il faut bien remarquer aussi que ce produit infini, qui est double, ne saurait se prêter au calcul numérique avant d'avoir été transformé en produit simplement infini, ce qui est une sujétion assez ennuyeuse. Avec les fonctions Θ, au contraire, le résultat, obtenu moins directement il est vrai, est immédiatement utilisable.

Si donc l'élégante théorie de Weierstrass doit incontes-

(1) Voir les comptes rendus bibliographiques que nous avons donnés de ces divers Traités dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (Livraisons d'octobre 1886, juillet 1893, juillet 1896, janvier 1897).

tablement se substituer à celle de Jacobi pour l'exposition des propriétés générales des fonctions elliptiques, il n'en est pas moins vrai que celle-ci ne saurait être complètement passée sous silence et qu'une place doit encore lui être faite dans l'enseignement, quitte à la faire dériver de la première. C'est, d'ailleurs, ce qu'ont parfaitement compris les auteurs des traités didactiques cités plus haut.

Cette théorie des fonctions elliptiques est une de celles que Weierstrass n'a fait connaître que par son enseignement oral. En en donnant un résumé, et comme le formulaire, dans ses *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen*, M. Schwarz a rendu un service éminent au public mathématique. On pouvait toutefois regretter de ne pas posséder la complète expression de la pensée du maître. Cette lacune va se trouver comblée dans le recueil de ses Œuvres complètes, qui contiendra une rédaction détaillée de ses leçons sur ce sujet, due à M. Phragmen dont on sait l'impeccable érudition.

FONCTIONS ABÉLIENNES

La théorie des fonctions abéliennes semble avoir été le domaine de prédilection de Weierstrass, et c'est peut-être à son occasion qu'il a entrepris les belles recherches sur la théorie générale des fonctions dont nous avons déjà parlé.

Le problème de l'inversion des intégrales hyperelliptiques, posé par Jacobi, n'avait été résolu par Göpel et Rosenhain que dans le cas le plus simple des intégrales de première classe ; mais leur solution, justement admirée pourtant de tous les analystes, n'était susceptible d'aucune généralisation ; dès la seconde classe, se présentent des difficultés insurmontables. A Weierstrass devait revenir l'honneur de résoudre, par une voie absolument différente de celle de ces auteurs, le problème pris dans

toute sa généralité. Cette solution constitue aux yeux de M. Hermite, juge éminent en la matière, une des plus importantes et des plus belles découvertes qui aient été faites en analyse.

Weierstrass avait fait voir que les fonctions de plusieurs variables qui résolvent la question sont uniformes : « Au point de vue de la doctrine, dit l'illustre géomètre français, ce résultat est extrêmement remarquable ; il anticipait sur notre époque, il dégageait en Analyse une de ces idées fondamentales préparées par une lente élaboration, qui contiennent en germe les progrès de la Science. Une méthode profonde, des calculs rappelant la perfection et l'élégance de Gauss et de Jacobi conduisent ensuite au quotient de deux fonctions holomorphes, généralisation de la fonction Θ. »

La belle exposition systématique de Weierstrass est d'ailleurs calquée sur sa théorie des fonctions elliptiques.

Il est remarquable que Weierstrass n'ait jamais publié ni enseigné la démonstration du théorème fondamental qu'il a pris comme point de départ. Ce théorème consiste en ce que, si les fonctions $f(u, v)$ et $z(u, v)$ admettent un théorème d'addition — c'est-à-dire si $f(u + u_0, v + v_0)$ et $\varphi(u + u_0, v + v_0)$ s'expriment algébriquement au moyen de $f(u, v)$, $z(u, v)$, $f(u_0, v_0)$, $z(u_0, v_0)$ — ce sont des fonctions algébriques de fonctions méromorphes quadruplement périodiques ou de dégénérescences de celles-ci. Dans ses dernières années même, l'inventeur du théorème n'arrivait plus, paraît-il, à reconstituer cette démonstration. Fort heureusement, le théorème a été démontré dans le cas de quatre périodes par MM. Poincaré, Picard, Appell, dans celui de une, deux ou trois périodes, par M. Painlevé.

Il faut encore citer de belles propositions arithmétiques sur la réduction du nombre des périodes des intégrales abéliennes de première espèce, données par Weierstrass dans ses cours oraux, employées notamment par Sophie Kovalevsky et démontrées par M. Picard pour le genre 2, par M. Poincaré pour un genre quelconque.

SUJETS DIVERS

Le souci d'extrême rigueur qui était en Weierstrass, le poussait à élucider les principes qui servent de fondement à l'analyse, de façon à les mettre à l'abri de toute espèce de doute. C'est ainsi notamment qu'en creusant la notion de *continuité*, il arriva à former les premiers exemples, aujourd'hui classiques, de fonctions continues n'ayant pas de dérivée.

La même tendance le conduisit à refaire, en quelque sorte, de fond en comble le *Calcul des variations*, non seulement pour une, mais pour un nombre quelconque de variables indépendantes, de façon à préciser les notions qui y jouent un rôle fondamental.

A diverses reprises aussi il élucida dans ses cours les principes fondamentaux de la théorie des *Équations différentielles*.

Un Mémoire sur les *Facultés analytiques*, qui remonte aux premiers temps de sa carrière, outre qu'il épuise véritablement le sujet, secondaire il est vrai, présente encore cet intérêt qu'on y voit poindre certaines idées qui s'épanouiront dans la théorie générale des fonctions.

Préoccupé de la généralisation possible des calculs symboliques opérés au moyen des imaginaires, Weierstrass a, sur le tard, entamé l'étude des *grandeurs complexes* formées avec n unités fondamentales, et fourni par là une preuve nouvelle de la vigueur et de l'ingéniosité de son esprit. On peut craindre malheureusement, comme l'a montré M. Poincaré, que cette savante conception ne conduise, dans les applications, à rien de vraiment distinct de ce que donnent les seules imaginaires.

Nous devons encore à Weierstrass des travaux accomplis sur la transformation des formes bilinéaires et quadratiques, sur la transcendance du nombre π, dont il a été amené à s'occuper à la suite de la démonstration célè-

bre de M. Lindemann, inspirée de celle de M. Hermite, pour le nombre *e*, etc. La méthode de Weierstrass a été, depuis lors, amenée au dernier degré de simplicité par MM. Molk et Tannery, F. Klein, Hurwitz, Hilbert.

Analyste dans toute la force du terme, Weierstrass, bien qu'ayant, pendant quelques années, donné de façon tout à fait supérieure l'enseignement de la géométrie analytique à l'Institut industriel de Berlin, n'a guère jeté ses regards du côté de la géométrie. Toutefois une des plus belles théories de cette science, théorie présentant, il est vrai, un haut intérêt au point de vue de l'analyse, celle des *surfaces minima*, lui doit d'importants progrès. Les découvertes réalisées par Weierstrass dans ce domaine, après avoir servi de base aux travaux bien connus de M. Schwarz, ont été exposées et développées par M. Darboux dans le tome premier de ses magistrales *Leçons sur la théorie générale des surfaces*.

Il est remarquable qu'ayant, comme il a été dit plus haut, été amené aux mathématiques par l'attrait de la mécanique céleste, Weierstrass n'ait jamais, par la suite, rien publié dans cet ordre d'idées. A l'encontre de grands géomètres comme Lagrange, Laplace, Ampère, Gauss, Poisson, Cauchy,... qu'il a égalés par son génie dans l'analyse, il semble n'avoir eu que peu de souci des applications de la science du calcul aux sciences physiques. Dans toute son œuvre on ne rencontre qu'une courte Note, fort intéressante d'ailleurs, qui traite d'un sujet de physique. Cette Note fait connaître une construction géométrique permettant de suivre rigoureusement la marche d'un rayon lumineux à travers un système de lentilles épaisses (1) ; encore est-ce là une simple question d'optique géométrique sans lien avec l'œuvre analytique du grand mathématicien.

(1) Cette construction, publiée en 1856, dans le TAGEBLATT DER WIENER NATURFORSCHER VERSAMMLUNG, a été reproduite par M. Lummer dans le Traité d'Optique géométrique qu'il a rédigé pour l'Encyclopédie physique de Pfaundler.

Il s'en faut, d'ailleurs, que ce dont la science est redevable à Weierstrass se borne à la contribution, d'une si belle ampleur pourtant et d'une si haute importance, qu'il y a apportée personnellement. Ce que nous avons dit plus haut de la façon dont il prodiguait les inspirations à ses disciples, laisse entrevoir comment il a, en outre, fait naître autour de lui toute une école de mathématiciens de talent qui, en suivant les voies par lui ouvertes, ont enrichi la science d'une foule d'importantes découvertes.

Déjà, à l'occasion des surfaces minima, nous avons eu à citer M. Schwarz. C'est encore en mettant en œuvre des idées de Weierstrass, que le même géomètre a entrepris ses belles recherches sur les représentations conformes, notamment sur celle des polygones, recherches auxquelles il faut joindre celles de M. Schottky, puisées à la même inspiration. MM. Fuchs et Frobenius doivent encore être cités parmi les plus éminents disciples de Weierstrass, devenus, comme M. Schwarz, des maîtres à leur tour.

En dépit de la spécialisation relative de ses propres recherches, Weierstrass était doué, en mathématiques, d'un génie universel qui lui permettait non seulement d'apprécier des travaux conçus dans toute autre direction que celle où il s'était engagé personnellement, mais encore d'y guider ceux de ses élèves qui s'y sentaient portés par une aptitude spéciale.

Son influence, d'ailleurs, est bien loin de ne s'être fait sentir qu'en Allemagne. On peut dire, au contraire, qu'elle a rayonné partout où se cultivent les mathématiques.

Il faut d'abord remarquer que la grande réputation de professeur de Weierstrass attira à Berlin nombre d'étrangers, désireux de recueillir directement sa parole et de se former à sa sévère discipline intellectuelle. Parmi ceux-ci une place spéciale revient à M. Mittag-Leffler, dont les beaux travaux ont contribué à étendre les résultats obtenus par Weierstrass dans la théorie générale des fonctions, et à Sophie Kovalevsky qui, supérieurement

douée pour les mathématiques, s'instruisit en particulier auprès du vieux maître berlinois, comme celui-ci l'avait lui-même fait jadis auprès de Gudermann. On sait assez quel profit l'éminente mathématicienne russe sut retirer de l'inspiration de Weierstrass, notamment dans son célèbre travail sur la rotation d'un solide pesant autour d'un point fixe.

Mais ce n'est pas seulement sur les géomètres étrangers à l'Allemagne, qui allèrent écouter les leçons de Weierstrass à Berlin, que ses idées exercèrent une profonde et durable influence. La trace de cette influence se retrouve encore, particulièrement en France, dans les travaux des mathématiciens qui, sans s'être pourtant formés directement à son école, ont le plus contribué à l'évolution contemporaine de l'analyse. Il y aurait même là matière à une étude fort intéressante que nous ne pouvons qu'indiquer. Qu'il nous suffise ici de citer les chefs incontestés de la jeune école mathématique française, MM. Poincaré, Picard et Appell, dont les belles découvertes jouissent aujourd'hui d'une notoriété universelle. A ces noms illustres, on peut joindre maintenant celui de M. Painlevé, dont les profondes recherches sur la théorie des equations differentielles, qui commencent seulement à se repandre dans le public mathématique, ont eu, dès leur apparition, l'heureux privilège de fixer particulièrement l'attention de Weierstrass et de lui apporter, sur le declin de sa vie, le témoignage suprême que les progrès de la haute analyse étaient loin de se ralentir dans la voie où lui-même, pendant sa longue et glorieuse carrière, avait realisé de si admirables conquêtes (1).

(1) Extrait de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, livraison d'octobre 1897, pp. 484-507.

RELATIONS ENTRE LES DISTANCES DE CINQ OU DE SIX POINTS EN GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE ET EN GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE (*).

1. *Objet de la présente note.* Lagrange a fait connaître, au siècle passé, une relation remarquable qui existe entre les distances de cinq points, en géométrie euclidienne.

M. Schering, en 1870 et en 1873, a donné la relation analogue, en géométrie non euclidienne, sans aucun développement, mais en en signalant toute l'importance.

M. De Tilly, dans son *Essai de géométrie analytique générale*, a montré comment on pouvait déduire, de ces relations, les principes fondamentaux tant de la géométrie euclidienne que de la géométrie non euclidienne.

Dans la présente note, nous nous proposons de montrer comment on peut inversement établir, d'une manière simple, les relations de Lagrange et de Schering au moyen des premiers principes de la géométrie euclidienne et de la géométrie non euclidienne. Si nous ne nous trompons, la chose n'a pas encore été faite pour la relation de Schering.

I

RELATION DE SCHERING.

2. Lemme I. Considérons quatre points 1, 2, 3, x dont les trois premiers sont sur une droite, 2 étant situé, par exemple, entre 1 et 3. On a, comme l'on sait, en géométrie riemannienne,

$$\cos\left(\frac{1x}{r}\right) = \cos\left(\frac{12}{r}\right)\cos\left(\frac{2x}{r}\right) + \sin\left(\frac{12}{r}\right)\sin\left(\frac{2x}{r}\right)\cos 12x,$$

$$\cos\left(\frac{3x}{r}\right) = \cos\left(\frac{23}{r}\right)\cos\left(\frac{2x}{r}\right) - \sin\left(\frac{23}{r}\right)\sin\left(\frac{2x}{r}\right)\cos 12x,$$

(*) Communication faite à la séance du 3 avril 1895 de la première section de la *Société scientifique de Bruxelles*, et insérée dans les *Annales*, 1895, t. XIX, 2e partie, pp. 189-196.

r désignant la constante caractéristique de ce système de géométrie.

Pour éliminer $\cos 12\,x$, ajoutons la première relation, multipliée par $\sin\left(\frac{23}{r}\right)$, à la seconde multipliée par $\sin\left(\frac{12}{r}\right)$. Il viendra

$$\cos\left(\frac{1x}{r}\right)\sin\left(\frac{23}{r}\right)+\cos\left(\frac{3x}{r}\right)\sin\left(\frac{12}{r}\right)=\cos\left(\frac{2x}{r}\right)\sin\left(\frac{13}{r}\right),$$

à cause de la relation

$$\sin\left(\frac{12}{r}\right)\cos\left(\frac{23}{r}\right)+\sin\left(\frac{23}{r}\right)\cos\left(\frac{12}{r}\right)=\sin\left(\frac{13}{r}\right).$$

Posons

$$m=\sin\left(\frac{23}{r}\right),\quad n=-\sin\left(\frac{13}{r}\right),\quad p=\sin\left(\frac{12}{r}\right),$$

et écrivons, pour abréger, en général,

$$(ik)\quad\text{ou}\quad(ki)\quad\text{au lieu de}\quad\cos\left(\frac{ik}{r}\right),$$

ik étant la distance de deux points i et k. L'avant-dernière relation prendra alors la forme très simple :

$$m(x1)+n(x2)+p(x3)=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Elle subsiste évidemment aussi en géométrie lobatchefskienne, si l'on pose

$$(ik)=\mathrm{Ch}\left(\frac{ik}{l}\right),\quad m=\mathrm{Sh}\left(\frac{23}{l}\right),\quad \text{etc.},$$

l désignant la constante lobatchefskienne.

3. ***Relation entre trois points situés en ligne droite.*** Faisons coïncider successivement le point x avec 1, 2, 3. La relation (1) donnera

$$m(11)+n(12)+p(13)=0,$$
$$m(21)+n(22)+p(23)=0,$$
$$m(31)+n(32)+p(33)=0.$$

On déduit de là

$$\begin{vmatrix} (11) & (12) & (13) \\ (21) & (22) & (23) \\ (31) & (32) & (33) \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est la relation cherchée. Évidemment, on a

$$(11) = (22) = (33) = 1; \quad (21) = (12), \quad \text{etc.}$$

4. Lemme II. Considérons quatre points 1, 2, 3, 4 dans un plan. Soit a le point où la droite 12 rencontre la droite 34. On aura, pour un point x quelconque du plan, une relation de la forme

$$m'(x1) + n'(x2) + p'(xa) = 0,$$

puisque 1, 2, a sont en ligne droite; et une relation de la forme

$$m''(x3) + n''(x4) + p''(xa) = 0,$$

puisque 3, 4, a sont en ligne droite aussi.

On déduit de là, par élimination de (xa), une nouvelle relation

$$m(x1) + n(x2) + p(x3) + q(x4) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

liant, d'une manière simple, les distances des points 1, 2, 3, 4, à un point quelconque x du plan.

Remarque. En géométrie lobatchefskienne, 12 pourrait ne pas rencontrer 34, et même 13 pourrait aussi ne pas rencontrer 24; mais alors 14 rencontrerait nécessairement 23 en un point a. Dans ce cas, on appliquerait le raisonnement précédent aux points $14a$, $23a$.

5. *Relation entre quatre points situés dans un plan.* Faisons coïncider successivement le point x avec 1, 2, 3, 4; éliminons m, n, p, q entre les quatre égalités obtenues; il viendra

$$\begin{vmatrix} (11) & (12) & (13) & (14) \\ (21) & (22) & (23) & (24) \\ (31) & (32) & (33) & (34) \\ (41) & (42) & (43) & (44) \end{vmatrix} = 0.$$

6. Lemme III. Considérons cinq points 1, 2, 3, 4, 5 dans l'espace. Soit a le point où la droite 12 rencontre le plan 345. On aura, pour un point quelconque x de l'espace, une relation de la forme

$$m'(x1) + n'(x2) + p''(xa) = 0,$$

parce que 1, 2, a sont en ligne droite ; et, parce que a, 3, 4, 5 sont dans un plan, une autre, de la forme

$$m''(xa) + n''(x3) + p''(x4) + q''(x5) = 0.$$

On déduit de là, par élimination de (xa), une nouvelle relation que l'on peut écrire ainsi :

$$m(x1) + n(x2) + p(x3) + q(x4) + r(x5) = 0 \quad . \quad . \quad (3)$$

Remarque. En géométrie lobatchefskienne, il peut arriver que 12 ne rencontre pas le plan 345. Mais en tout cas, il est possible, parmi les cinq points, d'en choisir trois qui déterminent un plan tel que les deux autres points soient, l'un d'un côté de ce plan, l'autre de l'autre.

7. *Relation de Schering.* La relation (3) conduit immédiatement à celle de Schering, si l'on fait coïncider x avec 1, 2, 3, 4, 5. On trouve

$$\begin{vmatrix} (11) & (12) & (13) & (14) & (15) \\ (21) & (22) & (23) & (24) & (25) \\ (31) & (32) & (33) & (34) & (35) \\ (41) & (42) & (43) & (44) & (45) \\ (51) & (52) & (53) & (54) & (55) \end{vmatrix} = 0.$$

Remarque. Il n'est pas sans intérêt de remarquer que l'on peut remplacer l'une des lignes ou des colonnes du déterminant précédent, la dernière ligne, par exemple, par

$$(x1),\ (x2),\ (x3),\ (x4),\ (x5).$$

La relation obtenue ainsi est évidemment équivalente à la relation (3); elle existe entre les quinze distances de six points 1, 2, 3, 4, 5, x; elle est *du premier degré*, par rapport aux cosinus des quantités

$$\frac{15}{r}, \quad \frac{25}{r}, \quad \ldots, \quad \frac{1x}{r}, \quad \frac{2x}{r}, \quad \ldots$$

relatives aux points 5 et x, ce qui la rend souvent plus maniable que la relation de Schering.

II

RELATION DE LAGRANGE.

8. Lemme I. Soient 1, 2, 3 trois points en ligne droite, 2 étant compris, par exemple, entre 1 et 3. On a, pour un point quelconque x du plan,

$$\overline{x1}^2 = \overline{12}^2 + \overline{x2}^2 - 2.12.x2.\cos 12x,$$
$$\overline{x3}^2 = \overline{23}^2 + \overline{x2}^2 + 2.23.x2.\cos 12x.$$

On déduit de là, en éliminant $\cos 12x$,

$$\overline{x1}^2.23 + \overline{x3}^2\ 12 + \overline{x2}^2(-13) = 12.23.13.$$

Nous écrirons cette relation, en abrégé, comme il suit :

$$\alpha(x1) + \beta(x2) + \gamma(x3) = 1 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

en posant

$$\alpha = \frac{23}{12.23.13}, \quad \beta = \frac{-13}{12.23.13}, \quad \gamma = \frac{12}{12.23.13},$$

et représentant par (ik) le carré de la distance de deux points i, k.

On observera que

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1')$$

Cette relation peut se déduire de (1), en la divisant par $(x1)$ et faisant s'éloigner x à l'infini.

La relation (1), à la forme près, est due à **Robert Simson**, mais s'appelle souvent *théorème de Stewart*.

9. ***Relation entre trois points situés en ligne droite.*** Dans la relation (1), faisons coïncider x avec 1, 2, 3; éliminons α, β, γ entre (1') et les égalités obtenues; il viendra, en observant que $(11) = (22) = (33) = 0$,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (12) & (13) \\ 1 & (21) & 0 & (23) \\ 1 & (31) & (32) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

10. LEMME II. On prouve, comme au n° 4, la proposition suivante : On a, entre les distances de 4 points 1, 2, 3, 4 d'un plan à un cinquième x, une relation de la forme

$$\alpha(x1) + \beta(x2) + \gamma(x3) + \delta(x4) = 1, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

avec la condition

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

Cette dernière égalité se démontre directement; mais on peut aussi la déduire de (2) en faisant s'éloigner x à l'infini.

11. ***Relation entre quatre points situés dans un plan.*** Dans (2), faisons coïncider x avec 1, 2, 3, 4; éliminons $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ entre (2') et les égalités obtenues. Nous trouverons la relation :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (12) & (13) & (14) \\ 1 & (21) & 0 & (23) & (24) \\ 1 & (31) & (32) & 0 & (34) \\ 1 & (41) & (42) & (43) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

12. Lemme III. On prouve, comme au n° 6, la relation suivante entre les distances à un point x de cinq points quelconques de l'espace, 1, 2, 3, 4, 5 :

$$\alpha(x1) + \beta(x2) + \gamma(x3) + \delta(x4) + \varepsilon(x5) = 1, \quad . \quad . \quad (3)$$

avec la condition

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 0. \qquad (3')$$

13. *Relation de Lagrange.* Dans (3), faisons coïncider x avec 1, 2, 3, 4, 5; éliminons ensuite $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, entre (3') et les cinq égalités obtenues. Nous trouverons ainsi la relation de Lagrange, sous la forme de Cayley :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (12) & (13) & (14) & (15) \\ 1 & (21) & 0 & (23) & (24) & (25) \\ 1 & (31) & (32) & 0 & (34) & (35) \\ 1 & (41) & (42) & (43) & 0 & (45) \\ 1 & (51) & (52) & (53) & (54) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Remarques. I. On peut remplacer la dernière ligne du déterminant par $1, (x1), (x2), (x3), (x4), (x5)$.

II. Il est assez facile de déduire toutes les relations de ce paragraphe de celles du § I en faisant $r = \infty$, ou $l = \infty$.

SUR L'EXPRESSION ANALYTIQUE DU VOLUME D'UN CORPS EN GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE.

Soient, dans un espace riemannien, α, β, γ, ρ les distances d'un point à trois plans coordonnés rectangulaires et à leur point de rencontre, r la constante riemannienne. Posons :

$$x = \sin\frac{\alpha}{r}, \quad y = \sin\frac{\beta}{r}, \quad z = \sin\frac{\gamma}{r}, \quad u = \cos\frac{\rho}{r},$$

$$V = r^3 \iiint \frac{dxdydz}{u},$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace compris à l'intérieur d'un corps quelconque. On prouve aisément que l'on a

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 1,$$

et que V se transforme en une expression de même forme, au moyen de nouvelles coordonnées x', y', z', u', quand on prend de nouveaux plans coordonnés rectangulaires. Par suite, on peut prendre l'expression V pour définition du volume du corps considéré.

Dans un espace lobatchefskien, la même formule où r^3 est remplacé par l^3 peut aussi servir à définir le volume d'un corps, pourvu que l'on pose

$$x = \mathrm{Sh}\,\frac{\alpha}{l}, \quad y = \mathrm{Sh}\,\frac{\beta}{l}, \quad z = \mathrm{Sh}\,\frac{\gamma}{l}, \quad u = \mathrm{Ch}\,\frac{\delta}{l},$$

étant la constante lobatchefskienne. Dans ce cas,

$$x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = -1.$$

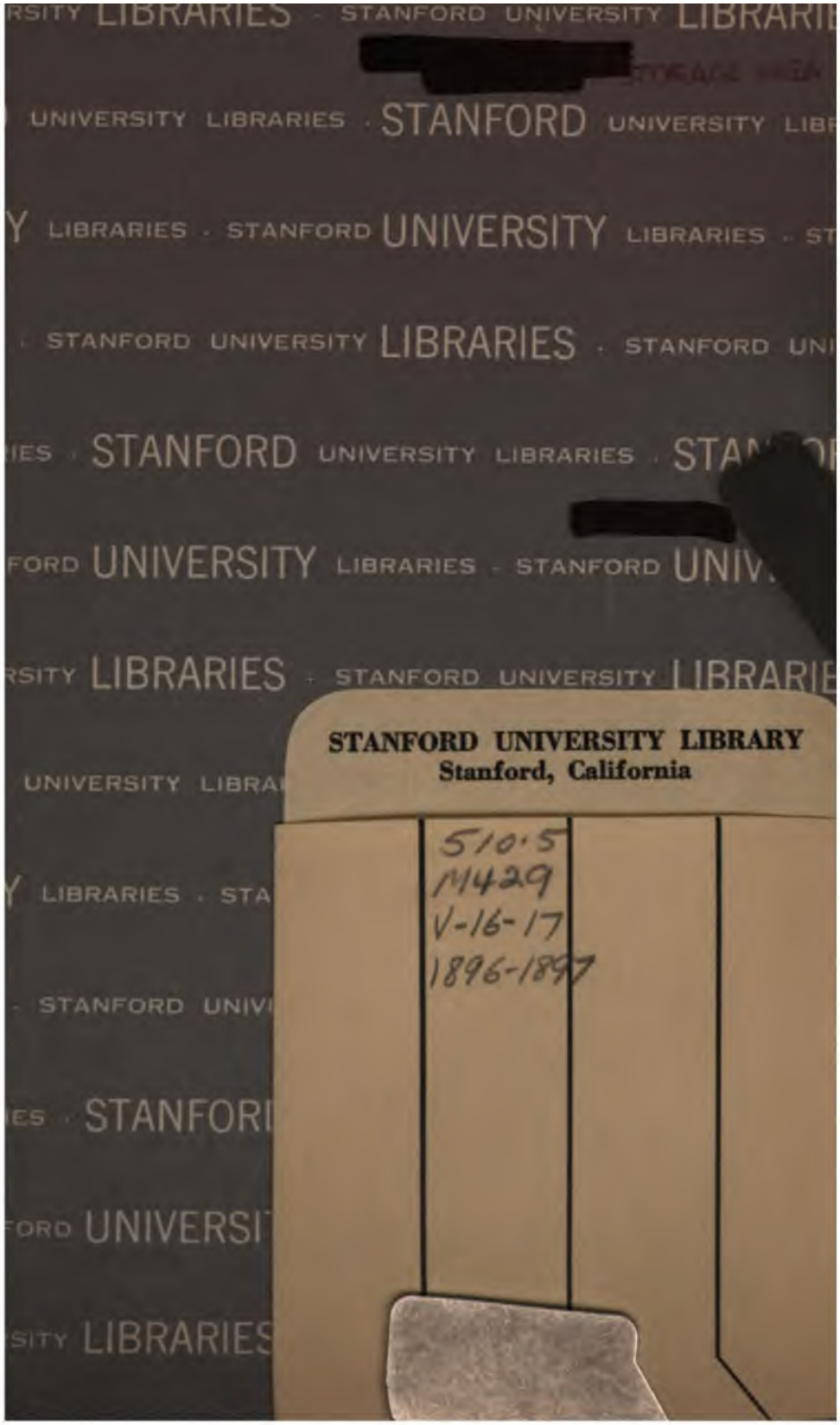
Pour r ou l infini, V devient l'expression connue du volume d'un corps en géométrie euclidienne.

Ce qui précède s'applique évidemment aux aires planes, *mutatis mutandis*.

La théorie purement analytique des aires et des volumes que nous venons d'esquisser est probablement la seule qui permette de surmonter toutes les difficultés que présente, au point de vue purement logique, la théorie de l'équivalence des figures, même en géométrie élémentaire.

Dès son premier écrit sur la géométrie qui porte son nom, Lobatchefsky est arrivé, par induction, aux formules exactes pour les aires planes et les volumes, sous une forme différente de celle que nous indiquons plus haut, mais complètement équivalente (*).

(*) Extrait des Annales de la Société scientifique de Bruxelles, [illegible], t. XX, 2e partie, pp. [illegible]


STANFORD UNIVERSITY LIBRARY
Stanford, California
510.5
M429
V-16-17
1896-1897